

Институт Проблем Передачи Информации РАН

На правах рукописи

Мусин Олег Рустумович

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ УПАКОВОК СФЕР
И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

01.01.04 — Геометрия и Топология

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | Стр. |
|--|------|
| Используемые обозначения | 5 |
| Введение | 6 |
| 0.1. Контактные числа. | 6 |
| 0.2. Метод Дельсарта для контактных чисел. | 9 |
| 0.3. Односторонние контактные числа. | 12 |
| 0.4. Множества с двумя расстояниями. | 13 |
| 0.5. Содержание работы. | 15 |
| | |
| ГЛАВА 1. Проблема контактных чисел в размерности 4 | 23 |
| 1.1. Основные теоремы | 23 |
| 1.2. Метод Дельсарта для сферических кодов. | 24 |
| 1.2.1. Теорема Шёнберга. | 25 |
| 1.2.2. Многочлены Гегенбауэра. | 25 |
| 1.2.3. Неравенство Дельсарта. | 26 |
| 1.2.4. Доказательство Леммы A1. | 27 |
| 1.2.5. Граница Дельсарта. | 27 |
| 1.3. Обобщение метода Дельсарта. | 28 |
| 1.3.1. Обобщенная граница Дельсарта. | 28 |
| 1.3.2. Класс функций $\Phi(t_0, z)$ | 30 |
| 1.3.3. Выпуклость. | 30 |
| 1.3.4. Границы для μ | 33 |
| 1.3.5. Оптимизационная проблема. | 35 |
| 1.4. Алгоритм вычисления подходящих многочленов. | 36 |
| 1.5. Оптимальные и неприводимые множества | 37 |
| 1.5.1. Условие монотонности и оптимальные множества. | 37 |

| | | |
|--------|---|----|
| 1.5.2. | Неприводимые множества. | 39 |
| 1.5.3. | Неприводимые множества на \mathbb{S}^2 | 41 |
| 1.5.4. | Вращения и неприводимые множества в размерности n | 42 |
| 1.5.5. | Неприводимые множества на сфере \mathbb{S}^3 | 45 |
| 1.5.6. | Оптимизационная задача. | 49 |
| 1.6. | Вычисление h_m | 50 |
| 1.6.1. | Случай $m = 2$ | 51 |
| 1.6.2. | Функция Θ_k | 51 |
| 1.6.3. | Экстремальные точки функции Θ_k на D | 52 |
| 1.6.4. | Верхние границы для H_m | 55 |
| 1.6.5. | Верхние границы для h_m | 57 |
| 1.7. | Доказательство Леммы А2. | 59 |
| 1.8. | Проблема тринадцати шаров. | 60 |

ГЛАВА 2. Проблема односторонних контактных чисел в размерности 4 и
коды в сферических шапочках. 65

| | | |
|------|--|----|
| 2.1. | Одностороннее контактное число в размерности 3. | 65 |
| 2.2. | Оптимальные расположения для $B(n)$ | 66 |
| 2.3. | Обобщение метода Дельсарта для кодов на полусфере. | 69 |
| 2.4. | $V(4)=18$ | 75 |
| 2.5. | О соотношениях между $k(n)$ и $B(n)$ | 82 |
| 2.6. | Коды в сферических шапочках. | 83 |

ГЛАВА 3. Сферические множества с двумя расстояниями. 87

| | | |
|------|---|----|
| 3.1. | Множества с двумя расстояниями. | 87 |
| 3.2. | Максимальные множества с двумя расстояниями для $n \leq 3$ | 89 |
| 3.3. | Максимальные множества с двумя расстояниями в пространствах размерности 4, 5, 6, 7, и 8. | 90 |
| 3.4. | Граница для сферических множеств с двумя расстояниями. | 93 |
| 3.5. | Метод Дельсарта для множеств с двумя расстояниями. | 95 |

| | |
|---|-----|
| 3.6. Границы $Q_k^{(n)}(a)$ | 97 |
| 3.7. Максимальные сферические множества с двумя расстояниями. . . | 99 |
| 3.8. Максимальные сферические множества с тремя расстояниями. . . | 101 |
| Список использованных источников | 103 |

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. \mathbb{R}^n — n -мерное евклидово пространство.
2. \mathbb{S}^d — d -мерная единичная сфера.
3. $k(n)$ — контактное число в размерности n .
4. $A(n, \varphi)$ — максимальная мощность сферического φ -кода на \mathbb{S}^{n-1} .
5. $\text{dist}(x, y)$ — угловое расстояние между точками x и y на сфере.
6. $G_k^{(n)}$ — многочлен Гегенбауэра степени k в размерности n .
7. $\dim \mathcal{M}$ — размерность пространства \mathcal{M} .
8. $B(n)$ — одностороннее контактное число в размерности n .
9. $A(n, \varphi, \psi)$ — максимальная мощность сферического φ -кода в сферической шапочке радиуса ψ на \mathbb{S}^{n-1} .
10. $B(n, \varphi) := A(n, \varphi, \pi/2)$ — максимальная мощность сферического φ -кода в полусфере.
11. $g(n)$ — мощность максимального сферического множества с двумя расстояниями в размерности n .
12. $T(n)$ — максимальная мощность сферического множества с тремя расстояниями в размерности n .

ВВЕДЕНИЕ

В диссертации рассмотрены две классические геометрические задачи. Одна из них, проблема контактных чисел, имеет более чем трехсотлетнюю историю, а вторая, оценка мощности множеств с двумя расстояниями, известна с конца 1940-х годов.

0.1. Контактные числа.

Контактным числом $k(n)$ называют наибольшее число не пересекающихся шаров одинакового радиуса в \mathbb{R}^n , которые можно расположить так, чтобы все они касались одного (центрального) шара такого же радиуса.

Очевидно, что $k(2) = 6$. В трехмерном пространстве, в задаче о контактных числах спрашивается: “Как много белых бильярдных шаров могут одновременно касаться черного бильярдного шара?”

Наиболее симметричная конфигурация, 12 бильярдных шаров вокруг одного, это когда центры 12 шаров расположены в вершинах правильного икосаэдра, а центральный шар расположен в центре икосаэдра. Однако, эти 12 внешних шаров не касаются друг друга и могут свободно перемещаться по поверхности центрального шара. Таким образом, возможно, что эти 12 шаров можно сдвинуть в одну сторону, так что найдется место для 13-го шара?

Этот вопрос был предметом спора между И. Ньютоном и Д. Грегори в 1694 году. Ньютон считал, что $k(3) = 12$, в то время как Грегори думал, что ответ может быть равен 13. Эту задачу Ньютона - Грегори часто называют *проблемой тринадцати шаров*.

Проблема тринадцати шаров оказалось достаточно трудной и была решена только в 1953 году. К. Шютте и Б.Л. Ван дер Варден [50] доказали, что Ньютон был прав и $k(3) = 12$. (О других доказательствах и истории этой задачи см. [1], [15], [17], [27], [28], [29], [30], [34], [36], [43], [46], [51], [58], [62].)

Если говорить коротко, то доказательство Шютте - Ван дер Вардена основано на переборе *неприводимых контактных графов*. Предположим, что центр центрального шара находится в начале координат 0 . Обозначим через A_1, \dots, A_N точки (векторы) касания внешними шарами центрального шара. Тогда угол между любыми двумя векторами A_i и A_j не меньше $\pi/3$ и очевидно, что проблема контактных чисел эквивалентна нахождению максимального числа точек N на сфере в n -мерном пространстве с угловыми расстояниями между точками не меньше 60° .

Заметим, что это ведет к важному обобщению:

Множество точек на сфере в \mathbb{R}^n называется сферическим φ -кодом, если минимальное угловое расстояние между точками этого множества не меньше чем φ .

Обозначим через $A(n, \varphi)$ максимальную мощность сферического φ -кода в размерности n . Тогда

$$k(n) = A(n, 60^\circ).$$

Предположим, что A_1, \dots, A_N точки на сфере. Будем считать эти точки вершинами *контактного* графа Γ . Соединим две вершины графа Γ ребром (кратчайшей дугой на сфере), если эти точки находятся на минимальном расстоянии между точками A_i , иными словами, соответствующие внешние шары касаются.

Таким образом, задача тринадцати шаров сводится к доказательству того, что на единичной сфере \mathbb{S}^2 не найдется контактного графа Γ с ребрами одинаковой длины, которая не меньше чем 60° в угловом измерении.

Совсем недавно мы с А.С. Тарасовым решили *строгую проблему тринадцати шаров* [43]. (Эту проблему еще называют *проблемой Таммеса для 13 точек*.) Если считать, что радиус центрального шара равен 1, а внешние 13 шаров имеют одинаковый радиус r , то надо найти такую конфигурацию 13 шаров, чтобы этот радиус был максимально возможным. Наше решение

этой задачи основано на компьютерном переборе неприводимых контактных графов и было доказано, что максимальный радиус $r \approx 0,9165$, или, эквивалентно, минимальное расстояние между точками касания на сфере $\approx 57,14^\circ$. (Эта работа не вошла в данную диссертацию, хотя и была мотивована работами автора по контактными числам.)

Рассмотрим контактные числа в размерности 4 и выше. Сначала покажем, что $k(4) \geq 24$. Заметим, что у единичного шара в \mathbb{R}^4 с центром в начале координат $(0, 0, 0, 0)$ имеется ровно 24 единичных шара, касающихся его, с центрами в $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 0, 0)$ со всеми переменными знаков и перестановками координат. Выпуклая оболочка этих 24 точек образует знаменитый 24-гранник - один из шести правильных многогранников в размерности 4.

Отметим, что у двух замечательных решеток: E_8 (решетка Коркина-Золотарева) и Λ_{24} (решетка Лича) число минимальных векторов равно 240 и 196560, соответственно. Отсюда следует, что $k(8) \geq 240$ и $k(24) \geq 196560$.

Первые нетривиальные верхние оценки на контактные числа $k(n)$ были получены Г.С.М. Кокстером в 1963 году [18] и для $n = 4, 5, 6, 7$, и 8 эти оценки были 26, 48, 85, 146, и 244, соответственно. Доказательства Кокстера были основаны на гипотезе о плотнейшей упаковке сферы, которая была доказана К. Бёрёцким в 1978 году [14]

Значительный прогресс по проблеме контактных чисел произошел в конце 1970-х годов. В 1978 году Г.А. Кабатянский и В.И. Левенштейн получили новые асимптотические оценки для сферических кодов и плотностей упаковок шаров [57]. В частности, они доказали, что

$$k(n) \leq 2^{0.401n(1+o(1))}.$$

(Нижняя оценка $2^{0.2075n(1+o(1))}$ была известна задолго до этого.)

В 1979 году В.И. Левенштейн [59] и независимо от него А. Одлыжко и Н. Слоэн [45] доказали, что $k(8) = 240$ и $k(24) = 196560$. В работе Одлыжко-Слоэна также улучшены верхние границы для $k(n)$ при $3 < n \leq 24$. В част-

ности, для сравнения с границами Кокстера, при $n = 4, 5, 6, 7$, и 8 новые границы были 25, 46, 82, 140, и 240, соответственно.

В последующие годы, вплоть до 2003 года, улучшения для $k(n)$, $n < 24$, были не очень значительны. В.В. Арестов и А.Г. Бабенко доказали, что граница $k(4) \leq 25$ не может быть улучшена методом Дельсарта [56]. В 2003 году нами было опубликовано короткое сообщение с наброском доказательства равенства $k(4) = 24$ [60]. (Полное доказательство опубликовано в работе [38].)

В 2009 году Г. Д. Миттелманн и Ф. Валлентин [35], используя полуопределенное программирование, улучшили верхние границы для $k(n)$, где $4 < n < 24$, $n \neq 8$. Для сравнения с предыдущими результатами, при $n = 5, 6$, и 7 новые границы 44, 78, и 134, соответственно. Однако, эти границы превосходят известные нижние границы в этих размерностях: 40, 72, и 126.

0.2. Метод Дельсарта для контактных чисел.

Все результаты о контактных числах конца 1970-х годов были получены с помощью метода Дельсарта. Метод Дельсарта позволяет получать верхние оценки для сферических кодов и многих других дискретных задач. В частности, сам метод был придуман Дельсартом для получения верхних оценок на мощность кодов, исправляющих ошибки. Для случая сферы, этот метод был подробно рассмотрен в работе Дельсарта, Гуталса, и Зейделя [23] и в уже упомянутой выше статье Кабатянского и Левенштейна [57].

Пусть \mathcal{M} – метрическое пространство с функцией расстояния $\tau(x, y)$. Функция $g(\tau)$ (определенная на множестве всех расстояний \mathcal{M}), называется *положительно определенной* на \mathcal{M} , если для любого набора точек x_1, x_2, \dots, x_N и любых чисел u_1, u_2, \dots, u_N выполнено:

$$\sum_{i,j=1}^N g(\tau(x_i, x_j))u_i u_j \geq 0.$$

Иногда удобно рассматривать «непрерывный» вариант этого определе-

ния. То есть, потребовать, чтобы для любой непрерывной функции $u(x)$ и меры μ на \mathcal{M}

$$\iint g(\tau(x, y))u(x)u(y)d\mu_x d\mu_y \geq 0.$$

Легко видеть, что если $g_1(t)$ и $g_2(t)$ положительно определенные функции, то $c_1g_1(t) + c_2g_2(t)$ положительно определенная функция для любых $c_1, c_2 \geq 0$. (Из леммы Шура следует, что и произведение двух положительно определенных функций, тоже положительно определенная функция.)

Пусть нам удалось найти такую положительно определенную функцию $g(t)$ на пространстве \mathcal{M} , и число $c > 0$, что для функции $f(t) = g(t) + c$, выполнено следующее

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f(t) &\leq 0, \text{ при всех } t \in T \subset \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Рассмотрим набор точек $X = \{x_i, i = 1, \dots, N\}$ в \mathcal{M} таких, что расстояния между любыми двумя точками лежат в T . Давайте оценим сумму

$$S_f(X) := \sum_{i,j=1}^N f(\tau(x_i, x_j))$$

двумя способами.

С одной стороны

$$S_f(X) = \sum_{i,j=1}^N g(\tau(x_i, x_j)) + cN^2 \geq cN^2,$$

поскольку функция $g(t)$ положительно определена.

С другой стороны, поскольку при $i \neq j$ расстояние $\tau(x_i, x_j) \in T$, т.е. $f(\tau(x_i, x_j)) \leq 0$, получаем

$$S_f(X) = \sum_{i \neq j} f(\tau(x_i, x_j)) + \sum_{i=1}^N f(0) \leq N.$$

Объединяя эти два неравенства, мы получаем, что

$$N \leq c^{-1}.$$

Это неравенство и называется *границей Дельсарта*.

Предположим, что $T = \{t \in \mathbb{R} : t \geq d\}$. Тогда условие $\tau(x, y) \in T$ означает, что расстояния между точками x и y не меньше d . Таким образом, метод Дельсарта позволяет оценить возможное количество точек в M на расстоянии не менее d друг от друга.

И.Я. Шёнберг [48] нашел все положительно определенные функции на сфере. Оказывается, что все п. о. ф. являются выпуклой комбинацией многочленов Гегенбауэра (от косинуса углов между точками).

Напомним определение многочленов Гегенбауэра.

$$G_0^{(n)}(x) = 1, \quad G_1^{(n)}(x) = x, \quad G_2^{(n)}(x) = \frac{nx^2-1}{n-1}, \quad \dots,$$

$$G_k^{(n)}(x) = \frac{(2k+n-4)x G_{k-1}^{(n)}(x) - (k-1) G_{k-2}^{(n)}(x)}{k+n-3}.$$

Имеет место следующая замечательная теорема:

Теорема Шёнберга. *Функции имеющие вид*

$$g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i G_i^{(n)}(\cos t), \quad a_i \geq 0,$$

являются положительно определенными функциями на сфере \mathbb{S}^{n-1} .

Обратное тоже верно, любая положительно определенная функция на \mathbb{S}^{n-1} представляется в таком виде.

Из теоремы Шёнберга легко вытекает граница Дельсарта для контактных чисел:

Теорема Дельсарта-Кабатянского-Левенштейна. *Пусть,*

$$f(x) = c_0 + c_1 G_1^n(x) + \dots + c_m G_m^n(x),$$

где $c_0 > 0$ и все $c_i \geq 0$, при $i \geq 1$. Если $f(x) \leq 0$ при $x \in [-1, 1/2]$, то

$$k(n) \leq \frac{f(1)}{c_0}.$$

Если применить эту теорему для $n = 8$ и

$$f(x) = \frac{4}{9} \left(x - \frac{1}{2}\right) x^2 \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 (x + 1),$$

то поскольку

$$f(x) = \frac{1}{240} + \frac{1}{30}G_1^8(x) + \frac{5}{48}G_2^8(x) + \frac{13}{60}G_3^8(x) + \frac{133}{480}G_4^8(x) + \frac{1}{4}G_5^8(x) + \frac{11}{96}G_6^8(x)$$

получим $k(8) \leq 240$, а неравенство $k(8) \geq 240$ влечет равенство $k(8) = 240$.

Аналогично доказывается равенство $k(24) = 196560$. Здесь

$$f(x) = \frac{128}{405} \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 x^2 \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 (x + 1).$$

По всей видимости, с помощью метода Дельсарта можно решить проблему контактных только в размерностях $n = 2, 8, 24$. Десять лет назад, Д. В. Штром с помощью компьютера проверил этот метод для $k(n)$ аж до размерности 161, и нигде не обнаружил таких замечательных равенств как при $n = 2, 8, 24$.

0.3. Односторонние контактные числа.

Рассмотрим теперь задачу, поставленную Л. Фейшем Тотом и Х. Саксом в 1976 году:

Пусть H - замкнутое полупространство в \mathbb{R}^n . Обозначим через S единичный шар в H , касающийся опорной гиперплоскости задающей H . Односторонним контактным числом $B(n)$ будем называть наибольшее число не пересекающихся единичных шаров в H , одновременно касающихся S . Найти явные значения $B(n)$ для $n = 2, 3, 4, \dots$

Легко видеть, что $B(2) = 4$. Для $n = 3$ задача была решена Г. Фейшем Тотом в 1981 году [25]. Было показано, что $B(3) = 9$.

Покажем, что $B(4) \geq 18$. Пусть

$$p_1 = (A, 0, 0, A), \quad p_2 = (-A, 0, 0, A),$$

$$\begin{aligned}
p_{\{3,4\}} &= (0, \pm A, 0, A), & p_{\{5,6\}} &= (0, 0, \pm A, A), \\
p_{\{7,\dots,10\}} &= (\pm A, \pm A, 0, 0), & p_{\{11,\dots,14\}} &= (\pm A, 0, \pm A, 0), \\
p_{\{15,\dots,18\}} &= (0, \pm A, \pm A, 0),
\end{aligned}$$

где $A = 1/\sqrt{2}$. Заметим, что все 18 точек $\{p_i\}$ лежат на верхней полусфере \mathbb{S}_+^3 и минимальное угловое расстояние между ними равно $\pi/3$.

В 1991 г., для $n = 4$, Л. Сабо [53], используя границу Одлыжко-Слоэна: $k(4) \leq 25$ доказал, что $B(4) \leq 20$. В 2005 г. К. Бездек, используя наш результат $k(4) = 24$, показал что $B(4) \leq 19$ и выдвинул гипотезу, что $B(4) = 18$. Мы доказали эту гипотезу в 2006 году [37].

В работах [4, 39] мы получили несколько новых верхних границ для $B(n)$. Однако, все эти границы были улучшены с помощью полуопределенного программирования в работе К. Башок и Ф. Валлентина [2] В этой же работе была доказана наша гипотеза, что $B(8) = 183$ из работы [37].

0.4. Множества с двумя расстояниями.

В диссертации мы также рассматриваем задачу о максимальных множествах с двумя расстояниями.

Множество \mathcal{S} в \mathbb{R}^n или \mathbb{S}^{n-1} (или любом другом метрическом пространстве) называется *множеством с s расстояниями* (по-английски *s -distance set*), если расстояние между его точками принимает не более чем s значений.

Для $s = 2$ С. Дж. Эйнхорн и И.Я. Шёнберг [24] показали, что существует лишь конечное число множеств (с точностью до подобия) с двумя расстояниями в \mathbb{R}^n , состоящих из более чем $n + 2$ точек.

Отметим, что верхние оценки на мощность множеств с s расстояниями в \mathbb{R}^n известны около 30-ти лет. В частности, Блокхаус доказал, что число точек у множества \mathcal{S} с двумя расстояниями в \mathbb{R}^n не превосходит $(n + 1)(n + 2)/2$. Как показал П. Лисонек [33], эта оценка достигается в размерности 8.

Имеется пример множества с двумя расстояниями в \mathbb{R}^n , состоящего из $C_{n+1}^2 = n(n+1)/2$ точек. Мы будем обозначать это множество M_n . Рассмотрим правильный симплекс в \mathbb{R}^n , у которого длины всех ребер равны 1. У этого симплекса всего $n(n+1)/2$ ребер. Их середины будут образовывать множество с двумя расстояниями. Действительно, если два ребра имеют общую вершину, то расстояние между их серединами равно $1/2$ (поскольку соединяющий их отрезок будет средней линией треугольника образованного вершинами этих ребер). Если не имеют, то $1/\sqrt{2}$, поскольку в этом случае вершины этих ребер являются вершинами правильного трехмерного тетраэдра, а между серединами противоположных ребер правильного тетраэдра именно такое расстояние.

Это множество можно описать также с помощью ортонормированного базиса e_1, e_2, \dots, e_{n+1} пространства \mathbb{R}^{n+1} . Рассмотрим точки вида

$$e_i + e_j \quad (1 \leq i < j \leq n+1).$$

Расстояние между такими точками может быть равно либо $\sqrt{2}$ либо 2, в зависимости от того имеют ли они общую единицу в координатной записи или нет. Сумма координат получившихся $n(n+1)/2$ точек будет равна 2 и поэтому они будут лежать в гиперплоскости задаваемой уравнением $x_1 + \dots + x_{n+1} = 2$.

Заметим, что если a и b ($a < b$) – два расстояния множества M_n , то $b^2/a^2 = 2$. Оказывается, что подобное свойство верно для всех достаточно больших множеств с двумя расстояниями.

Ларман, Роджерс и Зейдель [31] доказали, что если множество с двумя расстояниями a и b ($a < b$) в \mathbb{R}^n состоит из более чем $2n+3$ точек, то

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{k-1}{k}, \text{ где } k \in \mathbb{N} \text{ и } 2 \leq k \leq \frac{1 + \sqrt{2n}}{2}.$$

В работе Дельсарта, Гуталса и Зейделя [23], которую мы упоминали в связи с методом Дельсарта, были получены оценки для случая, когда точки множества \mathcal{S} лежат на сфере в \mathbb{R}^n . (Мы будем называть такие множества

сферическими множествами с двумя расстояниями.) В этом случае оценка будет $n(n+3)/2$. Заметим, что эта оценка достигается для $n = 2, 6$ и 22 .

Обозначим максимальную мощность сферического множества с двумя расстояниями через $g(n)$. Тогда

$$\frac{n(n+1)}{2} \leq g(n) \leq \frac{n(n+3)}{2}.$$

В работе [40] мы улучшили эту оценку и было показано, что

$$g(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

для $6 < n < 22$ и $23 < n < 40$. Недавно этот результат был расширен для $n = 23$ и $40 \leq n \leq 93$ ($n \neq 46, 78$) в работе А. Барга и В.-Ш. Ю [6].

0.5. Содержание работы.

Первая глава диссертации посвящена решению проблемы контактных чисел в размерности 4. Здесь приведено подробное доказательство равенства $k(4) = 24$, а также дано новое решение проблемы тринадцати шаров.

Теорема А. $k(4) = 24$.

Доказательство Теоремы А основано на обобщенном методе Дельсарта (ОМД). Первым шагом в этом методе является построение “подходящего” многочлена $f(t)$. Этот многочлен ищется в форме

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^d c_k G_k^{(n)}(t), \quad c_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, d.$$

В классическом методе Дельсарта на коэффициенты c_i накладывается условие $f(t) \leq 0$ на отрезке $[-1, 1/2]$. Как мы показали выше, из этого условия вытекает неравенство $S_f(X) \leq Nf(1)$.

В ОМД мы ослабляем это условие и требуем, чтобы при заданном параметре t_0 функция $f(t) \leq 0$ на отрезке $[t_0, 1/2]$ и чтобы функция f была

монотонно убывающей на интервале $[-1, t_0]$. Параметр t_0 и коэффициенты c_i ищутся такими, чтобы, по возможности, минимизировать сумму $S_f(X)$.

Рассмотрим на единичной сфере \mathbb{S}^{n-1} набор точек $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$. Обозначим, через h_m максимум суммы $H(Y) := f(1) + f(y_0 \cdot y_1) + \dots + f(y_0 \cdot y_m)$ по всем таким наборам Y , что

$$y_i \cdot y_j \leq 1/2 \text{ для всех } i \neq j, \quad y_0 \cdot y_i \leq t_0 \text{ для } i = 1, \dots, m.$$

При $m = 0$ зададим $h_0 := f(1)$.

Условия на Y задают определенные условия на m . Обозначим через μ максимально возможное m . Тогда имеет место следующая верхняя граница:

$$k(n) \leq \frac{1}{c_0} \max\{h_0, h_1, \dots, h_\mu\}. \quad (1)$$

Величина μ может быть оценена через сферические коды меньшей размерности:

$$\mu \leq A\left(n - 1, \arccos \frac{1/2 - t_0^2}{1 - t_0^2}\right). \quad (2)$$

Рассмотрим многочлен, являющийся “подходящим” для ОМД при $n = 4$:

$$f_4(t) := \frac{1344}{25} t^9 - \frac{2688}{25} t^7 + \frac{1764}{25} t^5 + \frac{2048}{125} t^4 - \frac{1229}{125} t^3 - \frac{516}{125} t^2 - \frac{217}{500} t - \frac{2}{125}.$$

Разложив f_4 по многочленам Гегенбауэра $U_k = G_k^{(4)}$ (в этой размерности это многочлены Чебышева второго рода) получим

$$f_4 = U_0 + 2U_1 + \frac{153}{25}U_2 + \frac{871}{250}U_3 + \frac{128}{25}U_4 + \frac{21}{20}U_9.$$

Стало быть $c_0 = 1$, а все остальные $c_i \geq 0$.

Здесь $t_0 = -0,6058$. Из (2) следует

$$\mu \leq A(3, \varphi_0), \text{ где } \varphi_0 := \arccos \frac{1/2 - t_0^2}{1 - t_0^2} \approx 77,8707^\circ.$$

К. Шютте и Б.Л. Ван дер Варден [49] доказали, что $A(3, \varphi) = 7$ только если $\varphi < 77,8696^\circ$. Поскольку $\varphi_0 > 77,8696^\circ$, то $\mu = 6$.

Таким образом, доказательство Теоремы А сведено к доказательству того, что $h_m < 25$ при $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Несложно видеть, что

$$h_0 = f(1) = 18,774, \quad h_1 = f(1) + f(-1) = 24,48.$$

Для случая $m = 2$ можно показать, что максимум $H(Y)$ достигается когда точки y_1 и y_2 располагаются на расстоянии 150° от точки y_0 . Тогда

$$h_2 = f(1) + 2f(\cos 150^\circ) \approx 24,8644.$$

Наиболее сложная часть доказательства - это вычисление h_m при $m = 3, 4, 5$. Если точки y_0, y_1, \dots, y_m на \mathbb{S}^3 являются максимальной конфигурацией для h_m , то это множество *неприводимо*. Это означает, что точки множества $P_m := \{y_i, i = 1, \dots, m\}$, которые лежат от y_0 на расстоянии не ближе чем $\arccos t_0$ нельзя отодвинуть от y_0 , чтобы какие-то расстояния между ними не стали бы меньше 60° .

Можно показать, что неприводимое множество P_3 образует треугольник со сторонами равными 60° , P_4 образует правильный тетраэдр, а P_5 - бипирамиду у которой все ребра длиной 60° , кроме возможно одного, являющегося стороной треугольника, разбивающего P_5 на две пирамиды. (Удивительно, но это утверждение не является тривиальным, по-крайней мере мы не смогли найти простые рассуждения, и полное его доказательство занимает около 9 страниц.)

Следующим шагом является вычисление верхних границ для h_m . Для этого P_m разбивается на клетки (параллелепипеды), на которых при фиксированных $\{y_i, i = 1, \dots, m\}$ функция $F(y_0) := H(Y)$ достигает максимума в вершинах. При достаточно мелком разбиении можно показать, что

$$h_3 < 24,8345, \quad h_4 < 24,818, \quad h_5 < 24,685$$

Для случая $m = 6$ можно рассмотреть точку y_i , ближайшую к y_0 и оставшиеся пять точек. Поскольку у нас уже оценка для пяти точек, а расстояние

до ближайшей y_i можно оценить, то это можно использовать для оценки h_6 . Вычисления показывают, что

$$h_6 < 24,7762 < h_2.$$

Таким образом, $\max \{h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\} = h_2 < 25$.

Аналогично Теореме А доказывается

Теорема В. $k(3) = 12$.

В этом случае подходящий многочлен

$$f_3(t) = \frac{2431}{80}t^9 - \frac{1287}{20}t^7 + \frac{18333}{400}t^5 + \frac{343}{40}t^4 - \frac{83}{10}t^3 - \frac{213}{100}t^2 + \frac{t}{10} - \frac{1}{200},$$

$t_0 = -0,5907$, $\mu = 4$, $h_{max} = h_1 = 12,88$. Разложение f_3 по многочленам Лежандра $P_k = G_k^{(3)}$ имеет вид

$$f_3 = P_0 + 1,6P_1 + 3,48P_2 + 1,65P_3 + 1,96P_4 + 0,1P_5 + 0,32P_9,$$

а стало быть $c_0 = 1$, $c_i \geq 0$. В итоге мы получаем, что

$$k(3) \leq h_1 = 12,88 < 13.$$

Вторая глава диссертации посвящена решению проблемы односторонних контактных чисел в размерности 4 и оценке мощности сферических кодов в сферических шапочках.

Теорема С. $B(4) = 18$.

В доказательстве используется комбинация метода Дельсарта, ОМД и элементов теории сферических кодов в сферических шапочках.

Обозначим через S_+ замкнутую верхнюю полусферу единичной сферы \mathbb{S}^{n-1} , т.е. $x_n \geq 0$, и S_+ является сферической шапочкой радиуса 90° с центром в «северном полюсе» $N = (0, \dots, 0, 1)$.

