Российская академия наук
Математический институт им. В. А. Стеклова

На правах рукописи
УДК 519.21

Муравлёв Алексей Анатольевич

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ РАЗЛИЧЕНИЕ ГИПОТЕЗ ДЛЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ С РАЗЛАДКОЙ И ФРАКТАЛЬНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

01.01.05 — теория вероятностей
и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Москва, 2013 г.

Работа выполнена в отделе теории вероятностей и математической статистики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.

Научный руководитель: академик РАН, д. ф.-м. н., профессор,
главный научный сотрудник МИАН
Ширяев Альберт Николаевич

Официальные оппоненты: д. ф.-м. н., профессор,
заведующий кафедрой Ростовского государственного строительного университета
Павлов Игорь Викторович

д. ф.-м. н., профессор,
главный научный сотрудник ИППИ РАН
Пирогов Сергей Анатольевич

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладных математических исследований Карельского Научного Центра РАН

Защита диссертации состоится 10 октября 2013 года в 15:00 на заседании диссертационного совета Д 002.022.01 при МИАН по адресу: 119991, Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН по адресу: Москва, ул. Губкина, д. 8, 8-й этаж.

Автореферат разослан ____________________

Учёный секретарь диссертационного
совета Д 002.022.01 при МИАН,
доктор физико-математических наук,
профессор В. А. Ватутин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Диссертация посвящена вопросам последовательного различения гипотез для моделей *броуновского движения с "разладкой"* и *фрактального броуновского движения*. Также в диссертации получено представление фрактального броуновского движения в виде линейного функционала от бесконечномерного диффузионного процесса, что представляет самостоятельный интерес и за рамками рассматриваемых задач.

В отличие от классических областей математической статистики, где объём выборки устанавливается заранее, в *последовательном анализе* объём выборки не фиксирован, а определяется в процессе анализа статистических данных, получаемых последовательно. В некоторых случаях это позволяет сделать заключение гораздо раньше, чем это было бы возможно при использовании классических методов. Начало данному направлению было положено в работах А. Вальда[1] в связи с изучением вопросов производственного контроля качества. Впоследствии методы статистического последовательного анализа нашли широкое применение в медицине[2], эпидемиологии[3], финансовой инженерии[4], задачах обнаружения "атак" в компьютерных сетях[5] и других областях.

Как и в других разделах математической статистики, отдельный класс составляют *байесовские* постановки, в которых предполагается, что неизвестные параметры не фиксированы, а являются *случайными величинами*. Двумя фундаментальными задачами статистического последовательного анализа являются задача о различении гипотез и задача о разладке.

Задача о различении гипотез относится к вопросу о том, как по наблюдениям за случайным процессом определить его вероятностные характери-

[1] *Вальд А.* Последовательный анализ (пер. с англ.). — Москва: Физматгиз, 1960

[2] *Frisen M.* Evaluations of methods for statistical surveillance // *Statistics in Medicine.* — 1992. — Vol. 11, no. 11.— Pp. 1489–1502

[3] *Weatherall J. A. C., Haskey J. C.* Surveillance of malformations. // *British Medical Bulletin.* — 1976. — Vol. 32, No 1. P. 39–44

[4] *Chen J., Gupta A. K.* Testing and locating variance changepoints with application to stock prices // *Journal of the American Statistical Association.* — 1997. — Vol. 92, no. 438.— Pp. 739–747

[5] *Kim H., Rozovskii B. L., Tartakovsky A. G.* A nonparametric multichart CUSUM test for rapid detection of DOS attacks in computer networks // *International Journal of Computing and Information Sciences.* — 2004. — Vol. 2, no. 3.— Pp. 149–158

стики. Предполагается априори известным, что вероятностный закон распределения данного процесса принадлежит некоторому семейству. Задача состоит в том, как по наблюдениям определить точный вид данного закона. Поскольку продолжительность наблюдений заранее не фиксирована, то от исследователя требуется не только вынести как можно более правильное суждения об истинном законе распределения наблюдаемого процесса, но и сделать это за кратчайшее время.

Фундаментальным результатом в данной области является *последовательный критерий отношения правдоподобия*, предложенный А. Вальдом и предназначенный для проверки двух простых гипотез. А. Вальд и Дж. Волфовиц[6] продемонстрировали преимущества данного критерия на задаче различения двух простых гипотез для случая, когда наблюдению подлежит последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин. А именно, ими было показано, что при справедливости *каждой* из двух гипотез он обладает наименьшим средним временем наблюдения среди всех последовательных критериев с такими же вероятностями ошибочных решений.