Пусть P - конечное множество в S_+ . Введем обозначения:

$$P_a := \{p \in P : 90^\circ \geq \text{dist}(p, N) \geq 60^\circ\}, \quad a(P) := |P_a|,$$

$$P_b = \{p \in P : \text{dist}(p, N) < 60^\circ\}, \quad b(P) := |P_b|.$$

Тогда

$$P = P_a \cup P_b, \quad |P| = a(P) + b(P).$$

Лемма С1. Пусть $P \subset S_+ \subset \mathbb{S}^{n-1}$ является сферическим $\pi/3$ -кодом. Тогда

- (i) $a(P) + 2b(P) \leq k(n)$;
- (ii) $a(P) \leq A(n-1, \arccos(1/\sqrt{3}))$.

Методом Дельсарта можно доказать, что $A(3, \arccos(1/\sqrt{3})) \leq 15$. Следовательно для $n = 4$ из Леммы С1 следует

$$a + 2b \leq k(4) = 24, \quad a \leq 15, \quad a + b = B(4) \geq 18.$$

Из этих неравенств получаются только следующие возможности для $|P|$, $a(P)$ и $b(P)$:

$$|P| = 19, \quad (a, b) = (15, 4); (14, 5)$$

$$|P| = 18, \quad (a, b) = (15, 3); (14, 4); (13, 5); (12, 6)$$

Для того, чтобы доказать Теорему С надо доказать, что

Лемма С2. $(a, b) \neq (15, 4)$.

Лемма С3. $(a, b) \neq (14, 5)$.

Доказательства этих лемм оказались довольно сложными технически. Для этого пришлось обобщить границу Дельсарта для кодов в сферических шапочках. В доказательстве Леммы С3 также использовались вычислительные приемы из ОМД.

В заключительной части главы 2 рассматриваются некоторые обобщения Леммы С1 для кодов в сферических шапочках. Введем следующие обозначения:

$A(n, \theta, \psi)$ - максимальная мощность сферического θ -кода в сферической шапочке радиуса ψ ;

$B(n, \theta) := A(n, \theta, \pi/2)$ - максимальная мощность сферического θ -кода в полусфере S_+ ;

$\omega(\theta, \alpha, \beta)$ - функция, определяемая уравнением

$$\cos \omega(\theta, \alpha, \beta) = \frac{\cos \theta - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Теорема D.

$$(i) \quad A(n, \theta, \psi) \leq B(n, \omega(\theta, \psi)), \text{ где } \theta \leq 2\psi \leq \pi;$$

$$(ii) \quad B(n, \theta) \leq \frac{A(n-1, \tilde{\theta}) + A(n, \theta)}{2}, \quad \cos \tilde{\theta} = \frac{\cos \theta}{\cos(\theta/2)}.$$

Третья глава диссертации посвящена сферическим множествам с двумя и тремя расстояниями.

Напомним, что для сферических множеств \mathcal{S} в размерности n верна верхняя граница, полученная в работе Дельсарта-Гуталса-Зейделя [23]:

$$|\mathcal{S}| \leq \frac{n(n+3)}{2}.$$

Эта оценка, как впрочем и другие оценки для множеств с s расстояниями, получены с помощью так называемого *полиномиального метода*. Для этого по множеству \mathcal{S} строится система линейно-независимых многочленов и оценка получается из-за того, что число этих многочленов ограничено размерностью соответствующего пространства многочленов. Мы применили полиномиальный метод для сферических множеств с двумя расстояниями, сумма которых не превосходит π .

Теорема E. Пусть \mathcal{S} - это множество с двумя расстояниями α и β , расположенное на единичной сфере в \mathbb{R}^n , причем сумма этих (угловых) расстояний не превосходит π , т.е. $\alpha + \beta \leq \pi$. Тогда количество точек в \mathcal{S} не превосходит $n(n+1)/2$.

Напомним, что нижняя граница для $g(n)$ - мощности максимального сферического множества с двумя расстояниями, тоже равна $n(n+1)/2$. Поэтому,

если $g(n) > n(n+1)/2$, то у максимального множества в этой размерности $\alpha + \beta > \pi$.

Пусть $a := \cos \alpha$ и $b := \cos \beta$. Тогда условие $\alpha + \beta \leq \pi$ эквивалентно условию $a + b \geq 0$. Для того, чтобы оценить $g(n)$ можно применить метод Дельсарта для f , определенной на множестве $T = \{a, b\}$ с $a + b < 0$. В главе 2 явно выписаны 5 многочленов P_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, которые используются в качестве f для границы Дельсарта. (Степени этих многочленов не превосходят 4.)

Из теоремы Лармана-Роджерса-Зейделя [31] следует, что

$$b(a) = (ka - 1)/(k - 1), \quad k = 2, \dots, m_n := \lfloor (1 + \sqrt{2n})/2 \rfloor.$$

Для фиксированного k мы получаем однопараметрическое семейство пар точек $T = \{a, b(a)\}$ с

$$a \in I_k := \left[\frac{2-k}{k}, \frac{1}{2k-1} \right).$$

Давайте зафиксируем размерность n . Рассмотрим все $k = 2, \dots, m_n$. Следующий шаг: для каждого из 5 случаев $f = P_i$ находим границу Дельсарта на $T = \{a, b(a)\}$. Для каждого $a \in I_k$, взяв минимум из этих пяти границ, получим оценку сверху $G(a)$. Если мы возьмем максимум G на I_k , то получим верхнюю оценку для \mathcal{S} с $a + b < 0$. Последний шаг: если эта оценка для всех k не больше чем $n(n+1)/2$, то $g(n) = n(n+1)/2$. Вычисления по этой схеме доказывают следующую теорему:

Теорема F. *Если $6 < n < 22$ или $23 < n < 40$, то*

$$g(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Для $n = 23$

$$g(23) = 276 \text{ или } 277.$$

Мы уже отмечали, что недавно этот результат был расширен для $n = 23$ и $40 \leq n \leq 93$ ($n \neq 46, 78$).

Заметим, что 6, 22, 46, 78 являются числами вида $(2m + 1)^2 - 3$, где $m = 1, 2, 3, 4$. Это приводит к следующей гипотезе:

Мощность максимального сферического множества с двумя расстояниями в \mathbb{R}^n , где $n > 6$ и $n \neq 4m^2 + 4m - 2$, $m \in \mathbb{N}$, равна $n(n + 1)/2$.

В совместной работе [5] мы с А. М. Баргом применили эту схему для двоичных и равновесных кодов с двумя расстояниями. Также были получены новые границы для множеств с s -расстояниями.

В последней части главы 3 разбираются результаты о сферических множествах с тремя расстояниями, полученных совместно с Х. Нозаки. Здесь тоже применима схема доказательства Теоремы F.

В этой схеме важную роль играет теорема Лармана-Роджерса-Зейделя. Эта теорема была обобщена Х. Нозаки для множеств с s -расстояниями [44]. Используя это обобщение, в главе 3 доказывается следующая

Теорема G. Обозначим через $T(n)$ максимальную мощность сферического множества с тремя расстояниями в n -мерном пространстве. Тогда

1. $T(8) = 120$ и $T(22) = 2025$.
2. $T(4) \leq 27$, $T(5) \leq 39$ и $T(7) \leq 91$.
3. $T(n) \leq n(n + 1)(n + 2)/6$ для $n = 6$ и $9 \leq n \leq 19$.
4. $T(n) \leq (n + 3)(n^2 + 2)/6$ для $20 \leq n \leq 30$.
5. $T(n) \leq (n^2 - 1)(n + 6)/6$ для $31 \leq n \leq 50$.

ГЛАВА 1

ПРОБЛЕМА КОНТАКТНЫХ ЧИСЕЛ В РАЗМЕРНОСТИ 4

1.1. Основные теоремы

Первая глава этой работы посвящена решению проблемы контактных чисел в размерности 4. Здесь доказывается следующая теорема:

Теорема А. $k(4) = 24$.

Рассмотрим многочлен:

$$f_4(t) := \frac{1344}{25}t^9 - \frac{2688}{25}t^7 + \frac{1764}{25}t^5 + \frac{2048}{125}t^4 - \frac{1229}{125}t^3 - \frac{516}{125}t^2 - \frac{217}{500}t - \frac{2}{125}.$$

Лемма А1. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_M\}$ - произвольное множество точек на единичной сфере \mathbb{S}^3 . Тогда

$$S(X) := \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M f_4(x_i \cdot x_j) \geq M^2.$$

Доказательство Леммы А1 приводится в следующем параграфе.

Напомним, что множество точек на сфере в \mathbb{R}^n называется сферическим φ -кодом, если минимальное угловое расстояние между точками этого множества не меньше чем φ .

Лемма А2. Предположим, что $X = \{x_1, \dots, x_M\} \subset \mathbb{S}^3$ - сферический $\pi/3$ -код. Тогда

$$S(X) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M f_4(x_i \cdot x_j) < 25M.$$

Доказательство этой леммы составляет наибольшую часть доказательства Теоремы А.

Из Лемм А1 и А2 немедленно следует Теорема А.

Доказательство. Если X - сферический $\pi/3$ -код на \mathbb{S}^3 с $M = k(4)$ точками, то X удовлетворяет условиям Лемм А1 и А2. Следовательно,

$$M^2 \leq S(X) < 25M.$$

Отсюда вытекает, что $M < 25$, т.е. $M \leq 24$. Поскольку, $k(4) \geq 24$, то мы получаем равенство $M = k(4) = 24$. \square

В первой главе также дано новое решение проблемы тринадцати шаров.

Теорема В. $k(3) = 12$.

В этом случае рассмотрим многочлен:

$$f_3(t) = \frac{2431}{80}t^9 - \frac{1287}{20}t^7 + \frac{18333}{400}t^5 + \frac{343}{40}t^4 - \frac{83}{10}t^3 - \frac{213}{100}t^2 + \frac{t}{10} - \frac{1}{200},$$

Доказательство Теоремы В сразу следует из Лемм В1 и В2.

Лемма В1. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_M\}$ - произвольное множество точек на единичной сфере \mathbb{S}^2 . Тогда

$$S(X) := \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M f_3(x_i \cdot x_j) \geq M^2.$$

Лемма В2. Предположим, что $X = \{x_1, \dots, x_M\}$ такое подмножество \mathbb{S}^2 что угловое расстояние между любыми различными точками x_i, x_j не меньше $\pi/3$. Тогда

$$S(X) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M f_3(x_i \cdot x_j) < 13M.$$

1.2. Метод Дельсарта для сферических кодов.

В этой работе мы будем рассматривать $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ либо как точки на сфере \mathbb{S}^{n-1} , либо как единичные векторы в \mathbb{R}^n .

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ - произвольное конечное подмножество $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^{n-1} = \{x : x \in \mathbb{R}^n, x \cdot x = \|x\|^2 = 1\}$. Обозначим через $\phi_{i,j} = \text{dist}(x_i, x_j)$ сферическое (угловое) расстояние между x_i, x_j . Ясно, что $\cos \phi_{i,j} = x_i \cdot x_j$.

1.2.1. Теорема Шёнберга. Пусть u_1, u_2, \dots, u_M - произвольный набор действительных чисел. Тогда

$$\left\| \sum u_i x_i \right\|^2 = \sum_{i,j} \cos \phi_{i,j} u_i u_j \geq 0,$$

или эквивалентно, матрица Грама $(x_i \cdot x_j)$ является положительно полуопределенной.

И. Я. Шёнберг [48] обобщил это свойство для многочленов Гегенбауэра $G_k^{(n)}$. Он доказал, что матрица $(G_k^{(n)}(\cos \phi_{i,j}))$ является положительно полуопределенной для любого конечного $X \subset \mathbb{S}^{n-1}$.

Шёнберг также доказал, что и обратное верно:

Если $f(t)$ - многочлен с действительными коэффициентами и для любого конечного $X \subset \mathbb{S}^{n-1}$ матрица $(f(\cos \phi_{i,j}))$ является положительно полуопределенной, то $f(t)$ является линейной комбинацией $G_k^{(n)}(t)$ с неотрицательными коэффициентами.

1.2.2. Многочлены Гегенбауэра. Приведем здесь три эквивалентных определения многочленов Гегенбауэра.

Зададим многочлен $C_k^{(n)}(t)$ через разложение

$$(1 - 2rt + r^2)^{(2-n)/2} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k C_k^{(n)}(t).$$

Тогда многочлены, которые определяются как $G_k^{(n)}(t) := C_k^{(n)}(t)/C_k^{(n)}(1)$ называют *многочленами Гегенбауэра* или *ультрасферическими функциями*. (Здесь нормировка $G_k^{(n)}$ задается условием $G_k^{(n)}(1) = 1$.)

Многочлены $G_k^{(n)}$ можно также определить по рекуррентной формуле:

$$G_0^{(n)} = 1, \quad G_1^{(n)} = t, \quad \dots, \quad G_k^{(n)} = \frac{(2k + n - 4)t G_{k-1}^{(n)} - (k - 1) G_{k-2}^{(n)}}{k + n - 3}$$

Третье определение: Это система ортогональных многочленов на интервале $[-1, 1]$ с весовой функцией $\rho(t) = (1 - t^2)^{(n-3)/2}$ (см. детали в [16, 48, 58, 61]).

В случае $n = 3$, $G_k^{(n)}$ являются многочленами Лежандра P_k , а $G_k^{(4)}$ - многочлены Чебышева второго рода (с нормировкой $U_k(1) = 1$, отличной от обычной),

$$G_k^{(4)}(t) = U_k(t) = \frac{\sin((k+1)\phi)}{(k+1)\sin\phi}, \quad t = \cos\phi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Например, $U_0 = 1$, $U_1 = t$, $U_2 = (4t^2 - 1)/3$, $U_3 = 2t^3 - t$,
 $U_4 = (16t^4 - 12t^2 + 1)/5$, \dots , $U_9 = (256t^9 - 512t^7 + 336t^5 - 80t^3 + 5t)/5$.

1.2.3. Неравенство Дельсарта. Если A - положительная полуопределенная матрица, то сумма всех ее элементов будет неотрицательной. Теорема Шёнберга влечет, что $(G_k^{(n)}(t_{i,j}))$ - положительная полуопределенная матрица, где $t_{i,j} := \cos\phi_{i,j}$, Тогда

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M G_k^{(n)}(t_{i,j}) \geq 0 \quad (1.2.1)$$

Определение 1.1. Обозначим через \mathfrak{G}_n^+ множество непрерывных функций $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ представимых в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k G_k^{(n)}(t)$$

с коэффициентами удовлетворяющих следующим условиям:

$$c_0 > 0, \quad c_k \geq 0 \quad \text{для } k = 1, 2, \dots, \quad f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty.$$

Предположим, $f \in \mathbf{G}_n^+$ и пусть

$$S(X) = S_f(X) := \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M f(t_{i,j}).$$

Применяя (1.2.1), получим

$$S(X) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M G_k^{(n)}(t_{i,j}) \right) \geq \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M c_0 G_0^{(n)}(t_{i,j}) = c_0 M^2.$$

Из этого следует

$$S(X) \geq c_0 M^2. \quad (1.2.2)$$

1.2.4. Доказательство Леммы А1.

Доказательство. Разложив f_4 по $U_k = G_k^{(4)}$ получим

$$f_4 = U_0 + 2U_1 + \frac{153}{25}U_2 + \frac{871}{250}U_3 + \frac{128}{25}U_4 + \frac{21}{20}U_9$$

Мы видим, что $f_4 \in \mathbf{G}_4^+$ и $c_0 = 1$. Таким образом, Лемма А1 следует из (1.2.2). \square

1.2.5. Граница Дельсарта. Предположим, что $X = \{x_1, \dots, x_M\} \subset \mathbb{S}^{n-1}$ является сферическим ψ -кодом, т.е. для всех $i \neq j$, $t_{i,j} = \cos \phi_{i,j} = x_i \cdot x_j \leq z := \cos \psi$, иными словами $t_{i,j} \in [-1, z]$ (однако, $t_{i,i} = 1$).

Если $f \in \mathbf{G}_n^+$ и $f(t) \leq 0$ для всех $t \in [-1, z]$, то $f(t_{i,j}) \leq 0$ для всех $i \neq j$. Это влечет

$$S_f(X) = Mf(1) + 2f(t_{1,2}) + \dots + 2f(t_{M-1,M}) \leq Mf(1).$$

Если применить к этому неравенству (1.2.2), то получим $M \leq f(1)/c_0$.

Пусть $A(n, \psi)$ обозначает ψ -код на сфере \mathbb{S}^{n-1} максимальной мощности.

Тогда

$$A(n, \psi) \leq \frac{f(1)}{c_0} \quad (1.2.3)$$

Неравенство (1.2.3) играет решающую роль в методе Дельсарта (см. детали в [12, 22, 23, 45, 56–59]). Если $z = 1/2$ и $c_0 = 1$, то (1.2.3) влечет

$$k(n) = A(n, \pi/3) \leq f(1).$$

В. И. Левенштейн [59], и независимо Н. Слоэн и А. Одлыжко [45] для $n = 8, 24$ нашли подходящие многочлены $f(t)$: $f(t) \leq 0$ для всех $t \in [-1, 1/2]$, $f \in \mathbf{G}_n^+$, $c_0 = 1$ с

$$f(1) = 240 \text{ for } n = 8; \quad \text{and} \quad f(1) = 196560 \text{ for } n = 24.$$

Тогда

$$k(8) \leq 240, \quad k(24) \leq 196560.$$

Для $n = 8, 24$ минимальные векторы E_8 и решетки Лича дают эти контактные числа. Таким образом, $k(8) = 240$, and $k(24) = 196560$.

Для случая $n = 4$ в работе [45] был найден многочлен 9-й степени f с $f(1) \approx 25.5585$. Из этого следует: $24 \leq k(4) \leq 25$.

1.3. Обобщение метода Дельсарта.

1.3.1. Обобщенная граница Дельсарта. Пусть $f(t)$ - произвольная действительная функция на интервале $[-1, 1]$. Предположим, что задано число ψ . Положим, $z := \cos \psi$. Рассмотрим теперь на сфере \mathbf{S}^{n-1} такие точки y_0, y_1, \dots, y_m , что

$$y_i \cdot y_j \leq z \text{ для всех } i \neq j, \quad f(y_0 \cdot y_i) > 0 \text{ для } 1 \leq i \leq m. \quad (1.3.1)$$

Определение 1.2. Для заданных $y_0 \in \mathbf{S}^{n-1}$, $m \geq 0$, z , и $f(t)$ определим такое семейство $Q_m(y_0) = Q_m(y_0, n, f)$ конечных подмножеств $Y = \{y_1, \dots, y_m\} \subset \mathbf{S}^{n-1}$ что

$$Q_m(y_0) := \begin{cases} \{y_0\}, & m = 0, \\ \{Y : \{y_0\} \cup Y \text{ удовлетворяет (1.3.1)}\}, & m \geq 1. \end{cases}$$

Обозначим $\mu = \mu(n, z, f) := \max\{m : Q_m(y_0) \neq \emptyset\}$.

Для $0 \leq m \leq \mu$ определим функцию $H = H_f$ на семействе $Q_m(y_0)$:

$$H(y_0) := f(1) \quad \text{for } m = 0,$$

$$H(y_0; Y) = H(y_0; y_1, \dots, y_m) := f(1) + f(y_0 \cdot y_1) + \dots + f(y_0 \cdot y_m) \quad \text{for } m \geq 1.$$

Пусть

$$h_m = h_m(n, z, f) := \sup_{Y \in Q_m(y_0)} \{H(y_0; Y)\}, \quad h_{max} := \max\{h_0, h_1, \dots, h_\mu\}.$$

Теорема 1.1. *Предположим, что $f \in \mathbf{G}_n^+$. Тогда*

$$A(n, \psi) \leq \frac{h_{max}(n, \cos \psi, f)}{c_0} = \frac{1}{c_0} \max\{h_0, h_1, \dots, h_\mu\}.$$

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_M\} \subset \mathbf{S}^{n-1}$ - сферический ψ -код. Так как $f \in \mathbf{G}_n^+$, то неравенство (1.2.2) влечет: $S(X) \geq c_0 M^2$.

Обозначим $J(i) := \{j : f(x_i \cdot x_j) > 0, j \neq i\}$, $X(i) := \{x_j : j \in J(i)\}$.

Тогда

$$S_i(X) := \sum_{j=1}^M f(x_i \cdot x_j) \leq f(1) + \sum_{j \in J(i)} f(x_i \cdot x_j) = H(x_i; X(i)) \leq h_{max},$$

и поэтому

$$S(X) = \sum_{i=1}^M S_i(X) \leq M h_{max}. \quad (1.3.2)$$

Мы получили, что $c_0 M^2 \leq S(X) \leq M h_{max}$, т. е. $c_0 M \leq h_{max}$, как и требовалось. \square

Заметим, что $h_0 = f(1)$. В самом деле, если $f(t) \leq 0$ для всех $t \in [-1, z]$, то $\mu(n, z, f) = 0$, т. е. $h_{max} = h_0 = f(1)$. Следовательно, в этом случае теорема вытекает из границы Дельсарта $M \leq f(1)/c_0$.

1.3.2. Класс функций $\Phi(t_0, z)$. Задача оценки h_{max} в общем случае выглядит даже более сложной чем задача оценки мощности ψ -кодов. Не очень понятно как находить μ , каким является оптимальное расположение Y ? Здесь мы рассмотрим эту задачу для очень ограниченного класса функций $\Phi(t_0, z)$. Для оценок в Теореме 1.1 нам нужно условие $f \in \mathbf{G}_n^+$. Вместе с тем, для оценки h_m нам это условие не понадобится. Стало быть в этом разделе мы не предполагаем, что $f \in \mathbf{G}_n^+$.

Определение 1.3. *Предположим, что действительные числа t_0 и z удовлетворяют условию $1 > t_0 > z \geq 0$. Обозначим через $\Phi(t_0, z)$ множество функций $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ таких что*

$$f(t) \leq 0 \quad \text{для } t \in [-t_0, z].$$

Пусть $f \in \Phi(t_0, z)$ и $Y \in \Omega_m(y_0, n, f)$. Обозначим

$$e_0 := -y_0, \quad \theta_0 := \arccos t_0, \quad \theta_i := \text{dist}(e_0, y_i) \quad \text{для } i = 1, \dots, m.$$

(Другими словами, e_0 это антиподальная к y_0 точка на сфере.)

Легко видеть, что $f(y_0 \cdot y_i) > 0$ только если $\theta_i < \theta_0$. Следовательно, Y является ψ -кодом в открытой сферической шапочке $\text{Cap}(e_0, \theta_0)$ с центром e_0 и радиусом θ_0 , где $\pi/2 \geq \psi > \theta_0$.

Это условие достаточно строгое и, в частности, влечет свойство выпуклости для Y . Мы применим это свойство в следующем разделе.

1.3.3. Выпуклость. Подмножество $S \subset \mathbb{S}^{n-1}$ называется *сферически выпуклым* если для любых двух не антиподальных точек из S кратчайшая дуга, соединяющая эти точки, целиком лежит в S .

Замыкание выпуклого множества является выпуклым и является пересечением некоторого семейства замкнутых полусфер (см. детали в [21]).

Пусть $Y = \{y_1, \dots, y_m\} \subset \text{Cap}(e_0, \theta_0)$, $\theta_0 < \pi/2$. Тогда *выпуклая оболочка* множества Y корректно определена и является пересечением всех выпуклых

множеств, содержащих Y . Обозначим выпуклую оболочку Y через $\Delta_m = \Delta_m(Y)$.

Напомним определение вершины выпуклого множества:

Точка $y \in W$ называется вершиной (экстремальной точкой) сферически выпуклого множества W , если $W \setminus \{y\}$ является сферически выпуклым или, эквивалентно, не найдется точек x, z из W для которых y лежит внутри наименьшей дуги \widehat{xz} , соединяющей эти точки.

Теорема 1.2. *Пусть $Y = \{y_1, \dots, y_m\} \subset \mathbf{S}^{n-1}$ является сферическим ψ -кодом. Предположим $Y \subset \text{Cap}(e_0, \theta_0)$ и $0 < \theta_0 < \psi \leq \pi/2$. Тогда всякое y_k является вершиной Δ_m .*

Доказательство. Случаи $m = 1, 2$ не представляют трудности. Для случая $m = 3$ теорема легко может быть доказана от противного. В самом деле, предположим что одна из точек, например, y_2 не является вершиной Δ_3 . Тогда, во-первых, Δ_3 является дугой $\widehat{y_1 y_3}$ и, во-вторых, точка y_2 лежит на дуге $\widehat{y_1 y_3}$. Отсюда, поскольку Y - ψ -код, следует, что $\text{dist}(y_1, y_3) \geq 2\psi$. С другой стороны, из неравенства треугольника получаем

$$2\psi \leq \text{dist}(y_1, y_3) \leq \text{dist}(e_0, y_1) + \text{dist}(e_0, y_3) < 2\theta_0.$$

Это приводит к противоречию.

Нам осталось доказать теорему для $m \geq 4$.

В этой работе нам нужен только один факт из сферической тригонометрии - *теорема косинусов*:

$$\cos \phi = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi,$$

где для сферического треугольника ABC расстояния обозначены как $\text{dist}(A, B) = \theta_1$, $\text{dist}(A, C) = \theta_2$, $\text{dist}(B, C) = \phi$, и $\angle BAC = \varphi$.

По предположению:

$$\theta_k = \text{dist}(y_k, e_0) < \theta_0 < \psi \quad \text{для } 1 \leq k \leq m; \quad \phi_{k,j} := \text{dist}(y_k, y_j) \geq \psi, \quad k \neq j.$$

Давайте докажем, что не имеется точек y_k одновременно принадлежащих внутренности Δ_m и (относительной) внутренности одной из граней размерности d , $1 \leq d \leq \dim \Delta_m$. Предположим противное. Тогда рассмотрим большую $(n-2)$ -сферу Ω_k такую что $y_k \in \Omega_k$, и Ω_k ортогонально дуге $e_0 y_k$. (Заметим что $\theta_k > 0$. В противном случае, $y_k = e_0$ и $\phi_{k,j} = \theta_j \leq \theta_0 < \psi$.)

Сфера Ω_k разбивает \mathbb{S}^{n-1} на две замкнутые полусферы: H_1 и H_2 . Предположим, что e_0 лежит внутри H_1 , тогда, по крайней мере одна точка y_j лежит в H_2 . Рассмотрим треугольник $e_0 y_k y_j$ и обозначим через $\gamma_{k,j}$ угол $\angle e_0 y_k y_j$ в этом треугольнике. По теореме косинусов

$$\cos \theta_j = \cos \theta_k \cos \phi_{k,j} + \sin \theta_k \sin \phi_{k,j} \cos \gamma_{k,j}$$

Так как $y_j \in H_2$, получаем $\gamma_{k,j} \geq 90^\circ$, и $\cos \gamma_{k,j} \leq 0$ (Рис. 1.1). По условиям теоремы верны следующие неравенства

$$\sin \theta_k > 0, \quad \sin \phi_{k,j} > 0, \quad \cos \theta_k > 0, \quad \cos \theta_j > 0.$$

Следовательно, применяя теорему косинусов имеем

$$\cos \theta_j = \cos \theta_k \cos \phi_{k,j} + \sin \theta_k \sin \phi_{k,j} \cos \gamma_{k,j},$$

$$0 < \cos \theta_j \leq \cos \theta_k \cos \phi_{k,j}.$$

Из этих неравенств и $0 < \cos \theta_k < 1$ следует, во-первых,

$$0 < \cos \phi_{k,j} \quad \left(\text{т. е. } \psi \leq \phi_{k,j} < \pi/2 \right),$$

и, во-вторых, неравенства

$$\cos \theta_j < \cos \phi_{k,j} \leq \cos \psi.$$

Итак, $\theta_j > \psi$. Это противоречие завершает доказательство Теоремы 1.2. \square

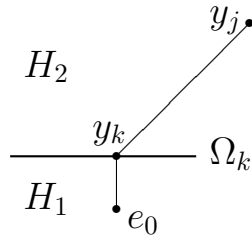


Рис. 1.1

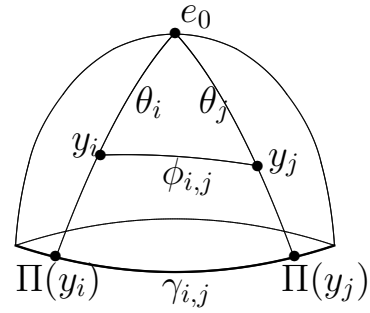


Рис. 1.2

1.3.4. Границы для μ .

Теорема 1.3. Пусть $Y = \{y_1, \dots, y_m\} \subset \mathbb{S}^{n-1}$ - сферический ψ -код. Предположим, что $Y \subset \text{Cap}(e_0, \theta_0)$, and $0 < \psi/2 \leq \theta_0 < \psi \leq \pi/2$. Тогда

$$m \leq A \left(n - 1, \arccos \frac{\cos \psi - \cos^2 \theta_0}{\sin^2 \theta_0} \right)$$

Доказательство. Несложно видеть, что условие $0 < \psi/2 \leq \theta_0 < \psi \leq \pi/2$ гарантирует, во-первых, что правая сторона неравенства в теореме корректно определена и, во-вторых, найдется Y у которого $m \geq 2$.

Если $m \geq 2$, то $y_i \neq e_0$. В противном случае, $\psi \leq \text{dist}(y_i, y_j) = \text{dist}(e_0, y_j) = \theta_j < \theta_0$ - противоречие. Следовательно, проекция Π из “северного полюса” e_0 , которая отображает $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ вдоль меридиана на “экватор” сферы, определена для всех y_i .

Обозначим $\gamma_{i,j} := \text{dist}(\Pi(y_i), \Pi(y_j))$ (см. Рис. 1.2). Тогда по теореме косинусов и неравенству $\cos \phi_{i,j} \leq z = \cos \psi$, получаем

$$\cos \gamma_{i,j} = \frac{\cos \phi_{i,j} - \cos \theta_i \cos \theta_j}{\sin \theta_i \sin \theta_j} \leq \frac{z - \cos \theta_i \cos \theta_j}{\sin \theta_i \sin \theta_j}$$

Пусть

$$R(\alpha, \beta) = \frac{z - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \text{то} \quad \frac{\partial R(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{\cos \beta - z \cos \alpha}{\sin^2 \alpha \sin \beta}.$$

По условию, $\theta_0 < \psi$. Следовательно, если $0 < \alpha, \beta < \theta_0$, то $\cos \beta > z$. Это влечет: $\partial R(\alpha, \beta)/\partial \alpha > 0$, т. е.. $R(\alpha, \beta)$ является монотонно-возрастающей функцией от α . Мы получили $R(\alpha, \beta) < R(\theta_0, \beta) = R(\beta, \theta_0) < R(\theta_0, \theta_0)$.

Следовательно,

$$\cos \gamma_{i,j} \leq \frac{z - \cos \theta_i \cos \theta_j}{\sin \theta_i \sin \theta_j} < \frac{z - \cos^2 \theta_0}{\sin^2 \theta_0} = \cos \delta.$$

Итак, $\Pi(Y)$ - δ -код на экваторе \mathbf{S}^{n-2} . Стало быть $m \leq A(n-1, \delta)$. \square

Следствие 1.1. *Предположим $f \in \Phi(t_0, z)$. Если $2t_0^2 > z + 1$, то $\mu(n, z, f) = 1$, в противном случае*

$$\mu(n, z, f) \leq A\left(n-1, \arccos \frac{z - t_0^2}{1 - t_0^2}\right),$$

Доказательство. Пусть $\cos \psi = z$, $\cos \theta_0 = t_0$. Тогда $2t_0^2 > z + 1$ если и только если $\psi > 2\theta_0$. Clearly that in this case the size of any Ясно что в этом случае мощность ψ -кода в шапочке $\text{Cap}(e_0, \theta_0)$ не больше 1. В противном случае, $\psi \leq 2\theta_0$ и это следствие следует из Теоремы 1.3. \square

Следствие 1.2. *Предположим, что $f \in \Phi(t_0, z)$. Тогда*

$$\mu(3, z, f) \leq 5.$$

Доказательство. Заметим, что

$$T = \frac{z - t_0^2}{1 - t_0^2} \leq \frac{z - z^2}{1 - z^2} = \frac{z}{1 + z} < \frac{1}{2}. \quad \text{Тогда } \delta = \arccos T > \pi/3.$$

Таким образом, $\mu(3, z, f) \leq A(2, \delta) \leq 2\pi/\delta < 6$. \square

Следствие 1.3. *Предположим, что $f \in \Phi(t_0, z)$.*

(i) *Если $t_0 > \sqrt{z}$, то $\mu(4, z, f) \leq 4$.*

(ii) *Если $z = 1/2$, $t_0 \geq 0.6058$, то $\mu(4, z, f) \leq 6$.*

Доказательство. Рассмотрим все множества X на \mathbb{S}^{k-1} , содержащих M точек. Пусть $\psi(X)$ - минимальное расстояние (в угловом измерении) между точками X . Обозначим через $\varphi_k(M)$ наибольшее $\psi(X)$. В размерности 3,

оптимальные конфигурации точек и величины $\varphi_3(M)$ в настоящий момент известны для всех $M \leq 13$ и $M = 24$ (см. [20, 43, 49, 62]). Шютте и ван дер Варден [49] доказали что

$$\varphi_3(5) = \varphi_3(6) = 90^\circ, \quad \cos \varphi_3(7) = \cot 40^\circ \cot 80^\circ, \quad \varphi_3(7) \approx 77.86954^\circ.$$

(i) Since $z - t_0^2 < 0$, Следствие 1.1 влечет: $\mu(4, z, f) \leq A(3, \delta)$, где $\delta > 90^\circ$. Мы получили, $\delta > \varphi_3(5)$. Таким образом, $\mu < 5$.

(ii) Заметим, что $t_0 \geq 0.6058$,

$$\arccos \frac{1/2 - t_0^2}{1 - t_0^2} > 77.87^\circ.$$

Тогда по Следствию 1.1 получим $\mu(4, 1/2, f) \leq A(3, 77.87^\circ)$. Так как $77.87^\circ > \varphi_3(7)$, то $A(3, 77.87^\circ) < 7$, т. е. $\mu \leq 6$. \square

1.3.5. Оптимизационная проблема. Пусть

$$t_0 := \cos \theta_0, \quad z := \cos \psi, \quad \cos \delta := \frac{z - t_0^2}{1 - t_0^2}, \quad \mu^* := A(n - 1, \delta).$$

Для заданных $n, \psi, \theta_0, f \in \Phi(t_0, z), e_0 \in \mathbf{S}^{n-1}$, и $m \leq \mu^*$, величина $h_m(n, z, f)$ является решением следующей оптимизационной проблемы на \mathbf{S}^{n-1} :

$$f(1) + f(-e_0 \cdot y_1) + \dots + f(-e_0 \cdot y_m) \Rightarrow \max$$

при ограничениях

$$y_i \in \mathbf{S}^{n-1}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{dist}(e_0, y_i) \leq \theta_0, \quad \text{dist}(y_i, y_j) \geq \psi, \quad i \neq j.$$

Размерность этой задачи равна $(n - 1)m \leq (n - 1)\mu^*$. Если μ^* - достаточно маленькое, то для маленьких n вычисление h_m будет относительно малоразмерной оптимизационной проблемой. Если дополнительно $f(t)$ является монотонно убывающей функцией на отрезке $[-1, -t_0]$, то в некоторых случаях задача может быть сведена к задаче размерности $(n - 1)$ и тогда она может быть решена численно.

1.4. Алгоритм вычисления подходящих многочленов.

В этом разделе приводится алгоритм вычисления “оптимальных” многочленов f для обобщения метода Дельсарта (см. раздел 1.3) таких что

- (i) $f(t)$ является монотонно убывающей функцией на интервале $[-1, -t_0]$,
- (ii) $f(t) \leq 0$ для всех $t \in [-t_0, z]$, $t_0 > z \geq 0$.

Этот алгоритм основан на наших представлениях о том каким являются оптимальные конфигурации точек y_i для заданного m . Коэффициенты c_k могут быть найдены с помощью линейного программирования, посредством дискретизации условий (i) и (ii). Похожий подход был применен Одлыжко и Слоэном [45] для нахождения подходящих многочленов для классического метода Дельсарта.

(Между тем, мы не умеем доказывать, что этот алгоритм при заданных t_0 и d находит f с наименьшим h_{max} .)

Пусть многочлен f представлен как разложение

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^d c_k G_k^{(n)}(t).$$

Рассмотрим следующие условия для f :

- (C1) $c_k \geq 0$, $1 \leq k \leq d$;
- (C2) $f(a) > f(b)$ для $-1 \leq a < b \leq -t_0$;
- (C3) $f(t) \leq 0$ для $-t_0 \leq t \leq z$.

Вообще говоря, нам не известно e_0 , где H_m достигает максимума. Поэтому, мы используем верхнюю оценку для h_m считая, что при $m \leq n$ точка $e_0 = y_c$, где y_c является центром правильного сферического симплекса Δ_m . Все вершины y_k симплекса Δ_m удалены от y_c на одинаковое расстояние ρ_m , где

$$\cos \rho_m = \sqrt{(1 + (m-1)z)/m}.$$

В случае $m = 2n-2$ в качестве Δ_m мы возьмем правильный $(n-1)$ -мерный кросс-политоп. Тогда

$$\cos \rho_m = \sqrt{z}.$$

Пусть $I_n = \{1, \dots, n\} \cup \{2n - 2\}$, $m \in I_n$, $b_m = -\cos \rho_m$. Тогда

$$H_m(y_c) = f(1) + mf(b_m).$$

Если F_0 является таким, что $H(y_0; Y) \leq E = F_0 + f(1)$, то

$$(C4) \quad f(b_m) \leq F_0/m, \quad m \in I_n.$$

Заметим, что $E = F_0 + 1 + c_1 + \dots + c_d = F_0 + f(1)$ является оценкой нижней границы h_{max} . Многочлен f , удовлетворяющий свойствам (C1-C4) и дающий наименьшее значение E может быть найден по следующему алгоритму.

Входные данные: n, z, t_0, d, N .

Выходные данные: c_1, \dots, c_d, F_0, E .

(1) На предварительном этапе заменим (C2) и (C3) конечным набором неравенств в точках

$$a_j = -1 + \epsilon j, \quad 0 \leq j \leq N, \quad \epsilon = (1 + z)/N :$$

(2) С помощью линейного программирования находим параметры F_0, c_1, \dots, c_d с целевой функцией

$$\tilde{E} = F_0 + \sum_{k=1}^d c_k \Rightarrow \min,$$

и с ограничениями

$$c_k \geq 0, \quad 1 \leq k \leq d; \quad \sum_{k=1}^d c_k G_k^{(n)}(a_j) \geq \sum_{k=1}^d c_k G_k^{(n)}(a_{j+1}), \quad a_j \in [-1, -t_0];$$

$$1 + \sum_{k=1}^d c_k G_k^{(n)}(a_j) \leq 0, \quad a_j \in [-t_0, z]; \quad 1 + \sum_{k=1}^d c_k G_k^{(n)}(b_m) \leq F_0/m, \quad m \in I_n.$$

Здесь $\tilde{E} = E - 1$.

Заметим еще раз, что $E \leq h_{max}$. Равенство $E = h_{max}$ выполняется только если $h_{max} = H_{m_0}(y_c)$ для некоторого $m_0 \in I_n$.

1.5. Оптимальные и неприводимые множества

1.5.1. Условие монотонности и оптимальные множества.

Определение 1.4. При заданных параметрах τ_0 z обозначим через $\Phi^*(\tau_0, z)$ класс функций из $\Phi(\tau_0, z)$ таких, что $f(t)$ является монотонно убывающей на интервале $[-1, -\tau_0]$ и $f(-1) > 0 > f(-\tau_0)$. Обозначим,

$$\Phi^*(z) := \bigcup_{\tau_0 > z} \Phi^*(\tau_0, z).$$

Если $f \in \Phi^*(z)$, то $t_0 = t_0(f) := \sup\{t \in [\tau_0, 1] : f(-t) < 0\}$.

Ясно, что если $f \in \Phi^*(z)$, то $f \in \Phi(t_0, z)$, т. е. $f(t) \leq 0$ для $t \in [-1, -t_0]$. Более того, если $f(t)$ - непрерывная функция на $[-1, -z]$, то $f(-t_0) = 0$.

Рассмотрим сферический ψ -код $Y = \{y_1, \dots, y_m\} \subset \text{Cap}(e_0, \theta_0) \subset \mathbf{S}^{n-1}$. Тогда у нас имеется ограничение: $\phi_{i,j} := \text{dist}(y_i, y_j) \geq \psi$ for all $i \neq j$.

Определение 1.5. Обозначим через $\Gamma_\psi(Y)$ граф, у которого множество вершин совпадает с Y и у которого все ребра $y_i y_j$ удовлетворяют равенству $\phi_{i,j} = \psi$.

Определение 1.6. Пусть $f \in \Phi^*(z)$, $\psi = \arccos(z)$, $\theta_0 = \arccos(t_0)$. Мы будем говорить, что ψ -код $Y = \{y_1, \dots, y_m\} \subset \text{Cap}(e_0, \theta_0) \subset \mathbf{S}^{n-1}$ является оптимальным для f , если $H_f(-e_0; Y) = h_m(n, z, f)$.

Если оптимальное множество Y не является единственным с точностью до изометрии, то мы назовем оптимальным Y у которого граф $\Gamma_\psi(Y)$ имеет наибольшее число.

Пусть $\theta_k := \text{dist}(y_k, e_0)$. Тогда $H(-e_0; Y)$ может быть представлено в форме:

$$F_f(\theta_1, \dots, \theta_m) := H_f(-e_0; Y) = f(1) + f(-\cos \theta_1) + \dots + f(-\cos \theta_m).$$

Будем называть $F(\theta_1, \dots, \theta_m) = F_f(\theta_1, \dots, \theta_m)$ эффективной функцией.

Ясно, что если $f \in \Phi^*(z)$, то эффективная функция является монотонно убывающей на интервале $[0, \theta_0]$ для любой переменной θ_k .

1.5.2. Неприводимые множества.

Определение 1.7. Пусть $0 < \theta_0 < \psi \leq \pi/2$. Назовем сферический ψ -код $Y = \{y_1, \dots, y_m\} \subset \text{Cap}(e_0, \theta_0) \subset \mathbf{S}^{n-1}$ неприводимым если ни одно y_k не может быть сдвинуто по направлению к e_0 (т. е. этот сдвиг уменьшает θ_k), а полученное, после сдвига, новое множество Y' остается по-прежнему ψ -кодом.

Как и выше, в случае когда неприводимое Y не является единственным с точностью до изометрии, то мы назовем Y неприводимым если его граф $\Gamma_\psi(Y)$ содержит максимально возможное число ребер.

Предложение 1.1. Let $f \in \Phi^*(z)$. Предположим, что $Y \subset \text{Cap}(e_0, \theta_0) \subset \mathbf{S}^{n-1}$ является оптимальным для f . Тогда Y - неприводимое множество.

Доказательство. Эффективная функция $F(\theta_1, \dots, \theta_m)$ возрастает, когда θ_k убывает. Отсюда следует, что y_k не может быть сдвинуто к e_0 . В противном случае, $H(-e_0; Y) = F(\theta_1, \dots, \theta_m)$ увеличивается, в то время как y_k приближается к e_0 . Это противоречит оптимальности множества Y . \square

Лемма 1.1. Если $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ - неприводимое множество, то

- (i) $e_0 \in \Delta_m =$ выпуклая оболочка Y ;
- (ii) Если $m > 1$, то $\deg y_i > 0$ для всех $y_i \in Y$, где $\deg y_i$ обозначает степень вершины y_i в графе $\Gamma_\psi(Y)$.

Доказательство. (i) В противном случае, все множество Y может быть сдвинуто к e_0 .

- (ii) Ясно, что если $\phi_{i,j} > \psi$ для всех $j \neq i$, то y_i может быть сдвинуто к e_0 . \square

Для $m = 1$ из леммы вытекает, что $e_0 = y_1$ и стало быть $h_1 = \sup\{F(\theta_1)\} = F(0)$. Таким образом,

$$h_1 = f(1) + f(-1). \quad (1.5.1)$$

Для $m = 2$, из леммы следует, что $\text{dist}(x_1, x_2) = \psi$, т. е.

$$\Delta_2 = y_1 y_2 \text{ является дугой длины } \psi. \quad (1.5.2)$$

Рассмотрим $\Delta_m \subset \mathbf{S}^{n-1}$ размерности k , $\dim \Delta_m = k$. Так как Δ_m - выпук-
 лое, то найдется k -мерная сфера большого радиуса \mathbf{S}^k in \mathbf{S}^{n-1} , содержащая
 Δ_m .

Заметим, что если $\dim \Delta_m = 1$, то $m = 2$. В самом деле, поскольку
 $\dim \Delta_m = 1$, то Y лежит на большой окружности \mathbf{S}^1 . Таким образом, мы
 получаем, что $m = 2$. (Например, $m > 2$ противоречит Теореме 1.2 для
 $n = 2$.)

Следующая техническая лемма для $n = 3, 4$ будет использована при до-
 казательстве основного результата этого раздела.

Лемма 1.2. *Рассмотрим на \mathbf{S}^{n-1} дугу ω длины ψ , $\psi \leq \pi/2$, и правильный
 симплекс Δ со стороной ψ . Предположим, что пересечение ω и Δ - не пу-
 сто. Тогда, по крайней мере, одно из расстояний между вершинами ω и Δ
 строго меньше чем ψ .*

Доказательство. Пусть $\omega = u_1u_2$ и $\Delta = v_1v_2 \dots v_k$. Тогда $\text{dist}(u_1, u_2) =$
 $\text{dist}(v_i, v_j) = \psi$.

Предположим противное и пусть $\text{dist}(u_i, v_j) \geq \psi$ для всех i и j . Обозначим
 через U объединение сферических шапочек с центрами в v_i , $i = 1, \dots, k$,
 и радиуса ψ . Пусть B будет границей U . Заметим, что u_1 и u_2 лежат вне U .
 Если $\{u'_1, u'_2\} = \omega \cap B$, то $\psi = \text{dist}(u_1, u_2) \geq \text{dist}(u'_1, u'_2)$, то $\omega' \cap \Delta \neq \emptyset$, где
 $\omega' = u'_1u'_2$.

Мы получили следующую оптимизационную задачу:

Найти дугу w_1w_2 минимальной длины, удовлетворяющую ограничениям
 $w_1, w_2 \in B$, и $w_1w_2 \cap \Delta \neq \emptyset$?

Нетрудно видеть, что $\text{dist}(w_1, w_2)$ достигает минимума, когда w_1 и w_2
 находятся на расстоянии ψ от множества вершин $\{v_i\}$, т. е. $w_1v_1 \dots v_k$ и
 $w_2v_1 \dots v_k$ являются правильными симплексами с общей гранью Δ . Использо-
 зую этот факт. прямыми вычислениями получаем, что

$$\cos \alpha = \frac{2kz^2 - (k-1)z - 1}{1 + (k-1)z}, \quad \alpha = \min \text{dist}(w_1, w_2), \quad z = \cos \psi \quad (1.5.3)$$

Из (1.5.3) следует, что $\cos \alpha \geq z$ (т. е. $\alpha \leq \psi$) если и только если $z \geq 1$ или $(k+1)z + 1 \leq 0$. Это противоречит предположению $0 \leq z < 1$. \square

1.5.3. Неприводимые множества на \mathbb{S}^2 . Здесь мы рассмотрим неприводимые множества для $n = 3$. В этом случае $\dim \Delta_m \leq 2$.

Теорема 1.4. *Предположим, что Y на \mathbb{S}^2 - неприводимо и $\dim(\Delta_m) = 2$. Тогда $3 \leq m \leq 5$, и Δ_m является сферическим правильным треугольником, ромбом или равносторонним пятиугольником со стороной ψ .*

Доказательство. Из Следствия 1.2 следует, что $m \leq 5$. С другой стороны, $m > 2$. Итак у нас всего 3 случая: $m = 3, 4, 5$.

По Теореме 1.2, Δ_m - выпуклый многоугольник с вершинами y_1, \dots, y_m . А из Леммы 1.1 следует, что $e_0 \in \Delta_m$ и $\deg y_i \geq 1$.

Во-первых, докажем, что если $\deg y_i \geq 2$ для всех i , то Δ_m является равносторонним m -угольником со стороной ψ .

Это очевидно для $m = 3$.

Лемма 1.2 влечет, что две диагонали Δ_m длины ψ не могут пересекаться. Из этого вытекает доказательство для $m = 4$.

При $m = 5$ нам надо рассмотреть только случай Δ_5 состоит из двух правильных не пересекающихся треугольников с одной общей вершиной (Рис. 1.3). Этот случай противоречит выпуклости Δ_5 . В самом деле, так как сумма углов сферического треугольника строго больше чем 180° и большая сторона треугольника лежит против большого угла, то $\angle y_i y_1 y_j > 60^\circ$. Тогда

$$180^\circ \geq \angle y_2 y_1 y_5 = \angle y_2 y_1 y_3 + \angle y_3 y_1 y_4 + \angle y_4 y_1 y_5 > 180^\circ$$

- противоречие.

Теперь мы будем доказывать, что $\deg y_i \geq 2$. Предположим, что $\deg y_1 = 1$, т. е. $\phi_{1,2} = \psi$, $\phi_{1,i} > \psi$ для $i = 3, \dots, m$. (Напомним, что $\phi_{i,j} = \text{dist}(y_i, y_j)$.) Если $e_0 \notin y_1 y_2$, то после достаточно маленького поворота y_1 вокруг y_2 по

направлению к e_0 (Рис. 1.4) расстояние θ_1 уменьшается - противоречие. (Это рассуждение будет подробно обсуждаться в Лемме 1.3.)

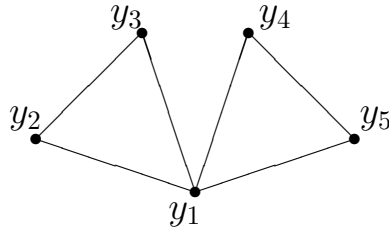


Рис. 1.3

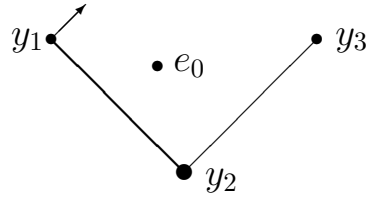


Рис. 1.4

Нам остается рассмотреть только случай: $e_0 \in y_1y_2$. Если $\phi_{i,j} = \psi$, где $i > 2$ или $j > 2$, то $e_0 \notin y_iy_j$. В противном случае, мы получим две пересекающиеся диагонали длины ψ . Поэтому, $\deg y_i \geq 2$ для $2 < i \leq m$. Для $m = 3, 4$ это влечет доказательство. Для $m = 5$ имеется случай когда $Q_3 = y_3y_4y_5$ - правильный треугольник со стороной ψ . Поскольку y_1y_2 не может пересекать Q_3 (иначе опять будут две пересекающиеся диагонали длины ψ), то y_1y_2 - сторона Δ_5 . В этом случае, как и выше, после достаточного малого поворота Q_3 вокруг y_2 к e_0 расстояния θ_i , $i = 3, 4, 5$, уменьшаются - противоречие. \square

1.5.4. Вращения и неприводимые множества в размерности n .

Рассмотрим вращение $R(\varphi, \Omega)$ на сфере \mathbb{S}^{n-1} вокруг $(n-3)$ -мерной большой сферы Ω в \mathbb{S}^{n-1} . Без ограничения общности, мы можем предположить, что

$$\Omega = \{\vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n : u_1 = u_2 = 0, u_1^2 + \dots + u_n^2 = 1\}.$$

Здесь $R(\varphi, \Omega)$ обозначает вращение на плоскости $\{u_i = 0, i = 3, \dots, n\}$ на угол φ вокруг центра Ω :

$$u'_1 = u_1 \cos \varphi - u_2 \sin \varphi, \quad u'_2 = u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi, \quad u'_i = u_i, \quad i = 3, \dots, n.$$

Пусть

$$H_+ = \{\vec{u} \in \mathbb{S}^{n-1} : u_2 \geq 0\}, \quad H_- = \{\vec{u} \in \mathbb{S}^{n-1} : u_2 \leq 0\},$$

$$Q = \{\vec{u} \in \mathbb{S}^{n-1} : u_2 = 0, u_1 > 0\}, \quad \bar{Q} = \{\vec{u} \in \mathbb{S}^{n-1} : u_2 = 0, u_1 \geq 0\}.$$

Заметим, что H_- and H_+ - замкнутые полусферы \mathbb{S}^{n-1} , $\bar{Q} = Q \cup \Omega$, и \bar{Q} является полусферой единичной сферы $\Omega_2 = \{\vec{u} \in \mathbb{S}^{n-1} : u_2 = 0\}$.

Лемма 1.3. *Рассмотрим две точки y и e_0 на сфере \mathbb{S}^{n-1} . Предположим $y \in Q$ и $e_0 \notin \bar{Q}$.*

Если $e_0 \in H_+$, то вращение $R(\varphi, \Omega)$ точки y на достаточно малый положительный угол φ уменьшает расстояние между y и e_0 .

Если $e_0 \in H_-$, то всякое вращение $R(\varphi, \Omega)$ точки y с достаточно малым отрицательным φ уменьшает расстояние между y и e_0 .

Доказательство. Обозначим через $y(\varphi)$ образ y после вращения. Пусть

$$y = (u_1, 0, u_3, \dots, u_n), \quad u_1 > 0; \quad e_0 = (v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Тогда

$$r(\varphi) := y(\varphi) \cdot e_0 = u_1 v_1 \cos \varphi + u_1 v_2 \sin \varphi + u_3 v_3 + \dots + u_n v_n.$$

Следовательно, $r'(\varphi) = -u_1 v_1 \sin \varphi + u_1 v_2 \cos \varphi$, т. е. $r'(0) = u_1 v_2$. Поэтому,

$$r'(0) > 0 \quad \text{iff} \quad v_2 > 0, \quad \text{i.e.} \quad e_0 \in \overset{\circ}{H}_+;$$

$$r'(0) < 0 \quad \text{iff} \quad v_2 < 0 \quad \text{i.e.} \quad e_0 \in \overset{\circ}{H}_-.$$

Это доказывает лемму для $v_2 \neq 0$. В случае $v_2 = 0$, по условию $e_0 \notin \bar{Q}$, поэтому $v_1 < 0$. Поскольку $r'(0) = 0$, и $r''(0) = -u_1 v_1 > 0$, то $\varphi = 0$ дает минимум для r . Лемма доказана. \square

Предложение 1.2. *Пусть Y неприводимо и $t = |Y| \geq n$. Предположим, что на сфере \mathbb{S}^{n-1} нет замкнутых больших полусфер \bar{Q} , содержащих $n - 1$ точку из Y и e_0 . Тогда степень всякой вершины графа $\Gamma_\psi(Y)$ не меньше, чем $n - 1$.*

Доказательство. Без потери общности, можно предположить, что

$$\phi_{1,i} = \psi, \quad i = 2, \dots, \deg y_1 + 1; \quad \phi_{1,i} > \psi, \quad i = \deg y_1 + 2, \dots, m.$$

Пусть $\deg y_1 < n - 1$. Тогда $\phi_{1,i} > \psi$ for $i = n, \dots, m$. Рассмотрим теперь большую сферу Ω размерности $(n - 3)$, лежащую в \mathbb{S}^{n-1} и содержащую точки y_2, \dots, y_{n-1} . Тогда Лемма 1.3 влечет, что вращение $R(\varphi, \Omega)$ с достаточно малым φ уменьшает θ_1 . Это противоречит неприводимости Y . \square

Предложение 1.3. *Если Y неприводимо, $|Y| = n$ и $\dim \Delta_n = n - 1$, то $\deg y_i = n - 1$ для всех $i = 1, \dots, n$. Другими словами, Δ_n - правильный симплекс со стороной ψ .*

Доказательство. Ясно, что Δ_n является сферическим симплексом. Пусть F_i обозначают его грани,

$$F_i := \text{conv} \{y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n\}.$$

Для $\sigma \subset I_n := \{1, \dots, n\}$

$$F_\sigma := \bigcap_{i \in \sigma} F_i.$$

Для $i \neq j$ мы утверждаем, что:

$$\text{Если } e_0 \notin F_{\{i,j\}}, \text{ то } \phi_{i,j} = \psi. \quad (1.5.4)$$

В противном случае, из Лемма 1.3 следует, что небольшое вращение $R(\varphi, \Omega_{ij})$ точки y_i (или y_j , если $e_0 \in F_i$) уменьшает θ_i (соответственно, θ_j), где Ω_{ij} - большая сфера размерности $(n - 3)$, содержащая $F_{\{i,j\}}$. Это противоречит неприводимости Y .

Получаем, что если не имеется пары $\{i, j\}$ такой, что $e_0 \in F_{\{i,j\}}$, то $\phi_{i,j} = \psi$ для всех i, j из I_n .

Предположим $e_0 \in F_\sigma$, где σ имеет максимальную мощность и $|\sigma| > 1$. Пусть $\bar{\sigma} = I_n \setminus \sigma$. Из (1.5.4) следует, что $\phi_{i,j} = \psi$ if $i \in \bar{\sigma}$ или $j \in \bar{\sigma}$. Стало быть, нам остается доказать, что $\phi_{i,j} = \psi$ for $i, j \in \sigma$.

Пусть Λ - пересечение сфер с центрами y_i , $i \in \bar{\sigma}$, и радиуса ψ . Тогда Λ - сфера в \mathbf{S}^{n-1} размерности $|\sigma| - 1$. Заметим, что F_σ = выпуклая оболочка $\{y_i : i \in \bar{\sigma}\}$, и для любой точки x из F_σ (в частности, для $x = e_0$) расстояние $\text{dist}(x, y)$ имеет одинаковое значение, зависящее только от x , на всем множестве $y \in \Lambda$. Тогда y_i , $i \in \sigma$, лежит в Λ на одинаковом расстоянии от e_0 . Не сложно видеть, что Y неприводимо если и только если y_i , $i \in \sigma$, в Λ - вершины правильного симплекса с ребрами длины ψ .

В итоге, мы получили, что все ребра Δ_n длины ψ как и требовалось. \square

Следствие 1.4. *Если $n > 3$, то Δ_4 - правильный тетраэдр со стороной ψ .*

Доказательство. Сначала покажем, что $\dim \Delta_4 = 3$. Если это не так, то $\dim \Delta_4 = 2$, и из Теоремы 1.4 следует, Δ_4 является ромбом. Предположим, что y_1y_3 - наименьшая диагональ Δ_4 . Тогда $\phi_{2,4} > \psi$ (см. Лемма 1.2). Давайте рассмотрим небольшой поворот грани $y_1y_2y_3$ вокруг y_1y_3 . Если $e_0 \notin y_1y_3$, то либо этот поворот уменьшает θ_4 (если $e_0 \in y_1y_2y_3$), либо θ_2 -противоречие.

В случае если $e_0 \in y_1y_3$, то любой поворот y_2 вокруг y_1y_3 уменьшает $\phi_{2,4}$ и не θ_2 . Очевидно, что найдется такой поворот, что $\phi_{2,4}$ станет равным ψ . Это также противоречит неприводимости Y .

\square

1.5.5. Неприводимые множества на сфере \mathbf{S}^3 .

Лемма 1.4. *Если $Y \subset \mathbf{S}^3$ неприводимо и $|Y| = 5$, то $\deg y_i \geq 3$ for all i .*

Доказательство. (1) Покажем, что $\dim \Delta_5 = 3$. В противном случае, $\dim \Delta_5 = 2$. Тогда из Теоремы 1.4 следует, что Δ_5 - выпуклый равносторонний пятиугольник со стороной ψ . Длины всех диагоналей этого пятиугольника строго больше ψ . Без ограничения общности, можно считать, что y_1y_3 - минимальная диагональ Δ_5 .

Предположим, что $e_0 \notin y_1y_3$. Если $e_0 \in y_1y_2y_3$, то достаточно малый поворот грани $y_1y_3y_4y_5$ вокруг y_1y_3 уменьшает θ_4 и θ_5 , иначе он уменьшает θ_2 ,

противоречие. В случае, $e_0 \in y_1y_3$ любой поворот y_2 вокруг y_1y_3 уменьшает $\phi_{2,k}$ для $k = 4, 5$, и не меняет θ_i . Найдется поворот такой что $\phi_{2,4}$ или $\phi_{2,5}$ станут равными ψ - противоречие.

В размерности 3 имеется только два комбинаторных типа выпуклых многогранников с 5 вершинами: (А) и (В) (Рис. 5). В случае (А), дуга y_3y_5 лежит внутри Δ_5 , и для (В): $y_2y_3y_4y_5$ является гранью Δ_5 .