В. С. Михалевич и А. Н. Ширяев[7] получили решение *байесовской* задачи последовательного различения двух простых гипотез о величине сноса броуновского движения, из которого следует, что в *вариационной* постановке критерий Вальда является оптимальным также и для данной модели.

В случае, когда *истинное* значение параметра не совпадает ни с одной из гипотез, в методе А. Вальда время наблюдения может оказываться достаточно большим. В связи с этим Дж. Кифером и Л. Вейсом был предложен критерий[8], состоящий в минимизации *максимального* (при всевозможных значениях параметра) среднего время наблюдения при ограничении на вероятность ошибочного решения.

Наиболее известным примером байесовской задачи различения *слож-*

[6] *Wald A., Wolfowitz J.* Optimum character of the sequential probability ratio test // *The Annals of Mathematical Statistics.* — 1948. — Vol. 19, no. 3. — Pp. 326–339

[7] *Ширяев А. Н.* О двух задачах последовательного анализа // *Кибернетика.* — 1967. — Т. 2. — С. 79–80

[8] *Kiefer J., Weiss L.* Some properties of generalized sequential probability ratio tests // *The Annals of Mathematical Statistics.* — 1957. — Vol. 28, no. 1. — Pp. 57–74

ных гипотез является рассмотренная Г. Черновым[9] задача определения *знака* сноса μ броуновского движения по последовательным наблюдениям, где μ предполагалась гауссовской случайной величиной с известными параметрами, а штраф за принятие неправильного решения был выбран пропорциональным абсолютному значению μ. Впоследствии Г. Чернов и Дж. Брейквелл[10,11,12] исследовали асимптотически оптимальные правила для данного критерия и рассмотрели дискретный аналог данной задачи.

Более подробный обзор известных результатов, связанных с последовательным различением гипотез, можно найти в работе[13].

Задача о разладке относится к вопросу о наилучшем определении момента смены вероятностных характеристик некоторого случайного процесса. Предполагается априори известным, что вид закона распределения наблюдаемого процесса может измениться в некоторый (случайный) момент времени. На практике данное изменение может соответствовать поломке оборудования, что вызывает резкий рост доли брака в выпуске продукции, или же, например, соответствовать резкому изменению ожиданий инвесторов на рынке, что приводит к изменению тренда финансового актива. Как и в задаче о различении гипотез, требуется найти не только наиболее точное решение, но и сделать это за кратчайшее время. Хорошие критерии должны обладать как небольшим средним запаздыванием, так и малой вероятностью "ложной тревоги". В данном случае потребность использования последовательных методов становится очевидной в силу самой природы задачи.

Первые результаты в этом направлении были получены У. Шьюартом[14]. Предложенный им метод основывался на том, что при изменении харак-

---

[9] *Chernoff H.* Sequential tests for the mean of a Normal distribution // *Fourth Berkeley Symposium.* — 1961. — Vol. 1. — Pp. 79–91

[10] *Breakwell J., Chernoff H.* Sequential tests for the mean of a Normal distribution II (large t) // *The Annals of Mathematical Statistics.* — 1964. — Vol. 35. — Pp. 162–173

[11] *Chernoff H.* Sequential tests for the mean of a Normal distribution III (small t) // *The Annals of Mathematical Statistics.* — 1965. — Vol. 36. — Pp. 28–54

[12] *Chernoff H.* Sequential tests for the mean of a Normal distribution IV (discrete case) // *The Annals of Mathematical Statistics.* — 1964. — Vol. 36. — Pp. 55–68

[13] *Lai T. L.* Sequential analysis: some classical problems and new challenges // *Statistica Sinica.* — 2001. — Vol. 11, no. 2.— Pp. 303–350

[14] *Shewart W.* The application of statistics as an aid in maintaining quality of a manufactured product // *Journal of the American Statistical Association.* — 1925. — Vol. 20, no. 152. — Pp. 546–548

теристик, арифметическое среднее наблюдений должно сильно изменить своё значение. Однако, данный метод оказался малоэффективным в случае, когда характеристики меняются не очень существенно.

Это стимулировало развитие более точных техник, направленных на преодоление данного недостатка. Одним из наиболее известных является метод *кумулятивных сумм* (или, более кратко, CUSUM), предложенный Э. Пэйджем[15]. Позднее, А. Н. Ширяевым[16] и С. Робертсом[17] независимо друг от друга был предложен метод, основанный на статистике, называемой сейчас *статистикой Ширяева-Робертса.*

Под задачей о разладке броуновского движения обычно понимают модель, в которой у броуновского движения в некоторый ненаблюдаемый момент времени θ снос меняется с нуля на известное значение μ. А. Н. Ширяевым[18] было показано, что в байесовской постановке (в предположении, что θ является экспоненциально распределённой случайной величиной) оптимальное правило представляет собой момент первого достижения процессом *апостериорных вероятностей* некоторого порога.