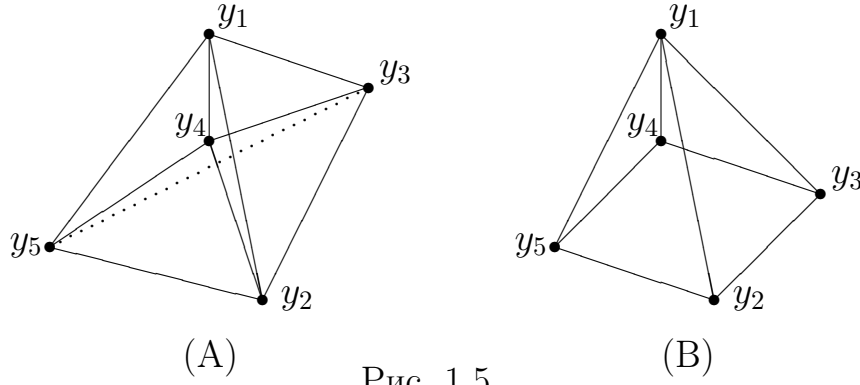


Рис. 1.5

(2) Обозначим через s_{ij} дугу y_iy_j , и через s_{ijk} обозначим дугу $y_iy_jy_k$. Пусть \tilde{s}_{ijk} - пересечение больших 2-полусфер Q_{ijk} и Δ_5 , где Q_{ijk} содержит y_i, y_j, y_k and bounded by the great circle passes through y_i, y_j, y_k и ограничено большой окружности проходящей через точки y_i и y_j . Предложение 1.2 влечет следующий факт: Если e_0 не лежит ни в одном \tilde{s}_{ijk} , то $\deg y_i \geq 3$ для всех i .

Таким образом, чтобы доказать лемму в полном объеме, нам остается рассмотреть все случаи $e_0 \in \tilde{s}_{ijk}$. Заметим, что для (А) $\tilde{s}_{ijk} \neq s_{ijk}$ имеется три случая: $i = 1, 2, 4$; где $j = 3, k = 5$, или $j = 5, k = 3$ ($\tilde{s}_{i35} = \tilde{s}_{i53}$).

(3) Из Леммы 1.1 следует, что $\deg y_k > 0$. Сейчас мы рассмотрим случаи $\deg y_k = 1, 2$.

Сначала покажем, что

Если $\deg y_k = 1, \phi_{k,l} = \psi$, то $e_0 \in s_{kl}$.

В самом деле, иначе найдется такая большая окружность Ω на сфере S^3 , что Ω содержит y_l , и большая сфера, содержащая Ω и y_k не проходит через e_0 . Но тогда Лемма 1.3 показывает, что поворот $R(\varphi, \Omega)$ точки y_k с достаточно малым φ уменьшает θ_k - противоречие.

Так как $\theta_0 < \psi$, то e_0 не может быть вершиной Δ_5 . Следовательно, e_0 лежит внутри s_{kl} . Отсюда вытекает, что если s_{ij} для всех j не пересекает s_{kl} , то $\deg y_i \geq 2$.

Подобными рассуждениями можно показать, что

Если $\deg y_k = 2$, $\phi_{k,i} = \phi_{k,j} = \psi$, то $e_0 \in \tilde{s}_{ijk}$.

(4) Теперь докажем, что $\deg y_k \geq 2$ для всех k . В противном случае, $\deg y_k = 1$, $e_0 \in s_{kl}$.

а). Во-первых, рассмотрим случай когда s_{kl} является "внешним" ребром многогранника Δ_5 . Для типа (А) это означает, что s_{kl} отличается от s_{35} , а для (В) - это не s_{35} или s_{24} . Так как Δ_5 выпукло, то существует такая большая 2-сфера Ω_2 , проходящая через y_k, y_l , что три остальные точки y_i, y_j, y_q лежат внутри полусферы H_+ ограниченной Ω_2 . Пусть ω большая окружность в Ω_2 , содержащая y_l и ортогональная дуге s_{kl} . Тогда (Лемма 1.3) найдется небольшой поворот y_i, y_j, y_q вокруг ω , который одновременно уменьшает $\theta_i, \theta_j, \theta_q$. Это противоречие.

б). Для типа (А), когда $\deg y_3 = 1$, $\phi_{3,5} = \psi$, $e_0 \in s_{35}$; мы утверждаем, что s_{124} - правильный треугольник со стороной ψ . В самом деле, из а) следует, что $\deg y_i \geq 2$ для $i = 1, 2, 4$. Более того, если $\deg y_i = 2$, то $e_0 = s_{35} \cap s_{124}$. Поэтому, в этом случае, $\phi_{1,2} = \phi_{1,4} = \phi_{2,4} = \psi$. Поскольку у дуги s_{35} и правильного треугольника s_{124} длины ребер равны ψ , то из Леммы 1.2 следует, что не менее одного $\phi_{i,j} < \psi$ - противоречие.

с). Теперь для типа (В) рассмотрим случай: $\deg y_3 = 1$, $\phi_{3,5} = \psi$, $e_0 \in s_{35}$. Тогда для y_2 , $\deg y_2 = 1$ только если $\phi_{2,4} = \psi$, $e_0 = s_{24} \cap s_{35}$; $\deg y_2 = 2$ только если $\phi_{2,4} = \phi_{2,5} = \psi$; и $\phi_{2,4} = \phi_{1,2} = \phi_{2,5} = \psi$ if $\deg y_2 = 3$. Таким образом, в этом случае мы имеем $\phi_{2,4} = \psi$ и две пересекающиеся диагонали s_{24}, s_{35} длины ψ . Но тогда Лемма 1.2 противоречит условию, что Y - ψ -код. Это противоречие доказывает, что $\deg y_k \geq 2$ для всех k .

(5) Наконец, докажем что $\deg y_k \geq 3$ для k . Будем доказывать это от про-

тивного. Тогда $\deg y_k = 2$, $e_0 \in \tilde{s}_{ijk}$, где $\phi_{k,i} = \phi_{k,j} = \psi$.

Случай грани: Пусть s_{ijk} - грань многогранника Δ_5 , и $e_0 \notin s_{ij}$. Используя похожие аргументы, как в (4а), где Ω_2 - большая сфера, содержащая s_{ijk} , ω - большая окружность, проходящая через y_i, y_j , доказывается, что существует сдвиг уменьшающий θ_ℓ, θ_q , где y_ℓ, y_q две другие точки из Y . Это противоречие.

Если $e_0 \in s_{ij}$, то любой поворот $s_{\ell q}$ вокруг Ω не меняет θ_ℓ и θ_q . Однако, если это поворот в положительном направлении, то он уменьшает $\phi_{k,\ell}$ и $\phi_{k,q}$. Ясно, что существует такой поворот, что $\phi_{k,\ell}$ и $\phi_{k,q}$ равны ψ , опять противоречие.

Нам осталось рассмотреть все случаи, когда s_{ijk} не является гранью. Здесь имеются следующие случаи: s_{124} , s_{135} (тип (А) и тип (В)), s_{234} (тип (В)).

Случай s_{124} : Тогда $\deg y_1 = 2$, $\phi_{1,2} = \phi_{1,4} = \psi$, $e_0 \in s_{124}$. Рассмотрим небольшой поворот y_3 вокруг s_{24} по направлению к y_1 . Если $e_0 \notin s_{24}$, то этот поворот уменьшает θ_3 . Следовательно, неприводимость влечет равенство $\phi_{3,5} = \psi$. В этом случае $e_0 \in s_{24}$, $\theta'_3 = \theta_3$, но $\phi_{1,3}$ уменьшается. Это опять влечет, что $\phi_{3,5} = \psi$. Так как s_{35} не может пересекать правильный треугольник s_{124} [см. Лемма 1.2, (4b)], то $\phi_{2,4} > \psi$. Тогда $\deg y_2 = \deg y_4 = 3$. (Поскольку $e_0 \in s_{124}$, $\deg y_2 = 2$ только если $\phi_{2,4} = \psi$.) Таким образом, у нас имеется три равнобедренных треугольника $s_{243}, s_{241}, s_{245}$. Используя этот факт и равенство $\phi_{3,5} = \psi$, мы получаем, что $\phi_{1,i} < \psi$ для $i = 3, 5$, - противоречие.

Случай s_{135} (тип (В)) эквивалентен случаю s_{124} .

Случай s_{135} (тип (А)): У этого случая два подслучая: \tilde{s}_{351} , \tilde{s}_{153} .

Рассмотрим подслучай \tilde{s}_{135} . Тогда $\deg y_1 = 2$, $\phi_{1,3} = \phi_{1,5} = \psi$, $e_0 \in \tilde{s}_{135}$. Если $e_0 \notin s_{135}$, то любой поворот y_1 вокруг s_{35} уменьшает θ_1 (Лемма 1.3). Поэтому, $e_0 \in s_{135}$. Ясно, что небольшой поворот y_2 вокруг s_{35} увеличивает $\phi_{2,4}$. С другой стороны, этот поворот уменьшает θ_2 (если $e_0 \notin s_{35}$) и $\phi_{1,2}$. Рассуждая, как выше, мы получим противоречие.

Подслучай \tilde{s}_{315} , где $\phi_{3,5} = \psi$, может быть доказан теми же аргументами что и случай s_{124} .

Случай s_{234} (тип (B)): У этого случая тоже два подслучая: \tilde{s}_{243} , \tilde{s}_{234} .

Не трудно видеть, что подслучай \tilde{s}_{243} следует из случая **грань**. А подслучай \tilde{s}_{234} может быть доказан аналогично подслучаю \tilde{s}_{135} .

Все случаи рассмотрены и доказательство завершено. \square

Лемма 1.4 утверждает, что степень любой вершины графа $\Gamma_\psi(Y)$ не меньше 3. Поскольку у этого графа 5 вершин, т. е. нечетное число, найдется по-крайней мере одна вершина степени 4. Имеется только один тип графа $\Gamma_\psi(Y)$, удовлетворяющий этим условиям (Рис. 1.6). Длины всех ребер Δ_5 , кроме y_2y_4 , y_3y_5 равны ψ . Для фиксированного $\phi_{2,4} = \alpha$, Δ_5 однозначно определен с точностью до изометрии. Следовательно, у нас имеется однопараметрическое семейство многогранников $P_5(\alpha)$ on \mathbb{S}^3 . Если $\phi_{3,5} \geq \phi_{2,4}$, то $z \geq \cos \alpha \geq 2z - 1$.

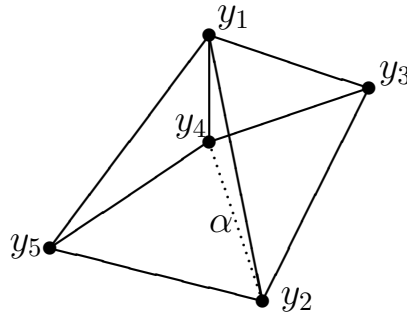


Рис 1.6: $P_5(\alpha)$

Из Теоремы 1.4, Следствия 1.4 и Леммы 1.4 следует:

Теорема 1.5. Пусть $Y \subset \mathbb{S}^3$ - неприводимое множество и $|Y| = m \leq 5$. Тогда Δ_m для $2 \leq m \leq 4$ является правильным симплексом с длиной ребра равным ψ , и Δ_5 изометрично $P_5(\alpha)$ для некоторого α из интервала $[\psi, \arccos(2z - 1)]$.

1.5.6. Оптимизационная задача. Мы знаем, что если Y является оптимальным, и то есть неприводимым, то для некоторых случаев (см. Теорему 1.5) расположение точек этого может быть найдено с точностью до изометрии. Для фиксированного $y_i \in \mathbb{S}^{n-1}$, $i = 1, \dots, m$; функция H зависит

только от положения точки $y = -y_0 = e_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$. Пусть

$$H_m(y) := f(1) + f(-y \cdot y_1) + \dots + f(-y \cdot y_m),$$

т. е. $H_m(y) = H(-y; Y)$.

Тогда h_m может быть найдено как решение $(n - 1)$ -мерной оптимизационной задачи:

$$h_m = \max_y \{H_m(y)\}$$

с ограничениями

$$y \in T(Y, \theta_0) := \{y \in \Delta_m \subset \mathbf{S}^{n-1} : y \cdot y_i \geq t_0, i = 1, \dots, m\}.$$

Мы рассмотрим эффективный численный метод решения этой задачи в следующем разделе.

1.6. Вычисление h_m .

В этом техническом разделе мы объясним как можно найти верхнюю границу для h_m for $n = 4, m \leq 6$. Отметим, что Теорема 1.5 позволяет свести вычисление h_m к маломерной оптимизационной задаче. В первой публикации по Теореме А, мы решали эту задачу численными методами [60]. Заметим, что эта оптимизационная задача не является выпуклой. В таком случае, (локальные) численные методы не могут гарантировать, что найденный экстремум является глобальным а не локальным. В принципе возможно, учитывая оценки производных, организовать вычислительный процесс так, чтобы найти и глобальный оптимум. Однако, такое решение очень трудно проверить и некоторые исследователи не принимают такие аргументы как доказательство. К счастью, используя геометрический подход и специфику задачи возможно свести решение задачи вычисления h_m к сравнительно простым и надежным вычислениям.

В этом разделе мы используем функцию $\tilde{f}(\theta)$, которая определяется для $f \in \Phi^*(z)$ как

$$\tilde{f}(\theta) := \begin{cases} f(-\cos \theta) & 0 \leq \theta \leq \theta_0 = \arccos t_0 \quad (\text{см. Определение 1.4}) \\ -\infty & \theta > \theta_0 \end{cases}$$

Так как $f \in \Phi^*(z)$, то $\tilde{f}(\theta)$ - монотонно убывающая функция от θ на интервале $[0, \theta_0]$.

1.6.1. Случай $m = 2$. Предположим, что $m = 2$ и Y является оптимальным для $f \in \Phi^*(z)$. Тогда $\Delta_2 = y_1 y_2$ - дуга длины ψ , $e_0 \in \Delta_2$, и $\theta_1 + \theta_2 = \psi$, где $\theta_i \leq \theta_0$ (см. Лемму 1.1 и (1.5.2)). Эффективная функция $F(\theta_1, \theta_2) = f(1) + \tilde{f}(\theta_1) + \tilde{f}(\theta_2)$ является симметрической функцией от θ_1, θ_2 .

Мы можем предположить что $\theta_1 \leq \theta_2$. Тогда $\theta_1 \in [\psi - \theta_0, \psi/2]$. Так как $\Theta_2(\theta_1) := \psi - \theta_1$ - монотонно убывающая функция, то $\tilde{f}(\Theta_2(\theta_1))$ - монотонно убывающая функция от θ_1 . Поэтому, для любой $\theta_1 \in [u, v] \subset [\psi - \theta_0, \psi/2]$ получаем

$$F(\theta_1, \theta_2) \leq \Phi_2([u, v]) := f(1) + \tilde{f}(u) + \tilde{f}(\psi - v).$$

Пусть $u_1 = \psi - \theta_0, u_2, \dots, u_N, u_{N+1} = \psi/2$ такие точки на $[\psi - \theta_0, \psi/2]$, что $u_{i+1} = u_i + \varepsilon$, где $\varepsilon = (\theta_0 - \psi/2)/N$. If $\theta_1 \in [u_i, u_{i+1}]$, тогда $h_2 = H(y_0; Y) = F(\theta_1, \theta_2) \leq \Phi_2([u_i, u_{i+1}])$. Таким образом,

$$h_2 \leq \lambda_2(N, \psi, \theta_0) := \max_{1 \leq i \leq N} \{\Phi_2(s_i)\}, \quad \text{где } s_i := [u_i, u_{i+1}].$$

Ясно, что $\lambda_2(N, \psi, \theta_0)$ стремится к h_2 в то время как $N \rightarrow \infty$ ($\varepsilon \rightarrow 0$).

Это влечет очень простой метод вычисления h_2 .

1.6.2. Функция Θ_k . Предположим, что мы знаем оптимальное $Y = \{y_1, \dots, y_m\} \subset \mathbf{S}^{n-1}$ с точностью до изометрии. Мы рассматриваем случай, когда $\dim \Delta_m = n - 1$, и $V :=$ выпуклая оболочка множества $\{y_1 \dots y_{n-1}\}$

является $(n - 2)$ -гранью Δ_m . Тогда $\text{rank}\{y_1, \dots, y_{n-1}\} = n - 1$, и Y принадлежит полусфере H_+ , где H_+ содержит Y и ограничено большой сферой \tilde{S} , проходящей через V .

Покажем, что любое $y = y_+ \in H_+$ однозначно определено множеством расстояний $\theta_i = \text{dist}(y, y_i)$, $i = 1, \dots, n - 1$. В самом деле, имеется не более двух решений: $y_+ \in H_+$ and $y_- \in H_-$ квадратного уравнения

$$y \cdot y = 1 \quad \text{with} \quad y \cdot y_i = \cos \theta_i, \quad i = 1, \dots, n - 1. \quad (1.6.1)$$

Заметим, что $y_+ = y_-$ если и только если $y \in \tilde{S}$.

Это влечет, что θ_k , $k \geq n$ определено θ_i , $i = 1, \dots, n - 1$;

$$\theta_k = \Theta_k(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}).$$

Уравнение (1.6.1) можно решить и это решение дает явные (хотя и громоздкие) выражения для Θ_k .

Например, пусть Δ_n - правильный симплекс со стороной $\pi/3$. (Нам нужен этот случай для $n = 3, 4$.) Тогда

$$\begin{aligned} \cos \theta_3 &= \cos \Theta_3(\theta_1, \theta_2) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \sqrt{6 - 8[\cos \theta_1 \cos \theta_2 + (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)^2]} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta_4 &= \cos \Theta_4(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{1}{4} \left(\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 + \right. \\ &\left. \sqrt{10} \sqrt{1 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_3 + \cos \theta_2 \cos \theta_3 - \frac{3}{2}(\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3)} \right). \end{aligned}$$

1.6.3. Экстремальные точки функции Θ_k на D . Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n-1})$, где $0 < a_i \leq \theta_0 < \psi$. (Напомним, что $\phi_{i,j} = \text{dist}(y_i, y_j)$; $\cos \psi = z$; $\cos \theta_0 = t_0$.) Теперь мы рассмотрим область $D(\mathbf{a})$ in H_+ , где

$$D(\mathbf{a}) = \{y \in H_+ : \text{dist}(y, y_i) \leq a_i, \quad 1 \leq i \leq n - 1\}.$$

Другими словами, $D(\mathbf{a})$ - пересечение замкнутых сферических шапочек $\text{Cap}(y_i, a_i)$ в H_+ :

$$D(\mathbf{a}) = \bigcap_{i=1}^{n-1} \text{Cap}(y_i, a_i) \cap H_+.$$

Предположим, $\dim D(\mathbf{a}) = n - 1$. Тогда у $D(\mathbf{a})$ имеются "вершины" "ребра и "k-границ" для $k \leq n - 1$. Действительно, пусть

$$\sigma \subset I := \{1, \dots, n - 1\}, \quad 0 < |\sigma| \leq n - 1;$$

$$\tilde{F}_\sigma := \{y \in D(\mathbf{a}) : \text{dist}(y, y_i) = a_i \ \forall i \in \sigma\}.$$

Несложно видеть, что $\dim \tilde{F}_\sigma = n - 1 - |\sigma|$; \tilde{F}_σ лежит на границе B области $D(\mathbf{a})$. Если $\sigma \subset \sigma'$, то $\tilde{F}_{\sigma'} \subset \tilde{F}_\sigma$. На самом деле, $D(\mathbf{a})$ - комбинаторно эквивалентно $(n - 1)$ -мерному симплексу.

Рассмотрим минимумы $\Theta_k(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ на $D(\mathbf{a})$ для $k \geq n$. Иными словами, мы ищем такую точку $p_k(\mathbf{a}) \in D(\mathbf{a})$, что

$$\text{dist}(y_k, p_k(\mathbf{a})) = \text{dist}(y_k, D(\mathbf{a})).$$

Поскольку, $\phi_{i,k} \geq \psi > \theta_0$, то все y_k лежат вне $D(\mathbf{a})$. Легко видеть, что Θ_k достигает минимума в некоторой точке на границе B . Следовательно, найдется такое $\sigma \subset I$, что

$$p_k(\mathbf{a}) \in \tilde{F}_\sigma \tag{1.6.2}$$

Предположим, что $\sigma = I$, тогда \tilde{F}_σ это вершина $D(\mathbf{a})$. Обозначим эту точку как $p_*(\mathbf{a})$. Заметим, что функция Θ_k в точке $p_*(\mathbf{a})$ равна $\Theta_k(\mathbf{a})$.

Пусть $\sigma_k(\mathbf{a})$ обозначает $\sigma \subset I$ максимального размера и такое что σ удовлетворяет (1.6.2). Тогда для $\sigma_k(\mathbf{a}) = I$, $p_k(\mathbf{a}) = p_*(\mathbf{a})$, и для $|\sigma_k(\mathbf{a})| < n - 1$, $p_k(\mathbf{a})$ принадлежит открытой части множества $\tilde{F}_{\sigma_k(\mathbf{a})}$.

Пусть $n = 3$. Здесь имеется два случая для $p_k(\mathbf{a})$ (см. Рис. 1.7): $p_3(\mathbf{a}) = p_*(\mathbf{a}) = \tilde{F}_{\{1,2\}}$, и $p_4(\mathbf{a})$ является пересечением в H_+ большой окружности, проходящей через y_1 , y_4 , и окружности $\tilde{S}(y_1, a_1)$ с центром в y_1 радиуса a_1 ($\tilde{F}_{\{1\}} \subset \tilde{S}(y_1, a_1)$).

Похожее верно для всех размерностей.

Обозначим через $S_\sigma(k)$ большую $|\sigma|$ -мерную сферу, проходящую через y_i , $i \in \sigma$, и y_k . Пусть $\tilde{S}(y_i, a_i)$ - сфера с центром в y_i радиуса a_i ; и для $\sigma \subset I$

$$\tilde{S}_\sigma := \bigcap_{i \in \sigma} \tilde{S}(y_i, a_i).$$

Пусть $s(\sigma, k)$ обозначает пересечение $S_\sigma(k)$ и \tilde{S}_σ в H_+ ,

$$s(\sigma, k) = S_\sigma(k) \cap \tilde{S}_\sigma \cap H_+$$

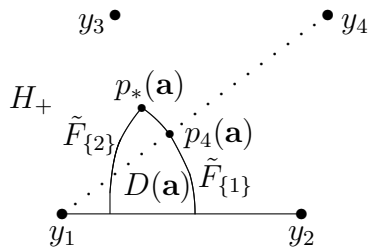


Рис. 1.7

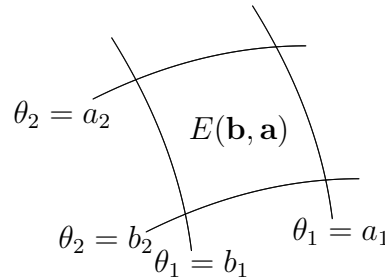


Рис. 1.8

Лемма 1.5. *Предположим, что $D(\mathbf{a}) \neq \emptyset$, $0 < a_i \leq \theta_0$ для всех i , и $k \geq n$.*

Тогда

- (i) $p_k(\mathbf{a}) \in s(\sigma_k(\mathbf{a}), k)$,
- (ii) если $s(\sigma, k) \neq \emptyset$, $|\sigma| < n - 1$, то $s(\sigma, k)$ состоит из одной точки $p_k(\mathbf{a})$.

Доказательство. (i) Пусть $\theta_k^* := \Theta_k(p_k(\mathbf{a})) = \text{dist}(y_k, p_k(\mathbf{a}))$. Так как минимум Θ_k находится в точке $p_k(\mathbf{a})$, то сфера $\tilde{S}(y_k, \theta_k^*)$ касается сферы $\tilde{S}_{\sigma(\mathbf{a})}$ в точке $p_k(\mathbf{a})$. Если некоторая сфера касается пересечения сфер, то точка касания лежит на большой сфере, проходящей через центры пересекающихся сфер. Итак, $p_k(\mathbf{a}) \in S_{\sigma(\mathbf{a})}(k)$.

(ii) Заметим, что $s(\sigma, k)$ принадлежит пересечению в H_+ сфер $S(y_i, a_i)$, $i \in \sigma$, и $S_\sigma(k)$. Любое пересечение сфер является тоже сферой. Поскольку,

$$\dim S_\sigma(k) + \dim \tilde{S}_\sigma = n - 1,$$

то это пересечение пусто или 0-мерная сфера, т. е. множество, состоящее из двух точек. В последнем случае, одна из точек лежит в H_+ , а другая в H_- .

Следовательно, $s(\sigma, k) = \emptyset$, или $s(\sigma, k) = \{p\}$. Пусть σ' обозначает $\sigma' \supset \sigma$ наибольшей мощности такое, что $s(\sigma', k) = \{p\}$. Поскольку $\tilde{S}(y_k, \text{dist}(y_k, p))$ касается $\tilde{S}_{\sigma'}$ в p , то $p = p_k(\mathbf{a})$. \square

Лемма 1.5 влечет простой метод вычисления минимума Θ_k на $D(\mathbf{a})$. Для этого надо рассмотреть $s(\sigma, k)$, $\sigma \subset I$. Если $s(\sigma, k) \neq \emptyset$, то $s(\sigma, k) = \{p_k(\mathbf{a})\}$, и поэтому Θ_k достигает минимума в этой точке. В случае, когда Δ_n это симплекс, мы можем найти минимум очень простым способом.

Следствие 1.5. *Предположим, что $|Y| = n$, $0 < a_i \leq \theta_0$ для всех i , и $D(\mathbf{a})$ лежит внутри Δ_n . тогда*

$$\theta_n \geq \Theta_n(a_1, \dots, a_{n-1}) \quad \text{для всех } y \in D(\mathbf{a}).$$

Доказательство. Ясно, что Δ_n является симплексом. Поскольку $D(\mathbf{a})$ лежит внутри Δ_n , то для $|\sigma| < n - 1$ пересечение \tilde{S}_σ и $S_\sigma(k)$ - пусто. Таким образом, $p_n(\mathbf{a}) = p_*(\mathbf{a})$. \square

1.6.4. Верхние границы для H_m . Предположим, что $\dim \Delta_m = n - 1$ и $y_1 \dots y_{n-1}$ является границей Δ_m . Тогда (см. 1.5.6 для определений H_m и $T(Y, \theta_0)$)

$$H_m(y) = F(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \Theta_n, \dots, \Theta_m) = \tilde{F}_m(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}_m(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) := & f(1) + \tilde{f}(\theta_1) + \dots + \tilde{f}(\theta_{n-1}) + \tilde{f}(\Theta_n(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})) + \dots \\ & + \tilde{f}(\Theta_m(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})). \end{aligned}$$

Лемма 1.6. *Предположим, что выполнены следующие условия (i) $f \in \Phi^*(z)$, (ii) $|Y| = m$, $\dim \Delta_m = n - 1$, (iii) $y_1 \dots y_{n-1}$ является гипергранью Δ_m , (iv) $\text{dist}(y_i, y_j) \geq \psi > \theta_0$ для $i \neq j$, (v) $0 \leq b_i < a_i \leq \theta_0$ для*

$i = 1, \dots, n - 1$; и $(\forall i) \Theta_k(\mathbf{a}) \leq \theta_0$ для всех $k \geq n$. Тогда, если $D(\mathbf{a}) \neq \emptyset$, то

$$H_m(y) \leq \Phi_Y(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \quad \text{for any } y \in E(\mathbf{b}, \mathbf{a}) := D(\mathbf{a}) \setminus U(\mathbf{b}),$$

где

$$\Phi_Y(\mathbf{b}, \mathbf{a}) := f(1) + \tilde{f}(b_1) + \dots + \tilde{f}(b_{n-1}) + \tilde{f}(\Theta_n(p_n(\mathbf{a}))) + \dots + \tilde{f}(\Theta_m(p_m(\mathbf{a}))),$$

$$U(\mathbf{b}) := \bigcup_{i=1}^{n-1} \text{Cap}(y_i, b_i).$$

Доказательство. Поскольку, $1 \leq i \leq n - 1$ и $y \in E(\mathbf{b}, \mathbf{a}) : \theta_i \geq b_i$ (Рис. 1.8), то из условия монотонности следует $\tilde{f}(\theta_i) \leq \tilde{f}(b_i)$. С другой стороны, $y \in D(\mathbf{a})$. Тогда Лемма 1.5 влечет $\tilde{f}(\theta_k) \leq \tilde{f}(\Theta_k(p_k(\mathbf{a})))$ для $k \geq n$. \square

Из Следствия 1.5 и Леммы 1.6 вытекает

Следствие 1.6. Пусть $|Y| = n$. Предположим, что f , \mathbf{a} , \mathbf{b} , и Y удовлетворяют условиям Леммы 1.6 и Следствия 1.5. Тогда для любого $y \in E(\mathbf{b}, \mathbf{a})$:

$$H_m(y) \leq f(1) + \tilde{f}(b_1) + \dots + \tilde{f}(b_{n-1}) + \tilde{f}(\Theta_n(\mathbf{a})).$$

Пусть $K(n, \theta_0) := [0, \theta_0]^{n-1}$, т. е. $K(n, \theta_0)$ - $(n - 1)$ -мерный куб со стороной длины θ_0 . Рассмотрим для $K(n, \theta_0)$ кубическую решетку $L(N)$ с шагом ε , где $\varepsilon = \theta_0/N$ для данного положительного целого N . Тогда эта решетка (разбиение) $L(N)$ содержит N^{n-1} ячеек. Всякая ячейка $c \in L(N)$ является $(n - 1)$ -мерным кубом со стороной ε , и для любой точки $(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ из c верно, что

$$b_i(c) \leq \theta_i \leq a_i(c), \quad a_i(c) = b_i(c) + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

Пусть $\tilde{L}(N)$ обозначает множество таких ячеек c из $L(N)$, что $D(\mathbf{a}(c)) \neq \emptyset$. Существует $c \in \tilde{L}(N)$ такое что H_m максимума на $T(Y, \theta_0)$ в некоторой точке из $E(\mathbf{b}(c), \mathbf{a}(c))$. Тогда Лемма 1.6 влечет

Лемма 1.7. *Предположим, что f и Y удовлетворяют условиям Леммы 1.6, N - положительное целое и $y \in \Delta_m$ такое что $\text{dist}(y, y_i) \leq \theta_0$ для всех i . Тогда*

$$H_m(y) \leq \max_{c \in \tilde{L}(N)} \{\Phi_Y(\mathbf{b}(c), \mathbf{a}(c))\}$$

1.6.5. Верхние границы для h_m . Предположим, что Δ_m - правильный симплекс со стороной ψ . Тогда эффективная функция F является симметрической функцией от переменных $\theta_1, \dots, \theta_m$. Рассмотрим эту функцию на области

$$\Lambda := \{y \in \Delta_m : \psi - \theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_m \leq \theta_0\}.$$

Пусть $L_\Lambda(N)$ - множество ячеек c в $\tilde{L}(N)$ таких что $c \cap \Lambda \neq \emptyset$. Если $c \in L_\Lambda(N)$ такое что $E(\mathbf{b}(c), \mathbf{a}(c))$ лежит внутри Δ_m , то у явное выражение для $\Phi_m(c) := \Phi_Y(\mathbf{b}(c), \mathbf{a}(c))$ (см. Следствие 1.6). Для $n = 4$, Теорема 1.5 влечет, что Δ_m является правильным симплексом с $m = 2, 3, 4$. Таким образом, из Леммы 1.7 следует неравенство

$$h_m \leq \lambda_m(N, \psi, \theta_0) := \max_{c \in L_\Lambda(N)} \{\Phi_m(c)\}.$$

Рассмотрим теперь случаи $n = 4$, $m = 5$. Из Теоремы 1.5 вытекает: Δ_5 - изометрично $P_5(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in [\psi, \psi' := \arccos(2z - 1)]$ (см. Рис. 1.6). Зафиксируем вершины y_1, y_2, y_3 многогранника $P_5(\alpha)$. Тогда вершины $y_4(\alpha)$, $y_5(\alpha)$ однозначно определяются величиной α .

Заметим, что для любого $y \in D(\theta_0, \theta_0, \theta_0)$ расстояние $\theta_4(\alpha) := \text{dist}(y, y_4(\alpha))$ увеличивается, а $\theta_5(\alpha)$ уменьшается, когда α уменьшается. Пусть $\alpha_1 = \psi$, $\alpha_2, \dots, \alpha_N$, $\alpha_{N+1} = \psi'$ такие точки на интервале $[\psi, \psi']$, что $\alpha_{i+1} = \alpha_i + \epsilon$, where $\epsilon = (\psi' - \psi)/N$. Тогда

$$\theta_4(\alpha_i) < \theta_4(\alpha_{i+1}), \quad \theta_5(\alpha_i) > \theta_5(\alpha_{i+1}),$$

СТАЛО БЫТЬ

$$\tilde{f}(\theta_4(\alpha_i)) > \tilde{f}(\theta_4(\alpha_{i+1})), \quad \tilde{f}(\theta_5(\alpha_i)) < \tilde{f}(\theta_5(\alpha_{i+1})).$$

Комбинируя это с Леммой 1.7 получим

$$h_5 \leq \lambda_5(N, \psi, \theta_0) := f(1) + \max_{c \in \tilde{L}(N)} \{R_{1,2,3}(c) + \max_{1 \leq i \leq N} \{R_{4,5}(c, i)\}\},$$

$$R_{1,2,3}(c) = \tilde{f}(b_1(c)) + \tilde{f}(b_2(c)) + \tilde{f}(b_3(c)),$$

$$R_{4,5}(c, i) = \tilde{f}(\Theta_4(p_4(\mathbf{a}(c), \alpha_i))) + \tilde{f}(\Theta_5(p_5(\mathbf{a}(c), \alpha_{i+1}))),$$

где $p_k(\mathbf{a}, \alpha) = p_k(\mathbf{a})$ с $y_k = y_k(\alpha)$.

Тогда $\lambda_m(N+1, \psi, \theta_0) \leq \lambda_m(N, \psi, \theta_0)$ и

$$h_m = \lambda_m(\psi, \theta_0) := \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_m(N, \psi, \theta_0).$$

Рассмотрим сейчас последний случай: $n = 4$, $m = 6$. Здесь мы получим верхнюю границу для h_6 методом отличным от предыдущего.

Лемма 1.8. Пусть $n = 4$, $f \in \Phi^*(z)$, $\sqrt{z} > t_0 > z$, $\theta'_0 \in [\arccos \sqrt{z}, \theta_0]$.

Тогда

$$h_6 \leq \max \{ \tilde{f}(\theta'_0) + \lambda_5(\psi, \theta_0), f(-\sqrt{z}) + \lambda_5(\psi, \theta'_0) \}.$$

Доказательство. Пусть $Y = \{y_1, \dots, y_6\} \subset C(e_0, \theta_0) \subset \mathbf{S}^3$, где Y - оптимальный ψ -код. Мы можем предположить, что $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_6$. Тогда из Следствия 1.3(i) вытекает, что

$$\theta_0 \geq \theta_6 \geq \theta_5 \geq \arccos \sqrt{z}.$$

Рассмотрим два случая: (а) $\theta_0 \geq \theta_6 \geq \theta'_0$, (б) $\theta'_0 \geq \theta_6 \geq \arccos \sqrt{z}$.

(а) Здесь $h_6 = H(y_0; y_1, \dots, y_6) = H(y_0; y_1, \dots, y_5) + \tilde{f}(\theta_6)$,

$$H(y_0; y_1, \dots, y_5) \leq h_5 = \lambda_5(\psi, \theta_0), \quad \tilde{f}(\theta_6) \leq \tilde{f}(\theta'_0).$$

Тогда $h_6 \leq \tilde{f}(\theta'_0) + \lambda_5(\psi, \theta_0)$.

(б) В этом случае все $\theta_i \leq \theta'_0$, т. е. $Y \subset C(e_0, \theta'_0)$. Поскольку

$$H(y_0; y_1, \dots, y_5) \leq \lambda_5(\psi, \theta'_0), \quad \tilde{f}(\theta_6) \leq f(-\sqrt{z}),$$

то $h_6 \leq f(-\sqrt{z}) + \lambda_5(\psi, \theta'_0)$. □

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.6. *Предположим, что $n = 4$, $f \in \Phi^*(z)$, $\sqrt{z} > t_0 > z > 0$, и N - положительное целое. Тогда*

- (i) $h_0 = f(1)$, $h_1 = f(1) + f(-1)$;
- (ii) $h_m = \lambda_m(\psi, \theta_0) \leq \lambda_m(N, \psi, \theta_0)$ для $2 \leq m \leq 5$;
- (iii) $h_6 \leq \max \{ \tilde{f}(\theta'_0) + \lambda_5(\psi, \theta_0), f(-\sqrt{z}) + \lambda_5(\psi, \theta'_0) \} \forall \theta'_0 \in [\arccos \sqrt{z}, \theta_0]$.

1.7. Доказательство Леммы А2.

Сначала докажем, что $f_4 \in \Phi^*(1/2)$ (см. Рис. 1.9). В самом деле, у многочлена f_4 имеется два корня на отрезке $[-1, 1]$: $t_1 = -t_0$, $t_0 \approx 0.60794$, $t_2 = 1/2$; $f_4(t) \leq 0$ для $t \in [-t_0, 1/2]$, и f_4 является монотонно убывающей функцией $[-1, -t_0]$. Последнее свойство выполняется потому, что у производной $f'_4(t)$ нет корней на отрезке $[-1, -t_0]$. Таким образом, $f_4 \in \Phi^*(1/2)$.

Поскольку $t_0 > 0.6058$, то Следствие 1.3(ii) дает $\mu \leq 6$. Для вычисления верхних границ для h_m применим Теорему 1.6 с $\psi = \arccos z = 60^\circ$, $\theta_0 = \arccos t_0 \approx 52.5588^\circ$ Получим

$$h_0 = f(1) = 18.774, \quad h_1 = f(1) + f(-1) = 24.48.$$

H_2 достигает максимума при $\theta_1 = 30^\circ$. Тогда

$$h_2 = f(1) + 2f(-\cos 30^\circ) \approx 24.8644.$$

Для $m = 3$ получаем, что

$$h_3 = \lambda_3(60^\circ, \theta_0) \approx 24.8345$$

при $\theta_3 = \theta_0$, $\theta_1 = \theta_2 \approx 30.0715^\circ$.

Многочлен H_4 достигает максимума

$$h_4 \approx 24.818$$

в точке с $\theta_1 = \theta_2 \approx 30.2310^\circ$, $\theta_3 = \theta_4 \approx 51.6765^\circ$, и

$$h_5 \approx 24.6856$$

при $\alpha = 60^\circ$, $\theta_1 \approx 42.1569^\circ$, $\theta_2 = \theta_4 = 32.3025^\circ$, $\theta_3 = \theta_5 = \theta_0$.

Пусть $\theta'_0 = 50^\circ$. Тогда $\tilde{f}(50^\circ) \approx 0.0906$, $\arccos \sqrt{z} = 45^\circ$, $\tilde{f}(45^\circ) \approx 0.4533$,

$$\lambda_5(60^\circ, \theta_0) = h_5 \approx 24.6856, \quad \lambda_5(60^\circ, 50^\circ) \approx 23.9181,$$

$$h_6 \leq \max \{ \tilde{f}(50^\circ) + h_5, \tilde{f}(45^\circ) + \lambda_5(60^\circ, 50^\circ) \} \approx 24.7762 < h_2.$$

Таким образом, $h_{max} = h_2 < 25$. В силу (1.4.2), получаем $S(X) < 25M$.

Лемма доказана.

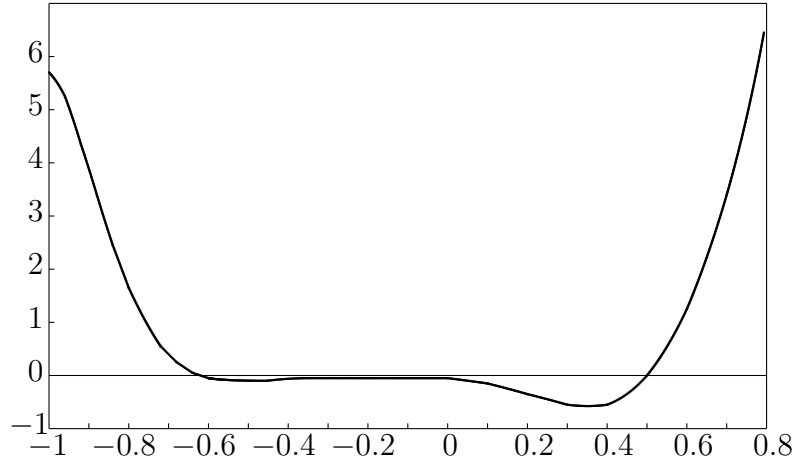


Рис. 1.9. График функции $y = f_4(t)$

1.8. Проблема тринадцати шаров.

В этом параграфе мы вкратце остановимся на нашем решении проблемы тринадцати шаров (Теорема В). Здесь мы разберем только план доказательства, опуская технические детали. Подробное доказательство Теоремы В, содержится в нашей работе [36]. Доказательство основной Леммы В2 технически проще, чем доказательство Леммы А2, приведенное в предыдущем параграфе. Здесь мы не будем ссылаться на теоремы из предыдущих параграфов и тем самым сделаем этот текст независимым.

При $n = 3$ многочлены Гегенбауера $G_k^{(3)}$ являются *многочленами Лежандра* P_k , т. е. $P_k = G_k^{(3)}$. Эти многочлены можно определить как рекуррентно, так и по формуле Родригеса:

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k.$$

Итак, мы рассматриваем следующий многочлен:

$$f_3 = f(t) = \frac{2431}{80}t^9 - \frac{1287}{20}t^7 + \frac{18333}{400}t^5 + \frac{343}{40}t^4 - \frac{83}{10}t^3 - \frac{213}{100}t^2 + \frac{t}{10} - \frac{1}{200}.$$

Лемма В1 утверждает: Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{S}^2$. Тогда

$$S(X) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\cos(\phi_{i,j})) \geq n^2.$$

Здесь, как и выше, $\phi_{i,j} = \text{dist}(x_i, x_j)$ обозначает сферическое (угловое) расстояние между x_i и x_j .

Доказательство. Разложим f по P_k :

$$f = \sum_{k=0}^9 c_k P_k = P_0 + \frac{8}{5}P_1 + \frac{87}{25}P_2 + \frac{33}{20}P_3 + \frac{49}{25}P_4 + \frac{1}{10}P_5 + \frac{8}{25}P_9.$$

Здесь $c_0 = 1$, $c_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, 9$. Из неравенства Дельсарта получаем

$$S(X) = \sum_{k=0}^9 c_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_k(\cos(\phi_{i,j})) \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_0 P_0 = n^2.$$

□

Теперь обратимся к Лемме В2: Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ точки на \mathbb{S}^2 угловое расстояние $\phi_{i,j}$ между различными x_i, x_j не меньше 60° . Тогда

$$S(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\cos(\phi_{i,j})) < 13n.$$

Сначала, покажем как доказывать Теорему В: $k(3) = 12$.

Доказательство. Предположим $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ такое расположение точек на \mathbb{S}^2 при котором $n = k(3)$. Тогда X удовлетворяет предположениям в леммах. Стало быть, $n^2 \leq S(X) < 13n$. Отсюда $n < 13$, т. е. $n \leq 12$. С другой стороны мы знаем, что $k(3) \geq 12$, т. е. $n = k(3) = 12$. \square

План доказательства Леммы B2. 1. Многочлен $f(t)$ для $t_0 \approx 0.5907$ удовлетворяет следующим свойствам (см. Рис. 1.10):

(i) $f(t)$ — монотонно убывающая функция на отрезке $[-1, -t_0]$.

(ii) $f(t) < 0$ при $t \in (-t_0, 1/2]$ и $f(-t_0) = 0$.

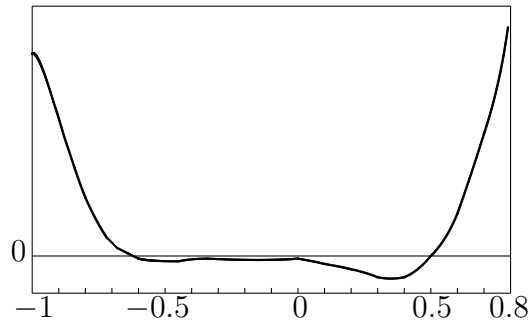


Рис. 1.10 График функции $f(t)$

Пусть $S_i(X) := \sum_{j=1}^n f(\cos(\phi_{i,j}))$, тогда $S(X) = \sum_{i=1}^n S_i(X)$. Покажем, что $S_i(X) < 13$ при $i = 1, 2, \dots, n$, отсюда будет следовать, что $S(X) < 13n$.

Поскольку $\phi_{i,i} = 0$, то $f(\cos \phi_{i,i}) = f(1)$. По условию: $\phi_{i,j} \geq 60^\circ$, $i \neq j$, и получаем, что $\cos \phi_{i,j} \leq 1/2$ и $\cos \phi_{i,j}$ лежит на отрезке $[-1, 1/2]$. Из (ii) следует, что $f(\cos \phi_{i,j}) \leq 0$ при $\cos \phi_{i,j} \in [-t_0, 1/2]$. Обозначим $J(i) := \{j : \cos \phi_{i,j} \in [-1, -t_0]\}$. Мы получили неравенство

$$S_i(X) \leq T_i(X) := f(1) + \sum_{j \in J(i)} f(\cos \phi_{i,j}).$$

Пусть $\theta_0 = \arccos t_0 \approx 53.794^\circ$. Тогда $j \in J(i)$ если и только если $\phi_{i,j} > 180^\circ - \theta_0$, т. е. $\theta_j < \theta_0$, где $\theta_j = 180^\circ - \phi_{i,j}$. Другими словами, все $x_{i,j}$, $j \in J(i)$, лежат внутри сферической шапочки с центром e_0 радиуса θ_0 , где $e_0 = -x_i$ является антиподом точки x_i .

2. Рассмотрим теперь на \mathbb{S}^2 такие точки e_0, y_1, \dots, y_m , что

$$\phi_{i,j} := \text{dist}(y_i, y_j) \geq 60^\circ, \quad \forall i \neq j, \quad \theta_i := \text{dist}(e_0, y_i) < \theta_0. \quad (1.8.1)$$

Обозначим через μ наибольшую величину m такую что неравенства в (1.8.1) определяют не пустое множество точек y_1, \dots, y_m .

Предположим, что $0 \leq m \leq \mu$ и $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ удовлетворяют (1.8.1). Введем обозначения:

$$H(Y) = H(y_1, \dots, y_m) := f(1) + f(-\cos \theta_1) + \dots + f(-\cos \theta_m),$$

$$h_m := \sup_Y \{H(Y)\}, \quad h_{max} := \max \{h_0, h_1, \dots, h_\mu\}.$$

По определению, $T_i(X) \leq h_m$, где $m = |J(i)|$ и, следовательно, $S_i(X) \leq h_m$. Таким образом, если мы докажем неравенство $h_{max} < 13$, то мы докажем и лемму.

3. Теперь покажем что $\mu \leq 4$.

Предположим, что $Y = \{y_1, \dots, y_m\} \subset \mathbb{S}^2$ удовлетворяет (1.8.1). Можно считать, что e_0 — северный полюс на сфере и у y_j сферические координаты (θ_j, φ_j) . Заметим, что $\theta_i > 0$ при $m \geq 2$. В противном случае, расстояние от y_j до всех точек шапочки будет меньше 60° , а значит в ней не могут находиться точки из $J(j)$. Тогда, используя методы элементарной сферической геометрии (сферическую теорему косинусов или неравенство «напротив большего угла лежит большая сторона треугольника»), можно показать, что расстояния между точками с координатами (θ_j, φ_j) и (θ_k, φ_k) будет не больше расстояния между точками (θ_0, φ_j) и (θ_0, φ_k) . Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что все точки y_j лежат на «краю шапочки», то есть окружности с центром e_0 и радиусом θ_0 .

Но на такой окружности, можно расположить не более четырех точек с по-парным расстоянием не меньшим 60° .

4. Итак, мы должны доказать неравенство

$$h_{max} = \max \{h_0, h_1, h_2, h_3, h_4\} < 13.$$

Несложно видеть, что

$$h_0 = f(1) = 10.11 < 13.$$

Из (i) вытекает что $f(-\cos \theta)$ является монотонно убывающей функцией от $\theta \in [0, \theta_0]$. Тогда, при $m = 1$: $H(y_1) = f(1) + f(-\cos \theta_1)$ достигает максимума при $\theta_1 = 0$. Отсюда

$$h_1 = f(1) + f(-1) = 12.88 < 13.$$

5. Пусть $m = 2, 3, 4$. Рассмотрим оптимальные расположения точек $\{e_0, y_1, \dots, y_m\}$ на \mathbb{S}^2 , которые задают равенства $H(Y) = h_m$.

Заметим, что y_k не могут быть сдвинуты по направлению к e_0 , т. к. иначе $H(Y)$ увеличится. Используя это наблюдение и еще некоторые несложные геометрические рассуждения, можно показать, что:

при $m = 2$, $e_0 \in y_1 y_2$ и $\text{dist}(y_1, y_2) = 60^\circ$,

при $m = 3$, треугольник $\Delta_3 := y_1 y_2 y_3$ — равносторонний с длиной стороны 60° . Как и выше, $e_0 \in \Delta_3$,

при $m = 4$, $\Delta_4 := y_1 y_2 y_3 y_4$ — ромб со стороной 60° и $e_0 \in \Delta_4$.

6. Пункт **5** показывает, что для нахождения $h_m, m = 2, 3, 4$, мы должны найти максимум функции $H(Y)$ на отрезке $[0, 60^\circ]$ ($m = 2$), равностороннем треугольнике Δ_3 ($m = 3$) и ромбе Δ_4 ($m = 4$). Для этого можно использовать стандартные численные методы. Вычисления показывают, что $h_2 \approx 12.8749, h_3 \approx 12.8721, h_4 \approx 12.4849$, т. е. во всех трех случаях $h_m < h_1 = 12.88 < 13$. (Как мы показали выше эти вычисления, в худшем случае, сводятся к вычислению максимумов функций от одной переменной.) Итак, $h_m < 13$ для всех m , как и требовалось. \square

ГЛАВА 2

ПРОБЛЕМА ОДНОСТОРОННИХ КОНТАКТНЫХ ЧИСЕЛ В РАЗМЕРНОСТИ 4 И КОДЫ В СФЕРИЧЕСКИХ ШАПОЧКАХ.

2.1. Одностороннее контактное число в размерности 3.

Пусть H - замкнутое полупространство в \mathbb{R}^n . Предположим, что S это единичная сфера в H , которая касается опорной гиперплоскости, задающей H . Односторонним контактным числом $B(n)$ называют наибольшее число не пересекающихся единичных шаров в H , которые все касаются S .

Задача нахождения величины $B(3)$ была поставлена Л. Фейешем Тотом и Х. Саксом в 1976 году [26].

К. Бездек и П. Брасс [10] рассматривали эту задачу в более общей постановке. Они ввели термин “одностороннее число Хадвигера”, которое в случае шаров совпадает с “односторонним контактным числом”. Этот термин был введен позднее К. Бездеком в работах [8, 9].

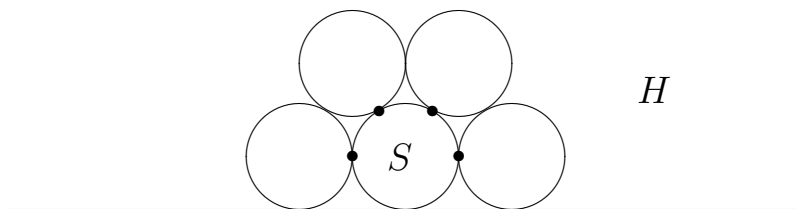


Рис. 2.1

Если M единичных шаров в $H \subset \mathbb{R}^n$ касаются единичного шара S , то множество точек касания образует такую конфигурацию на полусфере S_+ сферы S , что евклидовы расстояния между точками не менее 1. Поэтому, проблема одностороннего контактного числа может быть поставлена следующим образом: Как много точек может быть размещено на полусфере S_+ , чтобы угловые расстояния между этими точками были бы не меньше, чем $\pi/3$?

Ясно, что $B(2) = 4$ (см. Рис. 2.1). Г. Фейеш Тот первым, в 1981 г., доказал, что $B(3) = 9$ [25]. В более поздних статьях [47] и [7] приведены другие

доказательства этой теоремы.

2.2. Оптимальные расположения для $B(n)$.

Пусть полусфера S_+ это сферическая шапочка с центром N и (угловым) радиусом равным 90° . Без ограничения общности, можно считать, что N - "Северный полюс" и $N = (0, \dots, 0, 1)$. Границей S_+ является "экватор" и мы будем обозначать его E . (Ясно, что $E \cong \mathbb{S}^{n-2}$.)

Для любой точки $p = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ на S_+ обозначим через $p' = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ ее отражение относительно экватора, и для любого множества $P \subset S_+$ пусть $P' = \{p' : p \in P\}$.

Рассмотрим проекцию $\Pi_n : \dot{S}_+ \rightarrow E$, $\dot{S}_+ := S_+ \setminus \{N\}$ из северного полюса N на экватор, при которой точка $p \in \dot{S}_+$ проектируется вдоль меридиана на E . Пусть $Q = \{q_1, \dots, q_m\} \subset E$ является проекцией $P = \{p_1, \dots, p_m\} \subset \dot{S}_+$, т. е. $q_i = \Pi_n(p_i)$. Тогда $q_i = q_j$ если и только если p_i и p_j лежат на одном меридиане.

Рассмотрим теперь функцию $\omega(\varphi, \alpha, \beta)$, определенную как

$$\cos \omega(\varphi, \alpha, \beta) := \frac{\cos \varphi - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Эта функция описывает изменение расстояния φ между двумя точками на \dot{S}_+ , находящимися на расстоянии α и β от N при проекции Π_n .

Для фиксированных $\varphi \leq 90^\circ$ и $0 < u \leq \alpha \leq \beta \leq v \leq 90^\circ$, функция $\omega(\varphi, \alpha, \beta)$ достигает минимума при $\alpha = \beta = v$ или $\alpha = u, \beta = v$. Если $v < \varphi$, то минимум ω достигается при $\alpha = \beta = v$ (см. Теорему 1.3).

Напомним, что через $A(n, \varphi)$ мы обозначаем максимальную мощность φ -кода на сфере \mathbb{S}^{n-1} . Обозначим через $A(n, \varphi, \psi)$ максимальную мощность φ -кода в сферической шапочке радиуса ψ . У нас есть очевидные равенства: $A(n, \varphi) = A(n, \varphi, 180^\circ)$, $k(n) = A(n, 60^\circ)$, $B(n) = A(n, 60^\circ, 90^\circ)$.

Определение 2.1. Пусть $P \subset S_+$. Тогда

$$P_a := \{p \in P : 90^\circ \geq \text{dist}(p, N) \geq 60^\circ\}, \quad a(P) := |P_a|,$$

$$P_b = \{p \in P : \text{dist}(p, N) < 60^\circ\}, \quad b(P) := |P_b|.$$

Очевидно, что

$$P = P_a \cup P_b, \quad |P| = a(P) + b(P).$$

Лемма С1. Пусть $P \subset S_+ \subset \mathbb{S}^{n-1}$ является сферическим $\pi/3$ -кодом. Тогда

(i) $a(P) + 2b(P) \leq k(n)$;

(ii) $a(P) \leq A(n-1, \arccos(1/\sqrt{3}))$.

Доказательство. Для любых различных точек $p, q \in P$ верно неравенство $\text{dist}(p, q) \geq 60^\circ$. Поэтому (Рис. 2.2), $\text{dist}(p', q) \geq \text{dist}(p, q) \geq 60^\circ$. Заметим, что $\text{dist}(P_b, P'_b) \geq 60^\circ$. Следовательно, $\tilde{P} = P \cup P'_b$ является сферическим $\pi/3$ -кодом в \mathbb{S}^{n-1} . Таким образом, $|\tilde{P}| \leq k(n)$.

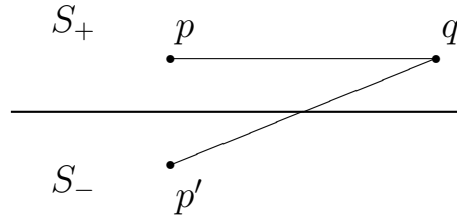


Рис. 2.2

Пусть $Q_a = \{q_i\}$ обозначает проекцию $P_a = \{p_i\}$, $q_i = \Pi_n(p_i)$ (Рис. 2.3), и

$$\theta_i := \text{dist}(N, p_i), \quad \phi_{i,j} := \text{dist}(p_i, p_j), \quad \gamma_{i,j} := \text{dist}(q_i, q_j).$$

Тогда $\gamma_{i,j} = \omega(\phi_{i,j}, \theta_i, \theta_j)$. Мы получили, что $\phi_{i,j} \geq 60^\circ$, поэтому $\gamma_{i,j} \geq \omega(60^\circ, \theta_i, \theta_j)$. Так как $60^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ$ для всех i , то

$$\gamma_{i,j} \geq \lambda = \omega(60^\circ, 60^\circ, 90^\circ) = \arccos(1/\sqrt{3}).$$

Стало быть Q_a - λ -код в \mathbb{S}^{n-2} . Итак, $a(P) = |P_a| = |Q_a| \leq A(n-1, \lambda)$. \square

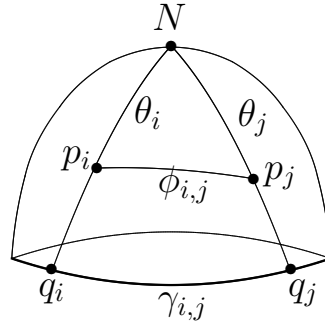


Рис. 2.3

Следствие 2.1. $B(3) = 9$.

Доказательство. Предположим, что P - $\pi/3$ -код в \mathbb{S}^2 с $|P| = B(3)$. Так как $k(3) = 12$, то по Лемме C1(i) получаем $a + 2b \leq 12$, где $a = a(P)$, $b = b(P)$. Заметим, что $A(2, \psi) = \lfloor 2\pi/\psi \rfloor$. Следовательно, $A(2, \arccos(1/\sqrt{3})) = 6$. Лемма C1(ii) влечет неравенство $a \leq 6$. Поскольку, существует $\pi/3$ -код на полушаре S_+ из 9 точек, то у нас также есть неравенство $a + b = B(3) \geq 9$. Эти два неравенства для неотрицательных целых чисел a и b дают единственное решение $a = 6$, $b = 3$. Таким образом, $B(3) = a + b = 9$. \square

Следствие 2.2. Пусть $P \subset \mathbb{S}^3$ - $\pi/3$ -код с $|P| = B(4)$. Тогда существуют только следующие возможности для $|P|, a(P), b(P)$:

$$|P| = 19, \quad (a, b) = (15, 4); (14, 5)$$

$$|P| = 18, \quad (a, b) = (15, 3); (14, 4); (13, 5); (12, 6)$$

Доказательство. По Теореме A: $k(4) = 24$. Из этого следует $a + 2b \leq 24$. С другой стороны, граница Дельсарта дает $A(3, \arccos(1/\sqrt{3})) \leq 15$ (см. [12]). Следовательно, мы имеем следующие неравенства для a и b :

$$a + 2b \leq 24, \quad a \leq 15, \quad a + b = B(4) \geq 18.$$

Существуют только следующие решения для целочисленных и неотрицательных a и b :

$$(a, b) = (15, 4); (14, 5); (15, 3); (14, 4); (13, 5); (12, 6). \quad \square$$

Из этого следствия сразу следует

Следствие 2.3. $B(4) = 18$ или 19 .

2.3. Обобщение метода Дельсарта для кодов на полусфере.

Для доказательства Лемм С1 и С2: $(a, b) \neq (15, 4), (14, 5)$ мы опять будем использовать технику, основанную на методе Дельсарта.

Напомним Определение 1.1: Функция $f \in \mathbf{G}_n^+$, если это непрерывная функция на отрезке $[-1, 1]$ и она представима в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k G_k^{(n)}(t)$$

с коэффициентами удовлетворяющих следующим условиям:

$$c_0 > 0, \quad c_k \geq 0 \quad \text{для } k = 1, 2, \dots, \quad f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty.$$

Начнем с теоремы, которая обобщает границу Дельсарта (см. 1.2.5).

Теорема 2.1. Пусть $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$, $p_i \in \mathbb{S}^{n-1}$. Предположим, что $f \in \mathbf{G}_n^+$ и $f(t) \leq 0$ для всех $t \in [-1, \cos \psi]$. Тогда

$$f_0 M^2 \leq f(1)M + T_f(P),$$

где

$$T_f(P) := \sum_{(i,j): \phi_{i,j} < \psi, i \neq j} f(\cos \phi_{i,j}),$$

Доказательство. Напомним, что $\phi_{i,j} := \text{dist}(p_i, p_j)$. Поскольку, $\phi_{i,i} = 0$, то $f(\cos \phi_{i,i}) = f(1)$. По условию, если $\phi_{i,j} \geq \psi$, то $f(\cos \phi_{i,j}) \leq 0$. Отсюда получаем, что $S_f(P) \leq f(1)M + T_f(P)$. С другой стороны, $S_f(P) \geq f_0 M^2$. \square

Рассмотрим теперь обобщение метода Дельсарта для $\pi/3$ -кодов на полусфере. Заметим, что все результаты этого параграфа верны и для более общего случая - φ -кодов в сферических шапочках. Однако, для простоты, мы остановимся только на этом частном случае.

Пусть множество $P \subset S_+ \subset \mathbb{S}^{n-1}$ является $\pi/3$ -кодом. Для фиксированного θ_0 , где $60^\circ < \theta_0 < 90^\circ$, определим два подмножества множества P_a :

$$P_{a_1} = \{p_i \in P_a : \theta_0 < \text{dist}(p_i, N)\}, \quad P_{a_2} = \{p_i \in P_a : \theta_0 \geq \text{dist}(p_i, N)\},$$

$$a_1 = a_1(P) := |P_{a_1}|, \quad a_2 = a_2(P) := |P_{a_2}|, \quad a = a_1 + a_2.$$

Напомним, что $|P| = a + b = a_1 + a_2 + b$.

Теорема 2.2. *Предположим, что $f \in \mathbf{G}_n^+$, $f(t) \leq 0$ для всех $t \in [-1, 1/2]$, и $f(t)$ - монотонно возрастающая функция на отрезке $[1/2, 1]$. Тогда*

$$(a_1 + 2a_2 + 2b)^2 f_0 \leq (a_1 + 2a_2 + 2b)f(1) + 2a_2 f(-\cos 2\theta_0).$$

Доказательство. Пусть

$$\tilde{P} = P \cup P'_{a_2} \cup P'_b.$$

Тогда $M = |\tilde{P}| = |P| + a_2 + b = a_1 + 2a_2 + 2b$.

Если $p \in P_{a_2}$, то $\text{dist}(p, p') \geq 180^\circ - 2\theta_0$. Для любой пары (p, q) из \tilde{P} выполняется неравенство $\text{dist}(p, q) \geq 60^\circ$ (см. доказательство Леммы С1, Рис. 2.2). Следовательно, условие монотонности влечет:

$$T_f(\tilde{P}) \leq 2a_2 f(\cos(180^\circ - 2\theta_0)) = 2a_2 f(-\cos 2\theta_0).$$

Таким образом, доказательство следует из Теоремы 2.1 с $\psi = 60^\circ$. \square

Теперь для любой функции $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ и θ_0 , $60^\circ < \theta_0 < 90^\circ$, мы определим функцию $R_f(\theta)$ на отрезке $[0, \theta_0]$.

Пусть

$$\psi_0 := \omega(60^\circ, \theta_0, 90^\circ) = \arccos\left(\frac{1}{2 \sin \theta_0}\right).$$

Для данной точки e_0 на экваторе $E \cong \mathbf{S}^{n-2}$ обозначим через $C(e_0, \psi_0)$ сферическую шапочку на E с центром e_0 и радиусом ψ_0 . Пусть $\Lambda_n(\theta_0)$ - сферический конус в \mathbf{S}^{n-1} с вершиной N и основанием $C(e_0, \psi_0)$ (Рис. 2.4). Другими словами, $\Lambda_n(\theta_0)$ - конус с высотой 90° и радиусом основания ψ_0 .

Рассмотрим точку p , лежащую на высоте Ne_0 с $\text{dist}(N, p) = \theta \leq \theta_0$. Обозначим через $\Delta_n(\theta, \theta_0)$ область в $\Lambda_n(\theta_0)$, которая лежит ниже сферы $S(p) = S(p, 60^\circ)$ с центром p и радиусом 60° . Несложно видеть, что при $\theta \leq \theta_0$ эта область не пуста.

Определение 2.2. Рассмотрим $\pi/3$ -коды $X = \{p_1, \dots, p_m\}$ в $\Delta_n(\theta, \theta_0)$. Пусть $\mu(n, \theta, \theta_0)$ - максимальная величина m . Обозначим через $\Omega_n(\theta, \theta_0)$ множество всех $\pi/3$ -кодов в $\Delta_n(\theta, \theta_0)$.

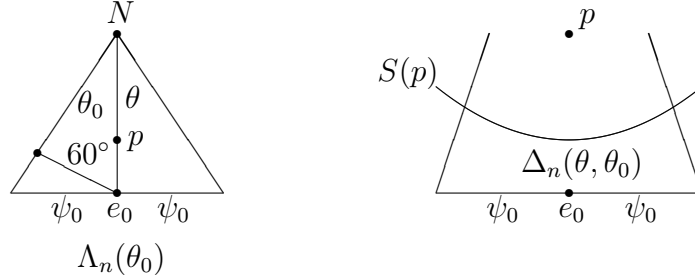


Рис. 2.4

Пусть $Y = \{q_1, \dots, q_m\}$ - проекция $X = \{p_1, \dots, p_m\} \subset \Delta_n(\theta, \theta_0)$, где $q_i = \Pi_n(p_i)$, и пусть

$$F_f(X) = F_f(p_1, \dots, p_m) := f(\cos \varphi_1) + \dots + f(\cos \varphi_m), \quad \varphi_i := \text{dist}(e_0, q_i).$$

Определим $R_f(\theta; \theta_0, n)$ как максимум функции $F_f(X)$ на $\Omega_n(\theta, \theta_0)$:

$$R_f(\theta) = R_f(\theta; \theta_0, n) := \sup_{X \in \Omega_n(\theta, \theta_0)} \{F_f(X)\}.$$

Предположим, что $P = \{p_1, \dots, p_\ell\} \subset \mathbb{S}^{n-1}$ лежит в сферической шапочке с центром N и радиусом θ_0 . Пусть

$$\tilde{R}_f(P) = \tilde{R}_f(P; \theta_0, n) := R_f(\theta_1) + \dots + R_f(\theta_\ell), \quad \theta_k := \text{dist}(N, p_k).$$

Предложение 2.1. $R_f(\theta)$ является монотонно убывающей функцией от θ .

Доказательство. Для $\alpha > \beta$ верно, что $\Delta_n(\alpha, \theta_0) \subset \Delta_n(\beta, \theta_0)$, тогда $\Omega_n(\alpha, \theta_0) \subset \Omega_n(\beta, \theta_0)$, и стало быть $R_f(\alpha) \leq R_f(\beta)$. \square

Теорема 2.3. Пусть $\theta_0 \in (60^\circ, 90^\circ)$. Предположим, что $f \in \mathbf{G}_n^+$ и $f(t) \leq 0$ для всех $t \in [-1, \cos \psi_0]$. Тогда для $\pi/3$ -кода $P \subset S_+ \subset \mathbf{S}^{n-1}$ с $|P| = M$ верно, что

$$f_0 M^2 \leq M f(1) + 2a_2 R_f(60^\circ; \theta_0, n) + 2\tilde{R}_f(P_b; \theta_0, n).$$

Доказательство. Если N не принадлежит P , то проекция Q определена корректно.

Применив Теорему 2.1 для f и $Q = \Pi_n(P) \subset E$ получим

$$f_0 M^2 \leq S_f(Q) \leq f(1)M + T_f(Q).$$

Из условия: $f(t) \leq 0$, $t \in [-1, \cos \psi_0]$, для $q_i, q_j \in Q$ следует, что если $\text{dist}(q_i, q_j) \geq \psi_0$, то $f(\cos \phi_{i,j}) \leq 0$. Тогда для различных $q_1, q_2 \in Q_{a_1}$ получим $\text{dist}(q_1, q_2) \geq \psi_0$.

Для $q_1, q_2 \in Q_{a_2}$ верно, что

$$\text{dist}(q_1, q_2) \geq \omega(60^\circ, \theta_0, \theta_0) > \omega(60^\circ, \theta_0, 90^\circ) = \psi_0.$$

А в случае $q_1, q_2 \in Q_b$,

$$\text{dist}(q_1, q_2) > \omega(60^\circ, 60^\circ, 60^\circ) > \psi_0.$$

Следовательно, $\text{dist}(q_1, q_2) < \psi_0$ только если

$$(i) \ q_1 \in Q_{a_1}, \ q_2 \in Q_{a_2}, \ \text{или} \ (ii) \ q_1 \in Q_a, \ q_2 \in Q_b.$$

Пусть $p \in P_{a_2}$, $\text{dist}(N, p) = \theta$, $e_0 = \Pi_n(p)$, и $X = \{p_1, \dots, p_m\} \subset P$ с $\text{dist}(e_0, q_i) < \psi_0$. По условию (i) верно, что $X \subset P_{a_1}$. Из этого вытекает, что X лежит ниже $S(p, 60^\circ)$. Таким образом, $X \subset \Delta_n(\theta, \theta_0)$ and $F_f(X) \leq R_f(\theta)$. Это же верно для $p \in P_b$ (случай (ii)). Мы получили

$$T_f(Q) \leq 2\tilde{R}_f(P_{a_2}) + 2\tilde{R}_f(P_b).$$

По определению $\text{dist}(N, p) \geq 60^\circ$ для $p \in P_{a_2}$. Так как $R_f(\theta)$ - убывающая функция, то $\tilde{R}_f(P_{a_2}) \leq a_2 R_f(60^\circ)$.

Утверждение теоремы для $N \notin P$ влечет и утверждение для $N = p \in P$. В самом деле, если сдвинуть p к какой-то точке $p(\varepsilon)$, которая находится на небольшом расстоянии ε от N , то мы можем применить теорему для φ -кода $P(\varepsilon) = p(\varepsilon) \cup P \setminus p$, где $\varphi = 60^\circ - \varepsilon$. Так как $R_f(\theta)$ - непрерывная функция

и $R_f(0)$ корректно определено, то теорема для случая $N \in P$ следует при $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

В конце этого параграфа мы рассмотрим геометрические свойства $\pi/3$ -кодов в $\Delta_n(\theta, \theta_0)$. Эти свойства помогут нам вычислять $R_f(\theta)$ в следующем параграфе.

Заметим, что при $\theta > 30^\circ$ сфера $S(p, 60^\circ)$ пересекает экватор. Поэтому

$$\text{dist}(e_0, q_i) \geq \rho(\theta) := \omega(60^\circ, \theta, 90^\circ) = \arccos\left(\frac{1}{2\sin\theta}\right), \quad \theta > 30^\circ$$

Тогда $p_i \in \Delta_n(\theta, \theta_0)$ влечет $\text{dist}(N, p_i) \geq \gamma(\theta, \theta_0)$, где функция $\gamma = \gamma(\theta, \theta_0) = \gamma_1(\theta, 60^\circ, \psi_0)$ определяется уравнением

$$\omega(60^\circ, \theta, \gamma) = \psi_0, \quad \gamma \geq \theta.$$

Другими словами, $\gamma_1(\theta, \varphi, \psi)$ это длина AB сферического треугольника ABC с $|AC| = \theta$, $|BC| = \varphi$, и $\angle BAC = \psi$. На самом деле, это уравнение имеет два решения. Обозначим второе решение через $\gamma_2(\theta, \varphi, \psi)$.

Мы получили

$$\text{dist}(q_i, q_j) \geq d(\theta) = d(\theta, \theta_0) := \omega(60^\circ, \gamma(\theta, \theta_0), 90^\circ), \quad i \neq j.$$

Следовательно, множество $Y = \{q_i\}$ является $d(\theta)$ -кодом в сферической шапочке $C(e_0, \psi_0) \subset E \cong \mathbf{S}^{n-2}$. Таким образом,

$$\mu(n, \theta, \theta_0) \leq A(n-1, d(\theta, \theta_0), \psi_0).$$

Из Теоремы 1.3 при $\varphi > \psi$ следует, что

$$A(n, \varphi, \psi) = A(n-1, \omega(\varphi, \psi, \psi)).$$

Обозначим через $\theta_*(\theta_0)$ решение уравнения $d(\theta, \theta_0) = \psi_0$. Мы получили

$$\mu(n, \theta, \theta_0) \leq A(n-2, \omega(d(\theta), \psi_0, \psi_0)) \quad \text{для } \theta > \theta_*(\theta_0).$$

Рассмотрим случай $n = 4$. Тогда $Y = \{q_1, \dots, q_m\}$ является $d(\theta)$ -кодом на сферической шапочке $C(e_0, \psi_0) \subset \mathbb{S}^2$. У нас есть два случая а) $\theta > \theta_*(\theta_0)$ и б) $\theta \leq \theta_*(\theta_0)$.

а) По определению для $\theta > \theta_*(\theta_0)$ верно, что $d(\theta) > \psi_0$. Тогда из Следствия 1.2 следует, что $m \leq 5$.

Пусть $m = 5$. Тогда q_i - вершины сферического пятиугольника (Теорема 1.2). Обозначим этот пятиугольник через V_5 . Так как $\text{dist}(q_i, q_j) \geq d(\theta)$, то длина любой стороны V_5 не меньше $d(\theta)$. С другой стороны, $V_5 \subset C(e_0, \psi_0)$. Минимальное расстояние между e_0 и вершиной q_i достигается, когда V_5 является равносторонним пятиугольником со стороной $d(\theta)$, а его оставшиеся четыре вершины лежат на границе $C(e_0, \psi_0)$. Из этого следует

$$\text{dist}(e_0, q_i) \geq \rho_5(\theta, \theta_0) := \gamma_2(\psi_0, d(\theta), \eta), \quad \eta = 180^\circ - 3\omega(d(\theta), \psi_0, \psi_0)/2.$$

б) В этом случае, $m \leq 6$. В случае, если $m = 6$, то $q_6 = e_0$ и $\{q_1, \dots, q_5\}$ - вершины выпуклого пятиугольника. В самом деле, пусть $\delta = \omega(d(\theta), \psi_0, \psi_0)$. Вычисления показывают, что для $\theta_0 \in (60^\circ, 90^\circ)$ получается $\delta > 60^\circ$. Пусть V - (сферическая) выпуклая оболочка Y . Тогда $\angle q_i e_0 q_j \geq \delta$, где $q_i, q_j \in V$. Так как $\lfloor 360^\circ/\delta \rfloor \leq 5$, то число вершин V не больше 5. Более того, не более одной точки $q_i \in Y$ может лежать внутри V . Таким образом, $m \leq 6$.

Соберем все эти факты в одну теорему:

Теорема 2.4. *Предположим, что $\pi/3$ -код $X = \{p_1, \dots, p_m\}$ лежит в $\Delta_n(\theta, \theta_0)$. Пусть $q_i = \Pi_n(p_i)$. Тогда*

- 1) $\text{dist}(q_i, q_j) \geq d(\theta, \theta_0)$, и $\text{dist}(e_0, q_i) \geq \rho(\theta)$ для $\theta > 30^\circ$;
- 2) $m \leq \mu(n, \theta, \theta_0) \leq A(n - 1, d(\theta, \theta_0), \psi_0)$;
- 3) $m \leq \mu(n, \theta, \theta_0) \leq A(n - 2, \omega(d(\theta, \theta_0), \psi_0, \psi_0))$ для $\theta > \theta_*(\theta_0)$;
- 4) если $n = 4$, то $m \leq \mu(4, \theta, \theta_0) \leq 6$; более того, для $\theta > \theta_*(\theta_0)$ верно, что $m \leq 5$, и если $m = 5$, то $\text{dist}(e_0, q_i) \geq \rho_5(\theta, \theta_0)$.

2.4. $B(4)=18$

Теперь мы докажем Теорему С: $B(4) = 18$. Напомним, что эта теорема следует из Лемм С2 и С3: $(a, b) \neq (15, 4), (14, 5)$.

В этом параграфе мы полагаем $\theta_0 = 71.74^\circ$. Тогда $\psi_0 \approx 58.2299^\circ$, $\theta_* = \theta_*(\theta_0) \approx 25.8526^\circ$, and $\cos 2\theta_0 = -\cos 36.52^\circ$.

Здесь и ниже мы показываем только 4 значащих цифры.

Лемма 2.1. Пусть $P \subset S_+ \subset \mathbb{S}^3$ является $\pi/3$ кодом с $|P| = 19$.

- 1) Если $(a, b) = (15, 4)$, то $a_2 \leq 5$.
- 2) If $(a, b) = (14, 5)$, then $a_2 \leq 3$.

Доказательство. Пусть $f_{OS}(t) = f_0 + f_1 G_1^{(4)}(t) + \dots + f_9 G_9^{(4)}(t)$, где $f_0 = 1$, $f_1 = 3.6181$, $f_2 = 6.1156$, $f_3 = 7.0393$, $f_4 = 5.0199$, $f_5 = 2.313$, $f_6 = f_7 = c_8 = 0$, $f_9 = 0.4525$.

Многочлен f_{OS} удовлетворяет условиям Теоремы 2.2.¹ Применим его для доказательства теоремы

- 1) Предположим противное. Тогда, $a_2 \geq 6$, и $M = a_1 + 2a_2 + 2b = |P| + a_2 + b \geq 29$. Для $a_2 = 6$ из Теоремы 2.2 следует

$$841 = f_0 29^2 \leq 29 f_{OS}(1) + 12 f_{OS}(\cos(36.52^\circ)) \approx 840.8819$$

- противоречие.

- 2) Если $(a, b) = (14, 5)$ и $a_2 = 4$, то $M = 28$. Получаем

$$784 = f_0 28^2 \leq 28 f_{OS}(1) + 8 f_{OS}(\cos(36.52^\circ)) \approx 782.0941,$$

противоречие.

Так как

$$f_0 M^2 - M f_{OS}(1) - 2a_2 f_{OS}(\cos(36.52^\circ))$$

увеличивается, когда M увеличивается, то это завершает доказательство. \square

¹Этот многочлен Одлжко и Слоэн [45] применили для доказательства неравенства $k(4) \leq 25$. В самом деле, граница Дельсарта дает $k(4) = A(4, 60^\circ) \leq f_{OS}(1)/f_0 = f_{OS}(1) \approx 25.5584$. Тогда $k(4) \leq 25$.

Докажем Лемму С2: $(a, b) \neq (15, 4)$.

Доказательство. Предположим противное.

Пусть $g(t) = g_0 + g_1 G_1^{(3)}(t) + \dots + g_9 G_9^{(3)}(t)$, где
 $g_0 = 1$, $g_1 = 2.7986$, $g_2 = 3.6388$, $g_3 = 3.4429$, $g_4 = 2.1227$, $g_5 = 0.8637$,
 $g_6 = g_7 = g_8 = 0$, $g_9 = 0.1281$. Тогда $g(1) = g_0 + g_1 + \dots + g_9 = 13.9948$.

Многочлен g удовлетворяет условиям Теоремы 2.3 с $n = 4$. Заметим, что $g(t)$ - монотонно увеличивающаяся функция на отрезке $[\cos \psi_0, 1]$.

Применим Теорему 2.3 для P_a . Так как $|P_a| = 15$ и $b(P_a) = 0$, то

$$225 = g_0 15^2 \leq 15g(1) + 2a_2 R_g(60^\circ).$$

Докажем, что $R_g(60^\circ) \leq 4g(1/\sqrt{3})$.

Теорема 2.4 влечет

$$\text{dist}(e_0, q_i) \geq \rho(60^\circ) = \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 54.7356^\circ,$$

$\mu(4, 60^\circ, \theta_0) \leq 5$, и для $m = 5$ получаем

$$\text{dist}(e_0, q_i) \geq \rho_5 = \rho_5(60^\circ, \theta_0) \approx 57.5043^\circ.$$

Тогда из монотонности $g(t)$ на $[\cos \psi_0, 1]$ следует для $m = 5$: $F_g(X) \leq 5g(\cos \rho_5)$ и для $m \leq 4$: $F_g(X) \leq 4g(1/\sqrt{3})$. Так как

$$4g(1/\sqrt{3}) \approx 1.4673 > 5g(\cos \rho_5) \approx 0.332,$$

we have $R_g(60^\circ) \leq 4g(1/\sqrt{3})$. (It is easy to see that $R_g(60^\circ) = 4g(1/\sqrt{3})$.)

По Лемме 2.1, $a_2 \leq 5$, так что

$$225 \leq 15g(1) + 2a_2 R_g(60^\circ) \leq 15g(1) + 40g(1/\sqrt{3}) \approx 224.5946$$

- противоречие. □

Теперь докажем Лемму С3: $(a, b) \neq (14, 5)$.²

Доказательство. Будем доказывать эту лемму от противного.

1. Пусть $P_b = \{p_1, \dots, p_5\}$, $\theta_i := \text{dist}(p_i, N)$, и

$$\{p_i\} = \{\bar{p}_j\}, \quad \bar{\theta}_i := \text{dist}(\bar{p}_i, N), \quad 60^\circ > \bar{\theta}_1 \geq \bar{\theta}_2 \geq \bar{\theta}_3 \geq \bar{\theta}_4 \geq \bar{\theta}_5 > 0.$$

Через $P_b(k)$ обозначим $\{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_k\}$. Здесь $1 \leq k \leq 5$, и $P_b(5) = P_b$. Пусть

$$P(k) := P_a \cup P_b(k), \quad Q(k) := Q_a \cup Q_b(k).$$

Тогда $|P(k)| = |Q(k)| = 14 + k$.

Предположим многочлен f удовлетворяет условиям Теоремы 2.3 с $n = 4$.

Тогда эта теорема для $P(k)$ влечет

$$f_0(14 + k)^2 \leq S_f(Q(k)) \leq (14 + k)f(1) + 2a_2R_f(60^\circ) + 2\tilde{R}_f(P_b(k)). \quad (2.1)$$

Пусть $h(t) = h_0 + h_1G_1^{(3)}(t) + \dots + h_9G_9^{(3)}(t)$, где

$$h_0 = 1, \quad h_1 = 2.722, \quad h_2 = 3.6191, \quad h_3 = 3.4323, \quad h_4 = 2.4227, \quad h_5 = 1.1991,$$

$$h_6 = h_7 = h_8 = 0, \quad h_9 = 0.0195. \quad h(1) = h_0 + h_1 + \dots + h_9 = 14.7413.$$

Заметим, что h (так же как и g) удовлетворяет условиям Теоремы 2.3, и $h(t)$ - монотонно возрастающая функция на отрезке $[\cos \psi_0, 1]$. На самом деле, g и h достаточно близки друг к другу. Как и выше, $R_h(60^\circ) = 4h(1/\sqrt{3})$. Однако, для $k \leq 3$, используя $f = g$ в (2.1) мы получим лучше результат, чем для $f = h$, но h лучше чем g для $k = 4, 5$.

По Лемме 2.1, $a_2 \leq 3$. Следовательно, для $f = g$ и $f = h$ получим

$$(14 + k)^2 \leq (14 + k)f(1) + 24f(1/\sqrt{3}) + 2\tilde{R}_f(P_b(k)). \quad (2.2)$$

²Имеется старая гипотеза о единственности (с точностью до изометрии) расположения точек на сфере, которое дает решение проблемы контактных чисел в размерности 4, т. е. это "24-гранник" P_{24} . Из этой гипотезы легко следует Лемма С3. В самом деле, пусть $\hat{P} := P \cup P'_b$, тогда $|\hat{P}| = a + 2b = 24$. Из гипотезы следует, что $\text{conv}(\hat{P})$ является "24-гранником". Но тогда не более 18 вершин P_{24} может лежать на замкнутой полусфере, $|P| \leq 18$ - противоречие.

Напомним, что $\tilde{R}_f(P_b(k)) = R_f(\bar{\theta}_1) + \dots + R_f(\bar{\theta}_k)$. Таким образом, (2.2) влечет

$$R_f(\bar{\theta}_1) + \dots + R_f(\bar{\theta}_k) \geq k^2/2 + 14k + 98 - (7 + k/2)f(1) - 12f(1/\sqrt{3}). \quad (2.3)$$

2. Теперь мы вычислим верхнюю границу для $R_f(\theta)$ при $f = g, h$, и $0 \leq \theta \leq 60^\circ$.

Пусть $\theta \in [0^\circ, 60^\circ]$. Если X - $\pi/3$ -код в $\Delta_4(\theta, \theta_0)$, то из Теоремы 2.4 следуют некоторые ограничения для Y , где Y является проекцией X . Используя эти ограничения мы введем функцию $L_f(\theta)$ такую что $R_f(\theta) \leq L_f(\theta)$.

Для фиксированной точки $e_0 \in \mathbb{S}^2$ рассмотрим множество $\Psi(\theta)$ всех $d(\theta)$ -кодов $Y = \{q_1, \dots, q_m\}$ на \mathbb{S}^2 таких что $m \leq 6$; $\varphi_i := \text{dist}(e_0, q_i) \geq \rho(\theta)$ для $\theta > 30^\circ$; $m \leq 5$ для $\theta > \theta_*$ и если $m = 5$, то $\varphi_i \geq \rho_5(\theta)$. Пусть

$$H_f(Y) := \tilde{f}(\varphi_1) + \dots + \tilde{f}(\varphi_m), \quad L_f(\theta) := \sup_{Y \in \Psi(\theta)} \{H_f(Y)\},$$

где

$$\tilde{f}(\varphi) := \begin{cases} f(\cos \varphi) & 0 \leq \varphi \leq \psi_0 \\ 0 & \varphi > \psi_0 \end{cases}$$

Из Теоремы 2.4 следует, что если $X \in \Omega_4(\theta, \theta_0)$, то $Y \in \Psi(\theta)$. Таким образом, $R_f(\theta) \leq L_f(\theta)$.

Рассмотрим $\theta \in [30^\circ, 60^\circ]$. Напомним, что $f(\cos \varphi)$ - монотонно убывающая функция на отрезке $[0, \psi_0]$. Тогда, $m = 5$: $H_f(Y) \leq 5\tilde{f}(\rho_5(\theta))$, и для $m \leq 4$: $H_f(Y) \leq 4\tilde{f}(\rho(\theta))$. Вычисления показывают, что $4\tilde{f}(\rho(\theta)) > 5\tilde{f}(\rho_5(\theta))$. Следовательно, $L_f(\theta) \leq 4\tilde{f}(\rho(\theta))$.

Пусть $\delta_4 \approx 44.4577^\circ$ определено уравнением: $\cos^2 \rho(\delta_4) = \cos d(\delta_4)$. Это равенство означает, что у сферического квадрата со стороной длины $d(\delta_4)$ радиус описанной окружности равен $\rho(\delta_4)$. Тогда для $\theta \in [\delta_4, 60^\circ]$, сторона сферического квадрата с центром e_0 и радиусом описанной окружности $\rho(\theta)$ не меньше чем $d(\theta)$. Таким образом,

$$L_f(\theta) = 4\tilde{f}(\rho(\theta)) = 4f\left(\frac{1}{2 \sin \theta}\right) \quad \text{для } \theta \in [\delta_4, 60^\circ].$$

Если $\theta < \delta_4$, то радиус описанной окружности со стороной $d(\theta)$ больше чем $\rho(\theta)$. Из Теоремы 1.4 следует, что если Y - оптимально (т. е. $H_f(Y) = L_f(\theta)$) и $|Y| = 4$, то Y - сферический ромб $q_1q_2q_3q_4$ со стороной длины $d(\theta)$.

Рассмотрим ромб $Y = q_1q_2q_3q_4$ со стороной длины $d(\theta)$ и $\text{dist}(q_1, q_3) \geq \text{dist}(q_2, q_4)$ такой что радиус описанной окружности вокруг треугольника $q_1q_2q_4$ равен $\rho(\theta)$. При таких условиях, ромб существует и однозначно определен при $\theta \in [\delta_3, \delta_4]$. Здесь $\delta_3 \approx 37.4367^\circ$ определено условием, что $\rho(\delta_3)$ является радиусом описанной окружности правильного треугольника со стороной длины $d(\delta_3)$. Численная проверка показывает, что для всех $\theta \in [\delta_3, \delta_4]$, $H_f(Y)$ достигает максимума, когда e_0 - центр описанной окружности треугольника $q_1q_2q_4$. Так как для этого расположения величина $\text{dist}(e_0, q_3)$ однозначно определена θ , то обозначим ее $r_4(\theta)$. Тогда

$$L_f(\theta) = 3f\left(\frac{1}{2\sin\theta}\right) + \tilde{f}(r_4(\theta)) \quad \text{для } \theta \in [\delta_3, \delta_4].$$

Заметим, что для $\theta = \delta_3$ верно неравенство $\varphi_3 > \psi_0$, т. е. $\tilde{f}(\varphi_3) = 0$. Вычисления показывают, что для $\theta \in [30^\circ, \delta_3]$ максимум $H_f(Y)$ достигается, когда $q_1q_2q_4$ является правильным треугольником со стороной длины $d(\theta)$ и $\text{dist}(e_0, q_1) = \rho(\theta)$. Пусть $r_3(\theta) := \text{dist}(e_0, q_2) = \text{dist}(e_0, q_4)$. Так как в этом случае $\varphi_3 > \psi_0$, мы получили

$$L_f(\theta) = f\left(\frac{1}{2\sin\theta}\right) + 2\tilde{f}(r_3(\theta)) \quad \text{для } \theta \in [30^\circ, \delta_3].$$

Для $\theta = 30^\circ$ мы видим, что $q_1 = e_0$ и $r_3(\theta) = d(\theta) > \psi_0$. Следовательно, $L_f(30^\circ) = f(1)$. Заметим, что для $\theta \in [30^\circ, \theta_*]$ получаем $f(1) > 5\tilde{f}(\rho_5(\theta))$. Тогда, как и выше, можно предположить, что Y является ромбом. Вычисления показывают, что $H_f(Y)$ достигает максимума, когда e_0 - вершина Y , т. е. $L_f(\theta) = f(1)$. Для $\theta < \theta_*$ не сложно показать, что $H_f(Y)$ будет максимальным при $e_0 \in Y$, а другие q_i находятся на расстоянии $d(\theta)$ от e_0 . Итак,

$$L_f(\theta) = f(1) + 5\tilde{f}(d(\theta)) \quad \text{для } \theta \in [0, 30^\circ].$$

(Заметим, что если $\theta \geq \theta_*$, то $d(\theta) \geq \psi_0$, т. е. $\tilde{f}(d(\theta)) = 0$.)

3. Рассмотрим область $\Theta =: \{(\theta_1, \dots, \theta_5)\}$ в \mathbb{R}^5 . Доказательство Леммы СЗ следует из того факта, что Θ , при заданных ограничениях (2.3) и $\text{dist}(p_i, p_j) \geq 60^\circ$ является пустым множеством.

Не составляет особого труда, найти границы для θ_k при условии (2.3). Например, так как $R_f(\theta)$ - монотонно убывающая функция, то

$$R_f(\bar{\theta}_1) + \dots + R_f(\bar{\theta}_k) \leq kR_f(\bar{\theta}_k) \leq kL_f(\bar{\theta}_k).$$

Комбинируя это с (2.3) получим

$$\bar{\theta}_1 < 53.93^\circ, \bar{\theta}_2 < 48.45^\circ, \bar{\theta}_3 < 46.72^\circ, \bar{\theta}_4 < 45.53^\circ, \bar{\theta}_5 < 44.47^\circ.$$

Здесь для $k = 1, 2, 3$ мы применили $f = g$, а для $k = 4, 5$: $f = h$.

Более того, используя выпуклость $L_f(\theta)$ на $[\delta_4, 60^\circ]$ мы можем получить неравенства для суммы θ_k . Возможно, используя эти неравенства, можно провести доказательство без компьютерных вычислений. Однако, как нам кажется, это будет тяжелая задача. Поэтому, мы здесь воспользовались численным методом, рассмотренным в главе 1.

Напомним, что $P_5(\alpha)$ - выпуклый многогранник в \mathbb{S}^3 с пятью вершинами (Рис. 1.6). Длины всех ребер $P_5(\alpha)$, кроме p_2p_4 , p_3p_5 , равны 60° , и

$$\text{dist}(p_2, p_4) = \alpha \in [60^\circ, 90^\circ], \text{dist}(p_3, p_5) = \beta, 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha + \cos \beta = 0.$$

Пусть $X = \{p_1, \dots, p_5\}$ - $\pi/3$ -код в сферической шапочке $C(N, 60^\circ) \subset \mathbf{S}^3$,
и

$$F(X) = F_1(\theta_1) + \dots + F_5(\theta_5), \theta_i = \text{dist}(N, p_i),$$

где $F_i(\theta)$ - монотонно убывающая функция от θ . Из Теоремы 1.5 следует, что F достигает максимума на $\{X\}$ в X_0 , когда $\text{conv}(X_0)$ (выпуклая оболочка X_0) изометрична $P_5(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in [60^\circ, 90^\circ]$. Заметим, что эта теорема не предполагает строгой монотонности $F_i(\theta)$.

Применим этот факт для $F(P_b) = L_f(\bar{\theta}_1) + \dots + L_f(\bar{\theta}_k)$, т. е. $F_i = L_f$ для $i = 1, \dots, k$, и $F_i = 0$ для $i > k$. Тогда, мы получим равенство $\text{conv}(P_b) = P_5(\alpha)$.

Покажем, как используя этот факт получить противоречие.

Пусть вершины p_1, p_2, p_3 многогранника $P_5(\alpha)$ фиксированы. Тогда вершины $p_4 = p_4(\alpha)$ и $p_5 = p_5(\alpha)$ однозначно определены α . Рассмотрим следующую область

$$D_\varepsilon(u_1, u_2, u_3) := \{p \in \mathbb{S}^3 : \theta_i = \text{dist}(p, p_i) \in [u_i, u_i + \varepsilon]\}, \quad \varepsilon > 0.$$

В общем положении, $D = D_\varepsilon(u_1, u_2, u_3)$ является криволинейным параллелепипедом, т. е. у D не более 8 вершин.

Обозначим через $S = S(u_1, u_2, u_3; \alpha) = \{s_i\}$, множество, состоящее из вершин D и точек на границе D , которые являются пересечением больших окружностей, проходящих через $p_i p_j, i \neq j, j = 4, 5$, и D . Для маленького ε и $u_i > 0$ верно, что $|S| \leq 10$. Лемма 1.5 влечет тот факт, что функция $\theta_i = \text{dist}(p, p_i), i = 4, 5$, достигает своего минимума на D в некотором s_j . Обозначим эту точку $\tilde{p}_i(\alpha, D)$. Итак, $L_f(\theta_i)$ достигает минимума на D при $\theta_i = \tilde{\theta}_i(\alpha) := \text{dist}(p_i, \tilde{p}_i(\alpha, D))$.

Заметим, что θ_4 увеличивается, а θ_5 - уменьшается, когда α - увеличивается. Тогда для $\alpha \in [r, r + \varepsilon]$ получим $\tilde{\theta}_4(\alpha) \geq \tilde{\theta}_4(r)$ и $\tilde{\theta}_5(\alpha) \geq \tilde{\theta}_5(r + \varepsilon)$. Следовательно, для $L_f(\theta_i)$ на $\bar{D}_\varepsilon = D \times [r, r + \varepsilon]$ получаем

$$L_f(\theta_i) \leq L_f(u_i), \quad i = 1, 2, 3; \quad L_f(\theta_4) \leq L_f(\tilde{\theta}_4(r)); \quad L_f(\theta_5) \leq L_f(\tilde{\theta}_5(r + \varepsilon)) \quad (2.4).$$

Используя (2.4) мы найдем верхнюю границу для $L_f(\theta_i)$ для любой области \bar{D}_ε . Затем, мы проверяем (2.3) для точек \bar{D}_ε . Тогда, если мы покроем $S_+ \times [60^\circ, 90^\circ]$ областями \bar{D}_ε , то мы проверим (2.3) для всех возможных $p, \{p_i\}$ и α . Наши вычисления показывают, что нет таких точек в Θ , которые удовлетворяют (2.3) - противоречие. \square

2.5. О соотношениях между $k(n)$ и $B(n)$.

Это понятно, что между контактными числами и односторонними контактными числами должна быть какая-то связь. Приведем здесь следующие замечательные равенства:

$$\begin{aligned} n = 2, \quad 4 = B(2) &= \frac{k(1) + k(2)}{2} = \frac{2 + 6}{2}; \\ n = 3, \quad 9 = B(3) &= \frac{k(2) + k(3)}{2} = \frac{6 + 12}{2}; \\ n = 4, \quad 18 = B(4) &= \frac{k(3) + k(4)}{2} = \frac{12 + 24}{2}. \end{aligned}$$

Вообще говоря, у нас нет уверенности, что такое же равенство верно для всех размерностей, т. е.

$$B(n) = \bar{K}(n) := \frac{k(n-1) + k(n)}{2}$$

для всех n . Однако, имеется несколько причин, почему равенство $B(n) = \bar{K}(n)$ может быть верно для $n = 5, 8, 24$; $B(n) \approx \bar{K}(n)$ для всех n ; и это равенство верно асимптотически

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{\bar{K}(n)} = 1.$$

Если рассмотреть минимальные векторы решеток D_5 , E_8 , и решетки Лича, то мы увидим, что $B(5) \geq 32$, $B(8) \geq 183$, $B(24) \geq 144855$. В работе [37] мы выдвинули следующую гипотезу:

Гипотеза. $B(5) = 32$, $B(8) = 183$, $B(24) = 144855$.

В работе [2] было доказано, что $B(8) = 183$. Для остальных размерностей эта гипотеза остается открытой.

2.6. Коды в сферических шапочках.

В этом параграфе мы рассматриваем некоторые обобщения Леммы С1 для кодов в сферических шапочках. Более подробно этот вопрос изучается в нашей работе с А. М. Баргом [4].

Напомним основные обозначения для мощности кодов:

$A(n, \theta, \psi)$ - максимальная мощность сферического θ -кода в сферической шапочке радиуса ψ ;

$B(n, \theta) := A(n, \theta, \pi/2)$ - максимальная мощность сферического θ -кода в полусфере S_+ .

Введем еще одно обозначение: Пусть $S_{\text{cap}}(n, \phi)$ - сферическая шапочка на сфере \mathbb{S}^{n-1} с центром в северном полюсе N и радиуса ϕ .

Здесь мы докажем следующую теорему:

Теорема D.

$$(i) \quad A(n, \theta, \psi) \leq B(n, \omega(\theta, \psi)), \text{ где } \theta \leq 2\psi \leq \pi;$$

$$(ii) \quad B(n, \theta) \leq \frac{A(n-1, \tilde{\theta}) + A(n, \theta)}{2}, \quad \cos \tilde{\theta} = \frac{\cos \theta}{\cos(\theta/2)}.$$

Напомним, что $\omega(\theta, \alpha, \beta)$ - функция, определяемая уравнением

$$\cos \omega(\theta, \alpha, \beta) = \frac{\cos \theta - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Доказательство Теоремы D(i) будет следовать из результата, который описывает изменение расстояний для кодов на сферической шапочке при “расширяющем отображении” сферической шапочки.

Теорема 2.5. Пусть $0 < \phi \leq \pi/2$. Тогда

$$A(n, \theta, \phi) \leq A(n, \theta', s\phi),$$

где

$$\cos \theta' = \cos^2 s\phi + \frac{\sin^2 s\phi}{\sin^2 \phi} (\cos \theta - \cos^2 \phi).$$

Доказательство: Пусть $T_s, s > 1$ - отображение, заданное на $\text{Cap}(n, \phi)$, которое точку $x \in \text{Cap}(n, \phi)$ с $\text{dist}(x, N) = \alpha$ отображает в точку $\mathbf{y} = T_s(x)$ с $\text{dist}(\mathbf{y}, N) = s\alpha$, лежащую на меридиане, проходящем через x . Таким образом,

$$T_s(\text{Cap}(n, \phi)) = \text{Cap}(n, s\phi),$$

и мы полагаем, что $s\phi \leq \pi/2$.

Доказательство теоремы опирается на следующие две леммы:

Лемма 2.2. Пусть $x_1, x_2 \in \text{Cap}(n, \phi)$ с $\text{dist}(x_1, N) = u$, $\text{dist}(x_2, N) = v$ и $\text{dist}(x_1, x_2) = \theta$. Расстояние $\text{dist}(T_s(x_1), T_s(x_2))$ достигает своего минимума, когда $u = v$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{y}_1 = T_s(x_1), \mathbf{y}_2 = T_s(x_2)$. Из сферической теоремы косинусов выводится, что $\cos \theta' = F(u, v, \theta)$, где

$$F(u, v, \theta) := \cos su \cos sv + \rho(u)\rho(v)(\cos \theta - \cos u \cos v),$$

и $\rho(t) := \sin(st)/\sin t$. Для определенности, положим $v \leq u$. Нам надо доказать, что $F(u, v, \theta) \leq F(u, u, \theta)$, где $0 \leq u - v \leq \theta$ и $su \leq 90^\circ$.

Факт 1. (i) Функция $\rho(t)$ - монотонно убывающая для $t \in (0, \pi/2s)$. В самом деле,

$$\rho'(t) = \frac{\cos t \cos st}{\sin^2 t} (s \tan t - \tan st) \leq 0$$

с равенством только если $t = 0$.

(ii) $\rho(t) < s$ (следует из (i) и равенства $\rho(0) = s$).

Факт 2. Функция $S(\theta) = F(u, v, \theta) - F(u, u, \theta)$ достигает максимума при $\theta = u - v$.

Доказательство: Коэффициент при $\cos \theta$ у $S(\theta)$ равен

$$\rho(u)(\rho(v) - \rho(u)) \geq 0.$$

Тогда это утверждение следует из условия $\frac{\pi}{2} \geq \theta \geq u - v$.

Факт 3 (который влечет лемму). $S(\theta) \leq S(u - v) \leq 0$.

Доказательство: Первое неравенство доказано выше. Верно следующее:

$$\begin{aligned} S(u-v) &= \cos s(u-v) - \cos^2 su - \frac{\sin^2 su}{\sin^2 u} (\cos(u-v) - \cos^2 u) \\ &= \cos s(u-v) - 1 - \rho^2(u) \cos(u-v) + \rho^2(u). \end{aligned}$$

Производная по v последнего выражения равна $(s\rho(u-v) - \rho^2(u)) \sin(u-v)$.

Так как $\rho(u) \leq \rho(u-v)$, мы можем написать

$$(s\rho(u-v) - \rho^2(u)) \sin(u-v) \geq (s - \rho(u))\rho(u-v) \sin(u-v) \geq 0,$$

где последнее неравенство следует из (ii), Факт 1. \square

Лемма 2.3. Пусть $x_1, x_2 \in \text{Cap}(n, \phi)$,

$$\text{dist}(x_1, N) = \text{dist}(x_2, N) = u, \quad \text{dist}(x_1, x_2) = \theta, \quad u \leq \phi.$$

Тогда минимум расстояния $\text{dist}(T_s(x_1), T_s(x_2))$ достигается при $u = \phi$.

Доказательство. Поскольку,

$$\cos \theta' = F(u, u, \theta) = 1 - \rho^2(u)(1 - \cos \theta),$$

то утверждение вытекает из Факта 1(i). \square

Из этих двух лемм следует Теорема 2.5. В самом деле, пусть точки $x_1, x_2 \in \text{Cap}(n, \theta, \phi)$ находятся на фиксированном расстоянии θ . Из лемм следует, что расстояние между их образами при отображении T_s минимально, когда точки лежат на границе сферической шапочки. Поэтому, выражение для θ' в теореме, получается по теореме косинусов.

Теорема D(i) следует из Теоремы 2.5, если взять $s = \pi/2\phi$.

Теперь мы докажем Теорему D(ii):

$$B(n, \theta) \leq \frac{A(n-1, \tilde{\theta}) + A(n, \theta)}{2}, \quad \cos \tilde{\theta} = \frac{\cos \theta}{\cos(\theta/2)}.$$

Доказательство. Сначала докажем, что

$$B(n, \theta) \leq \frac{A(n, \theta, [\theta', \pi/2]) + A(n, \theta)}{2}, \quad \theta' = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2},$$

где $A(n, \theta, [\phi, \psi])$ означает максимальную мощность θ -кода, лежащего в сферической полоске, т. е. для любого $p \in$: $\phi \leq \text{dist}(p, N) \leq \psi$.

Рассмотрим θ -код P на полусфере S_+ . Иными словами, $p, q \in P$ если только $\text{dist}(p, q) \geq \theta$. Обозначим, как и выше,

$$P_a := \{p_i \in P : \pi/2 \geq \text{dist}(p_i, N) > \pi/2 - \theta/2\}, \quad a := |P_a|,$$

$$P_b = \{p_i \in P : \text{dist}(p_i, N) \leq \pi/2 - \theta/2\}, \quad b := |P_b|.$$

Предположим, что расстояние между точкой $p = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, и его отражением $p' = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ равно θ , т. е. $\text{dist}(p, p') = \theta$. Тогда $\text{dist}(p', q) \geq \text{dist}(p, q) \geq \theta$. Заметим, что $\text{dist}(P_b, P'_b) \geq \theta$. Следовательно, $Q = P \cup P'_b$ является θ -кодом на сфере \mathbb{S}^{n-1} . Тогда $a + 2b = |Q| \leq A(n, \theta)$. С другой стороны, $a \leq A(n, \theta, [\theta', \pi/2])$. Таким образом, в случае если P - максимальный код, т. е. $B(n, \theta) = a + b$, мы получили искомое неравенство

$$2B(n, \theta) = 2a + 2b \leq A(n, \theta, [\theta', \pi/2]) + A(n, \theta).$$

Чтобы завершить доказательство, мы воспользуемся неравенством:

$$A(n, \theta, [\psi, \phi]) \leq A\left(n - 1, \arccos \frac{\cos \theta - \cos \phi \cos \psi}{\sin \phi \sin \psi}\right)$$

(см. Теорему 1.3). Тогда, при $\phi = \pi/2$ и $\psi = \theta'$, мы получаем требуемое неравенство

$$A(n, \theta, [\theta', \pi/2]) \leq A(n - 1, \tilde{\theta}).$$

□

ГЛАВА 3

СФЕРИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА С ДВУМЯ РАССТОЯНИЯМИ.

3.1. Множества с двумя расстояниями.

Множество \mathcal{S} в \mathbb{R}^n или \mathbb{S}^n (или любом другом метрическом пространстве) называется *множеством с s расстояниями*¹, если расстояние между его точками принимает не более чем s значений.

Если $s = 1$, то ответ очень простой - это множество состоит из вершин правильного m -мерного симплекса, где $m \leq n$. Поэтому, максимальная мощность множества в \mathbb{R}^n с одним расстоянием равна $n+1$. Правильный симплекс вписан в $(n-1)$ -мерную сферу, и поэтому на такой сфере тоже можно выбрать $(n+1)$ точку, что расстояния между любыми двумя точками принимает фиксированное значение.

В случае $s = 2$, ситуация намного сложнее. Отметим, что Эйнхорн и Шёнберг [24] показали, что с точностью до подобия в \mathbb{R}^n существует лишь конечное число множеств с двумя расстояниями, состоящими из более чем $n+2$ точек. Однако, задача их полной классификации выглядит очень сложной.

Имеется пример множества с двумя расстояниями в \mathbb{R}^n , состоящего из $C_{n+1}^2 = n(n+1)/2$ точек. Мы будем обозначать это множество S_n . Рассмотрим правильный симплекс в \mathbb{R}^n с длиной ребра 1. У этого симплекса всего $n(n+1)/2$ рёбер. Их середины будут образовывать множество с двумя расстояниями. Действительно, если два ребра имеют общую вершину, то расстояние между их серединами равно $1/2$ (поскольку соединяющий их отрезок будет средней линией треугольника образованного вершинами этих рёбер). Если не имеют, то $1/\sqrt{2}$, поскольку в этом случае вершины этих рёбер являются вершинами правильного трёхмерного тетраэдра, а между серединами противоположных рёбер правильного тетраэдра именно такое расстояние.

¹по-английски *s-distance set*

Это множество можно описать также с помощью ортонормированного базиса e_1, e_2, \dots, e_{n+1} пространства \mathbb{R}^{n+1} . Рассмотрим точки вида

$$e_i + e_j \quad (1 \leq i < j \leq n + 1).$$

Расстояние между такими точками может быть равно либо $\sqrt{2}$ либо 2, в зависимости от того имеют ли они общую единицу в координатной записи или нет. Сумма координат получившихся $n(n+1)/2$ точек будет равна 2 и поэтому они будут лежать в гиперплоскости задаваемой уравнением $x_1 + \dots + x_{n+1} = 2$.

Ларман, Роджерс и Зейдель [31] доказали, что если множество с двумя расстояниями r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$) в \mathbb{R}^n состоит из более чем $2n + 3$ точек, то

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{k-1}{k}, \text{ где } k \in \mathbb{N} \text{ и } 2 \leq k \leq \frac{1 + \sqrt{2n}}{2}. \quad (3.1)$$

Заметим, что для множества S_n , $k = 2$, т. е. $r_2^2 = 2r_1^2$.

Отметим, что верхние оценки на мощность множеств с s расстояниями в \mathbb{R}^n известны около 30-ти лет. В частности, Блокхаус [11] доказал, что число точек у множества \mathcal{S} с двумя расстояниями в \mathbb{R}^n не превосходит $(n+1)(n+2)/2$. Как показал Лисонек (см. раздел 3.3), эта оценка достигается в размерности 8. Известна верхняя граница и для множеств с s расстояниями в \mathbb{R}^n , она равна C_{n+s}^s [3].

В работе [23] были получены оценки для случая, когда точки множества \mathcal{S} лежат на сфере в \mathbb{R}^n . (Мы будем называть такие множества *сферическими множествами с двумя расстояниями*.) В этом случае, оценка будет $n(n+3)/2$. Заметим, что эта оценка достигается для $n = 2, 6$ и 22 .

В разделе 3.3 мы разбираем работу Лисоника по множествам с двумя расстояниями в \mathbb{R}^d для $n \leq 8$. Кроме верхних оценок и работы Лисоника, основанной на компьютерном переборе, практически никаких результатов для максимальных евклидовых множеств с двумя расстояниями нет. В отличие от евклидова, для сферического случая имеется значительный прогресс.

3.2. Максимальные множества с двумя расстояниями для $n \leq 3$.

Для $n = 1$, легко видеть, что максимальная мощность множества с двумя расстояниями равна трем. Экстремальной конфигурацией тут служат концы отрезка и точка в его середине.

Для $n = 2$, максимальное множество с двумя расстояниями состоит из пяти точек — вершин правильного пятиугольника. Два расстояния — это длина стороны пятиугольника и длина его диагонали.

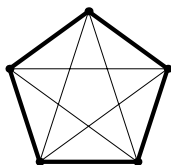


Рис. 3.1

В трехмерном пространстве максимальная мощность равна шести. Это доказал Крофт [19] в 1962 г. Оказывается, что в размерности три имеется 6 различных максимальных множеств. Во-первых, существует два множества с отношением длин равным $\sqrt{2}$. Первое множество — это вершины правильного октаэдра, а второе — призма, основание которой правильный треугольник, а боковые ребра равны стороне этого треугольника (Рис. 3. 2).

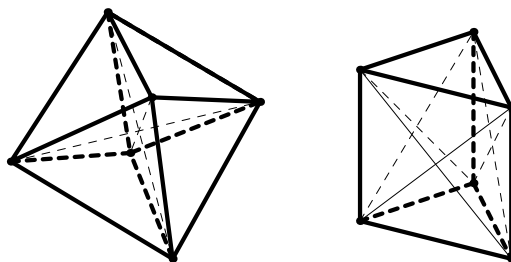


Рис. 3.2

Оставшиеся четыре примера получаются из правильного икосаэдра. В правильном икосаэдре 12 вершин (Рис. 3. 3). У каждой его вершины есть 5 соседних вершин (давайте считать, что до них расстояние равно 1), одна вершина — противоположная, и еще 5 соседних с противоположной вершин, до которых расстояния будут равны “золотому сечению” $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.

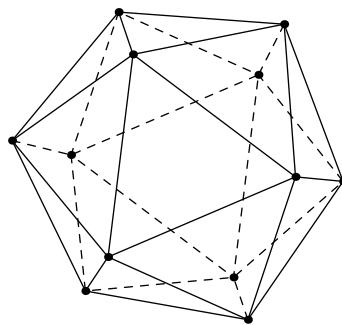


Рис. 3.3

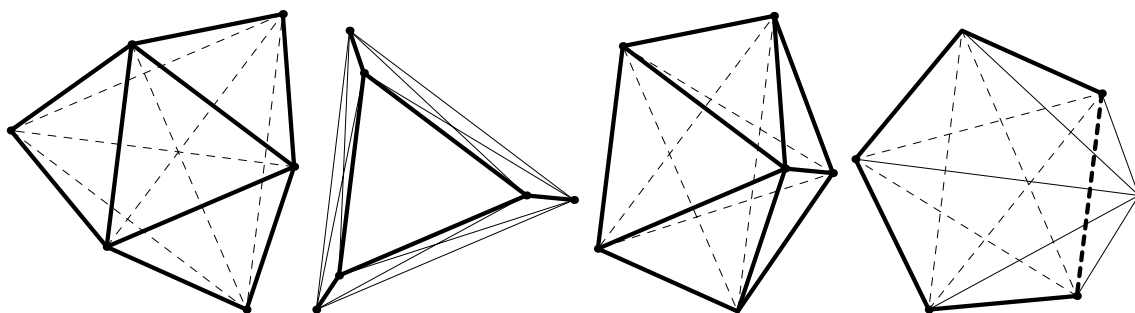


Рис. 3.4

Если из каждой пары противоположных вершин выбирать одну, то получится множество из шести точек с расстояниями между ними - либо 1, либо φ . Оказывается, что таких множеств, с точностью до изометрии, имеется ровно четыре. Эти множества изображены на Рис. 3. 4. (На этом рисунке жирные линии обозначает расстояния равные 1, а тонкие φ .)

3.3. Максимальные множества с двумя расстояниями в пространствах размерности 4, 5, 6, 7, и 8.

В 1997 году Петр Лисонек опубликовал интересную статью [33], в которой он с помощью компьютера показал единственность (с точностью до подобия) максимальных множеств с двумя расстояниями в размерностях 4, 5, 6 и 7 (сами конструкции были известны до него), а в размерности 8 он обнаружил множество состоящее из 45 точек, т. е. максимально возможное согласно границе Блокхауса $(n + 1)(n + 2)/2$.

Рассмотрим эту работу более подробно. Переберем все максимальные множества с двумя расстояниями в \mathbb{R}^n , где $n \leq 8$.

n = 4. В этом случае число точек множества с двумя расстояниями не превосходит 10. И единственным множеством из 10 точек является описанное выше множество S_5 , состоящее из середин рёбер правильного симплекса. Интересно, что граф рёбер большей длины в этой конфигурации образует знаменитый граф Петерсена

n = 5. В этой размерности можно получить больше точек чем даёт нам множество из середин рёбер симплекса — 16 вместо 15. Для этого надо «подкрутить» четыре точки, что позволит добавить еще одну. Опишем эту конструкцию явно (она же является единственной максимальной в пространстве размерности 5). Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 и e_5 — это ортонормированный базис. Наше множество будет состоять из пяти точек вида $-e_i + \sum_{j=1}^5 e_j$ ($1 \leq i \leq 5$),

10 точек вида $e_i + e_j$ ($1 \leq i < j \leq 5$) и начала координат. Легко видеть, что между точками этого множества расстояние либо $\sqrt{2}$ либо 2. Кроме того, все они лежат на сфере с центром в $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 e_i$ и радиуса $\sqrt{5}/2$.

n = 6. Оказывается, что в \mathbb{R}^7 существует 28 прямых проходящих через начало координат, таких, что угол между ними одинаковый, и равен $\arccos 1/3$. Как построить такие прямые? Рассмотрим прямые в \mathbb{R}^8 выходящие из начала координат и с направлениями вдоль векторов, у которых две координаты равны 3, а остальные шесть равны -1 . Таких прямых $C_8^2 = 28$ и все они лежат на гиперплоскости задаваемой уравнением $\sum_{i=1}^8 x_i = 0$. Все вектора, порождающие эти прямые имеют длину $\sqrt{24}$, а скалярное произведение этих векторов равно либо 8 либо -8 . Значит угол между этими векторами либо $\arccos 1/3$ либо $-\arccos 1/3$.

Выберем единичный вектор e на одной из прямой и 27 единичных векторов на оставшихся прямых, так что они образуют с e тупой угол. Легко понять, что концы этих векторов лежат шестимерной плоскости перпендикулярной e и расстояния между ними будет равно либо $\sqrt{4/3}$ либо $\sqrt{8/3}$. (И

опять же, видно, что все они лежат на одной сфере.)

$\mathbf{n} = 7$. В этой размерности Лисонек показал, что максимальное множество единственно, и состоит из 29 точек. Как и в размерности пять, можно «подкрутить» конструкцию образованную серединами рёбер правильного симплекса и добавить еще одну точку.

Мы опишем это множество с помощью ортонормированного базиса e_1, e_2, \dots, e_8 пространства \mathbb{R}^8 . Сумма координат получившихся точек будет равна 2 и поэтому они будут лежать в гиперплоскости, задаваемой уравнением $x_1 + \dots + x_8 = 2$.

7 точек нашего множество задаются так:

$$-e_i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^7 e_k - \frac{1}{2} e_8 \quad (1 \leq i \leq 7)$$

21 точек имеют вид:

$$e_i + e_j \quad (1 \leq i < j \leq 7)$$

и 29-я точка, это точка

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^7 e_k - \frac{3}{2} e_8.$$

Расстояния между точками опять же равны либо $\sqrt{2}$ либо 2, но в отличие от предыдущих случаев, на этот раз точки не будут лежать на одной сфере.

$\mathbf{n} = 8$. Как и в предыдущем случае, зададим это множество в координатах пространства большей размерности. Пусть e_1, e_2, \dots, e_9 ортонормированный базис в \mathbb{R}^9 . Сумма координат построенных точек опять будет равна 2, то есть они будут лежать на гиперплоскости задаваемой уравнением $x_1 + \dots + x_9 = 2$.

9 точек задаются с помощью таких соотношений

$$-e_i + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^9 e_k \quad (1 \leq i \leq 9).$$

Остальные 36 образуют множество S_8 и имеют вид

$$e_i + e_j \quad (1 \leq i < j \leq 9).$$

Как и раньше расстояния между точками будут равны либо $\sqrt{2}$ либо 2. Этот пример является максимальным, поскольку на нём достигается граница Блокхауса. Но является ли эта конструкция единственной? Кроме того, отметим, что получившиеся точки будут лежать на двух концентрических сферах. Может быть это верно и для других экстремальных конфигурациях в больших размерностях? (Эта гипотеза была высказана несколько лет назад А. А. Глазыриным и автором.)

Метод перебора основан на соотношении (3.1), благодаря которому мы можем считать, что мы знаем отношения между расстояниями. После чего надо рассматривать различные графы и проверять реализуются ли они в пространстве соответствующей размерности (для этого существуют классические методы основанные на положительной определенности матрицы скалярных произведений).

В статье Лисонека также приводятся данные о времени, потраченном на вычисления на довольно мощном по меркам 1996-ого года компьютере (DEC Alpha 2000 4/275 с 256 MB RAM и суперкомпьютер IBM/SP2 с 40 узлами RS6000 по 256 MB RAM в каждой). Так для $n = 4$ ушло всего 0.2 секунды, для $n = 5$ — 7 секунд, для $n = 6$ — 12 минут, а для $n = 7$ понадобилось аж 40 дней.

3.4. Граница для сферических множеств с двумя расстояниями.

В этом разделе мы докажем Теорему E:

Пусть \mathcal{S} — это множество с двумя расстояниями расположенное на единичной сфере в \mathbb{R}^n , причем сумма этих (угловых) расстояний не превосходит π . Тогда количество точек в \mathcal{S} не превосходит $n(n+1)/2$.

Доказательство. Будем считать, что скалярные произведения, соответствующие указанным расстояниям равны a и b . Тогда условие на то, что сумма этих расстояний не превосходит π эквивалентна тому, что $a + b \geq 0$.

Сопоставим для каждой точки $p \in \mathcal{S}$ многочлен

$$F_p(x) = (\langle x, p \rangle - a)(\langle x, p \rangle - b). \quad (3.2)$$

Несложно увидеть, что эти квадратичные многочлены — линейно независимы. Покажем, что более того, эти многочлены, однородные линейные функции и многочлен $\|x\|^2 - 1$, образуют линейно - независимую систему.

Пусть

$$\sum_{p \in \mathcal{S}} c_p F_p(x) + \langle v, x \rangle + c(\|x\|^2 - 1) = 0, \quad (3.3)$$

где без ограничения общности, можно считать, что $\|v\| = 1$. Тогда, подставляя в качестве x точки $p \in \mathcal{S}$, получим следующие соотношения:

$$\sum_{p \in \mathcal{S}} c_p F_p(p) + \langle v, p \rangle = 0 \text{ то есть } c_p = \frac{-\langle v, p \rangle}{(1-a)(1-b)}. \quad (3.4)$$

Теперь подставим в соотношение (3.2) в качестве x точки v и $-v$:

$$\sum_{p \in \mathcal{S}} \frac{-\langle v, p \rangle}{(1-a)(1-b)} F_p(v) + 1 = 0; \quad (3.5)$$

$$\sum_{p \in \mathcal{S}} \frac{-\langle v, p \rangle}{(1-a)(1-b)} F_p(-v) - 1 = 0; \quad (3.6)$$

Вычитая (3.6) из (3.5), получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{p \in \mathcal{S}} \frac{-\langle v, p \rangle}{(1-a)(1-b)} (F_p(v) - F_p(-v)) + 2 = \\ &= \sum_{p \in \mathcal{S}} \frac{-\langle v, p \rangle}{(1-a)(1-b)} (-2a - 2b) \langle v, p \rangle + 2 = \sum_{p \in \mathcal{S}} \frac{2(a+b) \langle v, p \rangle^2}{(1-a)(1-b)} + 2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

чего не может быть, поскольку $a + b \geq 0$ и значит

$$\frac{2(a+b) \langle v, p \rangle^2}{(1-a)(1-b)}$$

величина неотрицательная.

Заметим, что размерность пространства квадратичных многочленов на сфере \mathbb{S}^{n-1} равна $n(n+3)/2$. Следовательно,

$$\dim \{F_1, \dots, F_m, L_1, \dots, L_n\} = m + n \leq \frac{n(n+3)}{2},$$

где $\{L_i\}$ - базис пространства однородных линейных функций. Итак,

$$|\mathcal{S}| = m \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Обозначим через $\rho(n)$ максимальную мощность сферического множества с двумя расстояниями в \mathbb{R}^n с $a + b \geq 0$.

Следствие 3.1. *Если $n \geq 7$, то*

$$\rho(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Доказательство. Из Теоремы Е следует, что $\rho(n) \leq n(n+1)/2$. С другой стороны, мощность множества S_n равна $n(n+1)/2$ и у него $a + b \geq 0$ для $n \geq 7$. В самом деле, у этого множества

$$a = \frac{n-3}{2(n-1)}, \quad b = \frac{-2}{n-1}.$$

Таким образом,

$$a + b = \frac{n-7}{2(n-1)} \geq 0.$$

□

3.5. Метод Дельсарта для множеств с двумя расстояниями.

В разделе 1.2 мы разбирали применение метода Дельсарта для сферических кодов. Там было показано, что если $f \in \mathbf{G}_n^+$ (т. е. f является линейной комбинацией многочленов Гегенбауэра с неотрицательными коэффициентами) и $f(t) \leq 0$ для всех $t \in T = [-1, z]$, то для любого ψ -кода P с $\cos \psi = z$ верна оценка:

$$|P| \leq \frac{f(1)}{c_0}.$$

В действительности, ограничение $T = [-1, z]$ не по-существу, T может быть любым подмножеством полуинтервала $[-1, 1)$. Таким образом, граница Дельсарта для произвольного T может быть сформулирована так:

Пусть T - подмножество $[-1, 1)$. Предположим, что S - набор единичных векторов в \mathbb{R}^n такой, что множество скалярных произведений различных векторов из S лежит в T . Предположим, что

$$f(t) = \sum_k f_k G_k^{(n)}(t), \quad \text{где } f_k \geq 0.$$

Тогда, если $f(t) \leq 0$ для всех $t \in T$ и $f_0 > 0$, то

$$|S| \leq \frac{f(1)}{f_0}.$$

В случае, когда S - сферическое множество с двумя расстояниями со скалярными произведениями a и b , т. е. $T = \{a, b\}$, условие “ $f(t) \leq 0$ для всех $t \in T$ ” выглядит очень просто: $f(a) \leq 0$ и $f(b) \leq 0$. Сейчас мы зададим список из пяти многочленов $P_i(t)$, $i = 1, \dots, 5$, которые и будут использоваться в качестве “подходящей” функции f для получения верхней границы мощности сферических множеств с двумя расстояниями. Заметим, что степени этих многочленов не превышают 4.

Пусть заданы параметры: n, a, b .

$$i = 1 : P_1(t) = (t - a)(t - b) = f_0^{(1)} + f_1^{(1)}t + f_2^{(1)}G_2^{(n)}(t).$$

$$i = 2 : P_2(t) = (t - a)(t - b)(t + c) = f_0^{(2)} + f_1^{(2)}t + f_2^{(2)}G_2^{(n)}(t) + f_3^{(2)}G_3^{(n)}(t), \text{ где } c \text{ определяется из уравнения } f_1^{(2)} = 0.$$

$$i = 3 : P_3(t) = (t - a)(t - b)(t + a + b) = f_0^{(3)} + f_1^{(3)}t + f_2^{(3)}G_2^{(n)}(t) + f_3^{(3)}G_3^{(n)}(t). \text{ Заметим, что } f_2^{(3)} = 0.$$

$$i = 4 : P_4(t) = (t - a)(t - b)(t^2 + ct + d) = \sum_k f_k^{(4)}G_k^{(n)}(t), \text{ где } c \text{ и } d \text{ определяются из уравнений } f_1^{(4)} = f_2^{(4)} = 0.$$

$i = 5$: $P_5(t) = (t-a)(t-b)(t^2+ct+d) = \sum f_k^{(5)} G_k^{(n)}(t)$, где c и d определяются из уравнений $f_2^{(5)} = f_3^{(5)} = 0$.

Обозначим через $D_i^{(n)}$ множество всех пар (a, b) таких, что многочлен $P_i(t)$ корректно определен (т. е. уравнения на параметры имеют решения), все $f_k^{(i)} \geq 0$, и $f_0^{(i)} > 0$. Например,

$$D_1^{(n)} = \left\{ (a, b) \in \mathbf{I}^2 : f_1^{(1)} = -a - b \geq 0, f_0^{(1)} = ab + \frac{1}{n} > 0 \right\},$$

$$D_2^{(n)} = \left\{ (a, b) \in \mathbf{I}^2 : a + b \neq 0, c \geq a + b, f_0^{(2)} = abc + \frac{c - a - b}{n} > 0 \right\},$$

где

$$\mathbf{I} = [-1, 1), \quad c = \frac{ab(n+2) + 3}{(n+2)(a+b)}.$$

Пусть

$$U_i^{(n)}(a, b) := \frac{P_i(1)}{f_0^{(i)}}.$$

Заметим, что для всех многочленов верно равенство $P_i(a) = P_i(b) = 0$.

Тогда, мы получаем следующую теорему:

Теорема 3.1. Пусть S — сферическое множество с двумя расстояниями в \mathbb{R}^n со скалярными произведениями a и b . Предположим, что $(a, b) \in D_i^{(n)}$ при некотором i , $1 \leq i \leq 5$. Тогда

$$|S| \leq U_i^{(n)}(a, b).$$

3.6. Границы $Q_k^{(n)}(a)$.

Верхние границы $U_i^{(n)}(a, b)$ являются функциями двух переменных от a и b . Вместе с тем, теорема Лармана-Роджерса-Зейделя [31] позволяет свести эту границу к функции от одной переменной a и дискретного параметра k .

Рассмотрим S - сферическое множество с двумя расстояниями в \mathbb{R}^n , у которого скалярные произведения равны a и b , и, без ограничения общности можно считать, что $a > b$. Пусть $c = \sqrt{2 - 2a}$, $d = \sqrt{2 - 2b}$. Тогда c и d будут евклидовыми расстояниями множества S .

Пусть

$$b_k(a) := \frac{ka - 1}{k - 1}.$$

Если k определяется уравнением: $b_k(a) = b$, то $(k - 1)/k = c^2/d^2$. Следовательно, если $|S| > 2n + 3$, то по теореме Лармана-Роджерса-Зейделя, k является целым и $k \in \{2, \dots, K(n)\}$. Здесь,

$$K(n) := \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{2n}}{2} \right\rfloor.$$

Обозначим через $D_{i,k}^{(n)}$ множество всех таких действительных a , что $(a, b_k(a)) \in D_i^{(n)}$. Пусть

$$R_{i,k}^{(n)}(a) := \begin{cases} U_i^{(n)}(a, b_k(a)) & \text{для } a \in D_{i,k}^{(n)} \\ \infty & \text{для } a \notin D_{i,k}^{(n)} \end{cases}$$

$$Q_k^{(n)}(a) := \min_i \left\{ R_{i,k}^{(n)}(a) \right\}$$

Из Теоремы 3.1 вытекает следующая верхняя граница для $|S|$:

Теорема 3.2. Пусть S - сферическое множество с двумя расстояниями в \mathbb{R}^n со скалярными произведениями a и $b_k(a)$. Тогда

$$|S| \leq Q_k^{(n)}(a).$$

Разберем следующий пример. Если $n = 25$, то $K(n) = 4$. Тогда $k = 2, 3$ или 4 . Предположим, что $k = 3$, тогда $b = b_k(a) = (3a - 1)/2$ и $a + b < 0$, только если $a < 1/5$. Так как $b \geq -1$, то $a \geq -1/3$, и стало быть $a \in [-1/3, 1/5)$. Заметим, что $\max \{Q_3^{(25)}(a) : a \in [-1/3, 1/5)\} \approx 284.14$ (см. Рис. 3.5), и поэтому мощность S с такими параметрами не превосходит 284.

В общем случае, если $a + b_k(a) < 0$ и $b_k(a) \geq -1$, то

$$a \in I_k := \left[\frac{2 - k}{k}, \frac{1}{2k - 1} \right).$$

Наша задача сводится к вычислению максимума функции $Q_k^{(n)}(a)$ на интервале I_k . Заметим, что $Q_k^{(n)}(a)$ является кусочно-рациональной функцией,

а $D_{i,k}^{(n)}$ - полуалгебраическое множество на \mathbb{R} . Возможно выписать и явные выражения для этих функций и их максимумов на I_k . В любом случае, поскольку здесь мы имеем дело с функциями от одной переменной, то несложно применить численные методы, гарантирующие значение максимума с любой наперед заданной точностью.

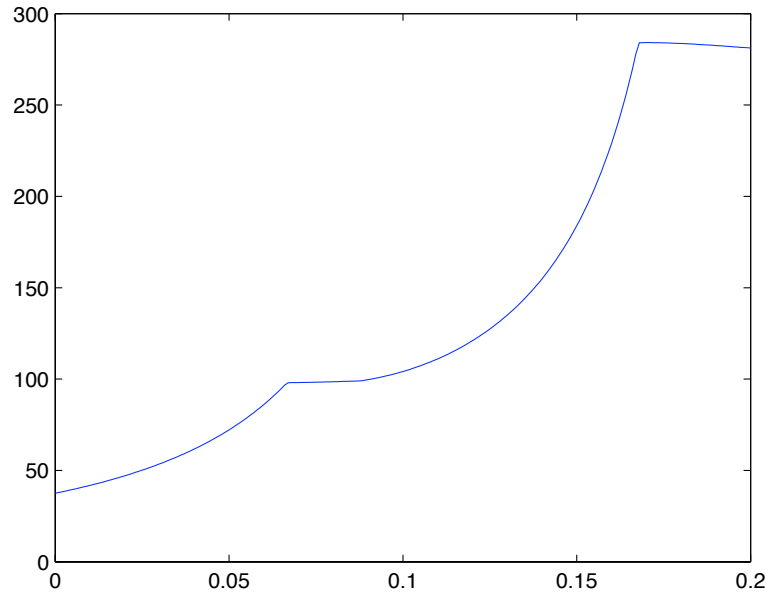


Рис. 3.5 График функции $Q_3^{(25)}(a)$.

3.7. Максимальные сферические множества с двумя расстояниями.

В этом разделе мы используем Теорему 3.2 для оценки мощности сферического кода с $a + b < 0$. В совокупности с Теоремой Е это даст нам доказательство Теоремы F.

Пусть S , $|S| > 2n + 3$, - сферическое множество с двумя расстояниями в \mathbb{R}^n со скалярными произведениями a и $b_k(a)$. Тогда $k \in \{2, \dots, K(n)\}$ и $-1 \leq b_k(a) < a < 1$.

Пусть $\tilde{K}(n) := \max\{K(n), 2\}$. Для данных n и $k = 2, \dots, \tilde{K}(n)$, обозначим через $\Omega(n, k)$ множество всех таких S в \mathbb{R}^n с $a + b_k(a) < 0$. Пусть $\omega(n, k)$ максимальную мощность $S \in \Omega(n, k)$.

Определим,

$$\varphi(n, k) := \sup_{a \in I_k} \left\{ Q_k^{(n)}(a) \right\},$$

$$\widehat{\omega}(n, k) := \max\{\lfloor \varphi(n, k) \rfloor, 2n + 3\}.$$

Обозначим через $\widehat{\omega}(n)$ максимум в последовательности $\widehat{\omega}(n, 2), \dots, \widehat{\omega}(n, \widetilde{K}(n))$, и через $\omega(n)$ - максимальную мощность множества с двумя расстояниями в S на \mathbb{S}^{n-1} с $a + b < 0$. Тогда $g(n) = \max\{\omega(n), \rho(n)\}$. (Напомним, что через $g(n)$ мы обозначаем максимальную мощность сферического множества с двумя расстояниями в \mathbb{R}^n .)

Так как из Теоремы 3.2 следует $\omega(n, k) \leq \widehat{\omega}(n, k)$, то получаем:

Теорема 3.3. $g(n) \leq \max\{\widehat{\omega}(n), \rho(n)\}$.

Итак, для $g(n)$ у нас имеются следующие границы: $\rho(n) \leq g(n) \leq \max\{\widehat{\omega}(n), \rho(n)\}$. Напомним, что по Следствию 3.1: $\rho(n) = n(n+1)/2$ для $n \geq 7$.

Мы нашли численно $\widehat{\omega}(n)$ для $7 \leq n \leq 40$. Результаты вычислений содержатся в Таблице 1.

Из таблицы видно, что $\widehat{\omega}(n) \leq \rho(n)$ для $6 < n < 40$, $n \neq 22, 23$. Следовательно, в этих случаях верно равенство $g(n) = \rho(n)$. Для $n = 23$ мы получили $g(23) \leq 277$. Однако, $g(23) \geq \rho(23) = 276$. Это доказывает Теорему F:

Если $6 < n < 22$ или $23 < n < 40$, то

$$g(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

В случае $n = 23$, $g(n) = 276$ или 277 .

Мы уже отмечали во Введении, что в работе А. Барга и В.-Ш. Ю [6] Теорема F была расширена для $n = 23$ и $40 \leq n \leq 93$ ($n \neq 46, 78$). Таким образом, с учетом работы Лисонека (см. 3.3), задача о максимальной мощности сферических множеств с двумя расстояниями решена для всех $n \leq 93$, за исключением $n = 46, 78$. При $6 \leq n \leq 93$, во всех случаях, кроме $n = 6, 22, 46, 78$

(эти числа являются числами вида $(2m + 1)^2 - 3$ при $m = 1, 2, 3, 4$) верно равенство $g(n) = n(n + 1)/2$. Интересно доказать общую гипотезу:

Мощность максимального сферического множества с двумя расстояниями в \mathbb{R}^n , где $n > 6$ и $n \neq (2m + 1)^2 - 3$, $m \in \mathbb{N}$, равна $n(n + 1)/2$.

| n | $\widehat{\omega}$ | ρ | k | n | $\widehat{\omega}$ | ρ | k |
|-----|--------------------|--------|-----|-----|--------------------|--------|-----|
| 7 | 28 | 28 | 2 | 24 | 280 | 300 | 3 |
| 8 | 31 | 36 | 2 | 25 | 284 | 325 | 3 |
| 9 | 34 | 45 | 2 | 26 | 288 | 351 | 3 |
| 10 | 37 | 55 | 2 | 27 | 294 | 378 | 3 |
| 11 | 40 | 66 | 2 | 28 | 299 | 406 | 3 |
| 12 | 44 | 78 | 2 | 29 | 305 | 435 | 3 |
| 13 | 47 | 91 | 2 | 30 | 312 | 465 | 3 |
| 14 | 52 | 105 | 2 | 31 | 319 | 496 | 3 |
| 15 | 56 | 120 | 2 | 32 | 327 | 528 | 3 |
| 16 | 61 | 136 | 2 | 33 | 334 | 561 | 3 |
| 17 | 66 | 153 | 2 | 34 | 342 | 595 | 3 |
| 18 | 76 | 171 | 3 | 35 | 360 | 630 | 2 |
| 19 | 96 | 190 | 3 | 36 | 416 | 666 | 2 |
| 20 | 126 | 210 | 3 | 37 | 488 | 703 | 2 |
| 21 | 176 | 231 | 3 | 38 | 584 | 741 | 2 |
| 22 | 275 | 253 | 3 | 39 | 721 | 780 | 2 |
| 23 | 277 | 276 | 3 | 40 | 928 | 820 | 2 |

Таблица 3.1

3.8. Максимальные сферические множества с тремя расстояниями.

Задача о множестве с тремя расстояниями довольно трудна. На плоскости, оно может состоять максимум из семи точек, и существует две такие

конфигурации: вершины правильного семиугольника и вершины правильного шестиугольника и его центр. М. Шиохара, совсем недавно (сентябрь, 2013), анонсировал решение этой задачи в размерности 3 [52]. Он утверждает, что в трехмерном пространстве, единственное максимальное множество с тремя расстояниями — это икосаэдр (Рис. 3. 3).

В совместной работе с Х. Нозаки [42] мы изучали множества с тремя расстояниями в пространстве Хэмминга, пространстве Джонсона и на сфере. Наши основные результаты о сферических множествах с тремя расстояниями приведены в Теореме G.

Теорема G. Обозначим через $T(n)$ максимальную мощность сферического множества с тремя расстояниями в n -мерном пространстве. Тогда

1. $T(8) = 120$ и $T(22) = 2025$.
2. $T(4) \leq 27$, $T(5) \leq 39$ и $T(7) \leq 91$.
3. $T(n) \leq n(n+1)(n+2)/6$ для $n = 6$ и $9 \leq n \leq 19$.
4. $T(n) \leq (n+3)(n^2+2)/6$ для $20 \leq n \leq 30$.
5. $T(n) \leq (n^2-1)(n+6)/6$ для $31 \leq n \leq 50$.

В доказательстве этой теоремы применима схема доказательства Теоремы F. Здесь мы приведем набросок доказательства. С его деталями можно ознакомиться в [42].

Доказательство. В доказательстве Теоремы F важную роль играет теорема Лармана-Роджерса-Зейделя. Эта теорема была обобщена Х. Нозаки для множеств с s -расстояниями [44].

Пусть $X \subset \mathbb{S}^{n-1}$ - множество с тремя расстояниями с тремя скалярными произведениями $\{d_1, d_2, d_3\}$, где $d_1 < d_2 < d_3 < 1$. Тогда из теоремы Нозаки следует, что

$$d_1 = \frac{K_1 - d_3 K_1 K_3 - (d_3 - 1) \sqrt{-K_1 K_2 K_3}}{K_1 (K_1 + K_2)},$$

$$d_2 = \frac{K_2 - d_3 K_2 K_3 + (d_3 - 1) \sqrt{-K_1 K_2 K_3}}{K_2 (K_1 + K_2)}.$$

Здесь, как и в теореме Лармана-Роджерса-Зейделя, числа K_i — целые.

Заметим, что величина d_3 должна быть положительна. В противном случае, по теореме Ранкина число точек не превосходит $2n + 2$. Таким образом, у нас есть переменная d_3 , значения которой лежат в интервале $(0,1)$. Кроме того, у нас есть конечное число возможностей для целых переменных K_i . Мы опять свели задачу к границам, которые являются функциями от одной переменной d_3 .

Верхние границы для мощности кодов, как и выше, могут быть получены численно. Заметим, что здесь имеется аналог Теоремы E. Это позволяет для d_3 разбивать область определения на две части, для одной из которых граница получается из аналога Теоремы E, а для другой — методом Дельсарта.

Для $n = 8$ и $n = 22$, существуют примеры на которых достигается верхняя грань.

Для $n = 8$, такой пример может быть построен как подмножество минимальных векторов решетки E_8 . Всего их 240. Если считать, что все минимальные векторы единичной длины, то их скалярные произведения могут принимать значения из множества $\{0, -1, \pm 1/2\}$. Если из каждой антиподальной (т. е. v и $-v$) пары векторов выбирать по одному, то получится 120 векторов скалярные произведения которых принимают три значения $\{0, \pm 1/2\}$.

Для $n = 22$, пример строится как подмножество минимальных векторов решетки Лича. Пусть $X \subset \mathbb{S}^{23}$ - набор минимальных векторов. Для фиксированных $x, y \in X$ таких, что $x \cdot y = -1/4$, получим

$$Y = \{z \in X \mid z \cdot x = 1/2, z \cdot y = 0\}.$$

Тогда , множество $Y \subset \mathbb{S}^{21}$ состоит из 2025 точек (единичных векторов) и их скалярные произведения могут принимать три значения $\{7/22, -1/44, -4/11\}$. □

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Anstreicher K., *The thirteen spheres: A new proof*, Discrete and Computational Geometry, v. 31 (2004), p. 613-625.
2. Bachoc C. and Vallentin F., *Semidefinite programming, multivariate orthogonal polynomials, and codes in spherical caps*, European J. Combin., v. 30 (2009), p. 625-637.
3. Bannai E., Bannai K., and D. Stanton, *An upper bound for the cardinality of an s -distance set in real Euclidean space*, Combinatorica, v, 3 (1983), p. 147-152.
4. Barg A. and Musin O.R., *Codes in spherical caps*, Advances in Math. of Communications, v. 1 (2007), p. 131-149.
5. Barg A. and Musin. O.R., *Bounds on sets with few distances*, J. of Comb. Theory, Ser. A, v. 118 (2011), p. 1465-1474.
6. Barg A. and Yu W. H., *New bounds for spherical two-distance sets*, Experimental Math., v. 22, no. 2, 2013, p. 187-194.
7. Bezdek A. and Bezdek K., *A note on the ten-neighbour packing of equal balls*, Beiträge zur Alg. und Geom., v. 27 (1988), p. 49-53.
8. Bezdek K., *Sphere packings in 3-space*, Proceedings of the COE Workshop on Sphere Packings, Kyushu University Press (2004), p. 32-49.
9. Bezdek K., *Sphere packing revisited*, European J. Comb., v. 27 (2006), p. 864-883.
10. Bezdek K. and Brass P., *On k^+ -neighbour packings and one-sided Hadwiger configurations*, Contributions to Algebra and Geometry, v. 4 (2003), p. 493-498.
11. Blokhuis A., *A new upper bound for the cardinality of 2-distance set in Euclidean space*, Ann. Discrete Math., v. 20 (1984), p. 65-66.

12. Boyvalenkov P. G., Danev D. P. and Bumova S. P., *Upper bounds on the minimum distance of spherical codes*, IEEE Trans. Inform. Theory, v. 42(5), 1996, p. 1576-1581.
13. Boyvalenkov P., Dodunekov S., Musin O.R., *A survey on the kissing numbers*, Serdica Mathematical Journal, v. 38 (2012), p. 507-522.
14. Böröczky K., *Packing of spheres in spaces of constant curvature*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., v. 32 (1978), p. 243-261.
15. Böröczky K., *The Newton-Gregory problem revisited*, Proc. Discrete Geometry, Marcel Dekker, 2003, p. 103-110.
16. Carlson B.C., *Special functions of applied mathematics*, Academic Press, 1977.
17. Casselman B., *The difficulties of kissing in three dimensions*, Notices Amer. Math. Soc., v. 51 (2004), p. 884-885.
18. Coxeter H.S.M., *An upper bound for the number of equal nonoverlapping spheres that can touch another of the same size*, Proc. of Symp. in Pure Math. AMS, v. 7 (1963), p. 53-71 = Chap. 9 of Coxeter H.S.M., *Twelve Geometric Essays*, Southern Illinois Press, Carbondale Il, 1968.
19. Croft H. T., *9-point and 7-point configurations in 3-space*, Proc. London Math. Soc.(3), v. 12 (1962), p. 400-424.
20. Danzer L., *Finite point-sets on \mathbf{S}^2 with minimum distance as large as possible*, Discr. Math., v. 60 (1986), p. 3-66.
21. Danzer L., Grünbaum B., and Klee V., *Helly's theorem and its relatives*, Proc. Sympos. Pure Math., v. 7, AMS, Providence, RI, 1963, p. 101-180.
22. Delsarte Ph., *Bounds for unrestricted codes by linear programming*, Philips Res. Rep., v. 27 (1972), p. 272-289.
23. Delsarte Ph., Goethals J. M. and Seidel J. J., *Spherical codes and designs*, Geom. Dedic., v. 6 (1977), p. 363-388.

24. Einhorn S. J. and Schoenberg I. J., *On Euclidean sets having only two distances between points I, II*, Indag. Math., v. 14 (1966), p. 479-488, 489-504.
25. Fejes Tóth G., *Ten-neighbor packing of equal balls*, Periodica Math. Hungar., v. 12 (1981), c. 125-127.
26. Fejes Tóth L and Sachs H., *Research problem 17*, Periodica Math. Hungar., v. 7 (1976), p. 125-127.
27. Hales T., *The status of the Kepler conjecture*, Mathematical Intelligencer, v. 16 (1994), p. 47-58.
28. Hoppe R., *Bemerkung der Redaction*, Archiv Math. Physik (Grunet), v. 56 (1874), p. 307-312.
29. Hsiang W.-Y., *The geometry of spheres*, in Differential Geometry (Shanghai,1991), Word Scientific, River Edge, NJ, 1993, p. 92-107.
30. Hsiang W.-Y., *Least Action Principle of Crystal Formation of Dense Packing Type and Kepler's Conjecture*, World Scientific, 2001.
31. Larman D. G., Rogers C. A. , and Seidel J. J., *On two-distance sets in Euclidean space*, Bulletin of the London Mathematical Society, v. 9 (3), p. 261-267, 1977.
32. Leech J., *The problem of the thirteen spheres*, Math. Gazette, v. 41 (1956), p. 22-23.
33. Lisoněk P., *New maximal two-distance sets*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, v. 77(2), p. 318-338, 1997.
34. Maehara H., *Isoperimetric theorem for spherical polygons and the problem of 13 spheres*, Ryukyu Math. J., v. 14 (2001), p. 41-57.
35. Mittelman H. D. and Vallentin F., *High accuracy semidefinite programming bounds for kissing numbers*, Experimental Mathematics, v. 19 (2009), p. 174-178.
36. Musin O. R., *The kissing problem in three dimensions*, Discrete Comput. Geom., v. 35 (2006), p. 375-384.

37. Musin O.R., *The one-sided kissing number in four dimensions*, Periodica Math. Hungar., v. 53 (2006), p. 209-225.
38. Musin O.R., *The kissing number in four dimensions*, Annals of Math., v. 168 (2008), no. 1, p. 1-32
39. Musin O.R., *Bounds for codes by semidefinite programming*, Тр. МИАН, т. 263 (2008), с. 143-158.
40. Musin O.R., *Spherical two-distance sets*, J. Comb. Theory, Ser. A, v. 116 (2009), p. 988-995.
41. Musin O.R., *Positive definite functions in distance geometry*, European Congress of Mathematics, Amsterdam, 14-18 July, 2008, p. 115-134, EMS Publ., 2010.
42. Musin O.R., Nozaki H, *Bounds on three- and higher-distance sets*, European Journal of Combinatorics, v. 32 (2011) p. 1182-1190
43. Musin O.R., Tarasov A.S., *The Strong Thirteen Spheres Problem*, Discrete Comput. Geom., v. 48 (2012), p. 128–141.
44. Nozaki H., *A generalization of Larman-Rogers-Seidel's theorem*, Discrete Math. v. 311 (2011), p. 792-799.
45. Odlyzko A. M. and Sloane N.J.A., *New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions*, J. of Combinatorial Theory v. A26 (1979), p. 210-214.
46. Pfender F. and G.M. Ziegler G. M., *Kissing numbers, sphere packings, and some unexpected proofs*, Notices Amer. Math. Soc., v. 51 (2004), p. 873-883.
47. Sachs H., *No more than nine unit balls can touch a closed hemisphere*, Studia Sci. Math. Hungar., v. 21 (1986),p. 203-206.
48. Schoenberg I. J., *Positive definite functions on spheres*, Duke Math. J., v. 9 (1942), p. 96-107.
49. Schütte R. and v. d. Waerden B. L., *Auf welcher Kugel haben 5,6,7,8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand 1 Platz?*, Math. Ann., v. 123 (1951), p. 96-124.

50. Schütte R. and v. d. Waerden B. L., *Das Problem der dreizehn Kugeln*, Math. Ann., v. 125 (1953), p. 325-334.
51. Szpiro G. G., *Kepler's conjecture*, Wiley, 2002.
52. Shinohara M., *Uniqueness of maximum three-distance sets in the three-dimensional Euclidean space*, preprint, arXiv:1309.2047, 2013.
53. L. Szabó, 21-neighbour packing of equal balls in the 4-dimensional Euclidean space, *Geom. Dedicata* **38** (1991), 193-197.
54. Акопян А.В., Кабатянский Г.А., Мусин О.Р., *Контактные числа, коды и сферические многочлены*, Математическое просвещение. Третья Серия, Вып. 16 (2012), с. 57-74.
55. Акопян А.В., Мусин О.Р., *О множествах с двумя расстояниями*, Математическое просвещение. Третья Серия, Вып. 17 (2013), с. 136-151.
56. Арестов В. В., Бабенко А. Г. , *О схеме Дельсарта оценки контактных чисел*, Труды Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН, т. 219 (1997), с. 44-73.
57. Кабатянский Г. А. и Левенштейн В. И., *О границах для упаковок на сфере и в пространстве*, Проблемы передачи информации, т. 14(1), с. 3-25, 1978.
58. Конвей Д. и Слоэн Н. Д. А., *Упаковки шаров, решетки и группы*, М.: Мир, 1990.
59. Левенштейн В. И., *it О границах для упаковок в n-мерном евклидовом пространстве*, Докл. АН СССР, т. 245 (1979), с. 1299-1303.
60. Мусин О. Р., *Проблема двадцати пяти сфер*, УМН, т. 58 (2003), № 4, с. 153-154.
61. Сеге Г. , *Ортогональные многочлены*, М.: ГИФМЛ, 1962.
62. Фейеш Тот Л., *Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве*, М.: Физматлит, 1958.