Также для модели броуновского движения известно, что правило CUSUM является оптимальным в *критерии Лордена*[19,20,21], а правило Ширяева-Робертса — в *обобщённой байесовской* постановке (т. е. в предположении, что θ распределён "равномерно на положительной полупрямой действительной оси"), сравнение данных методов может быть найдено в работе М. Поллака и Д. Сигмунда[22]. Большой обзор имеющихся в настоящее время результатов по разладке можно найти в работе[23].

---

[15] *Page E. S.* Continuous inspection schemes // *Biometrika.* — 1954. — Vol. 41. — Pp. 100–114

[16] *Ширяев А. Н.* Обнаружение спонтанно возникающих эффектов // *Доклады АН СССР.* — 1961. — Т. 138, № 4. — С. 799–801

[17] *Roberts S. W.* Control charts based on geometric moving average // *Technometrics.* — 1959. — Vol. 1. — Pp. 239–250

[18] *Ширяев А. Н.* Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения // *Теория вероятностей и ее применения.* — 1963. — Т. 8, № 1. — С. 26–51

[19] *Lorden G.* Procedures for reacting to a change in distribution. // *Annals of Mathematical Statistics.* — 1971. — Pp. 1897–1908

[20] *Ширяев А. Н.* Минимаксная оптимальность метода кумулятивных сумм (CUSUM) в случае непрерывного времени // *Успехи математических наук.* — 1985. — Т. 51, № 4.— Pp. 173–174

[21] *Beibel M.* A note on Ritov's Bayes approach to the minimax property of the CUSUM procedure // *Annals of Statistics.* — 1996. — Vol. 24, no. 4.— Pp. 1804–1812

[22] *Pollak M., Siegmund D.* A diffusion process and its applications to detecting a change in the drift of Brownian motion // *Biometrika.* — 1985. — Vol. 72, no. 2.— Pp. 267–280

[23] *Shiryaev A. N.* Quickest detection problems: fifty years later // *Sequential Analysis.* — 2010. — Vol. 29,

С точки зрения приложений важную роль играют постановки, в которых кроме определения момента разладки также требуется принять одну из гипотез о значении новых характеристик. Связано это с тем, что довольно часто исследователь не знает как именно изменится поведение процесса, и, в лучшем случае, может сделать некоторые предположения.

Наиболее популярным подходом к исследованию данных задач является использование правил, обобщающих обычную статистику CUSUM. Впервые данный подход был использован Г. Барнардом[24] для модели с двусторонними альтернативами. Позднее, аналоги данного метода рассматривались многими авторами для более общих моделей[19,25,26]. В частности, А. Тартаковский[27] исследовал оптимальность метода N-CUSUM (состоящем из комбинации N одномерных правил CUSUM) для задачи с несколькими альтернативами.

М. Байбелем[28] были предложены критерии для двух байесовских постановок, первая из которых является обобщением тестов Х. Р. Лерхе[29] для определения наличия сноса у броуновского движения, а вторая — обобщением процесса апостериорных вероятностей из постановки А. Н. Ширяева[18].

Результаты первых двух глав диссертации дополняют имеющиеся результаты по задаче о “двусторонней разладке” броуновского движения, т. е. для модели, в которой предполагается, что появляющийся снос может принять одно из двух значений: $\mu_1 < 0$ или $\mu_2 > 0$.

В первой главе исследуются моменты остановки, связанные с *падением* и *ростом* броуновского движения со сносом. Величина падения процесса определяется как разница между текущим максимумом и значением про-

no. 4.— Pp. 445–385

[24] *Barnard G. A.* Control charts and stochastic processes // *Journal of the Royal Statistical Society, Series B.* — 1959. — Vol. 11 — Pp. 239–271

[25] *Dragalin V. P.* The design and analysis of 2-CUSUM procedure. // *Communications in Statistics - Simulation and Computation.* — 1997. — Vol. 26, No 1. Pp. 67–81

[26] *Hadjiliadis O.* Change-point detection of two-sided alternatives in the Brownian motion model and its connection to the gambler's ruin problem with relative wealth perception. // *PhD Thesis with Distinction.* — Columbia University, 2005

[27] *Тартаковский А. Г.* Асимптотически минимаксное многоальтернативное последовательное правило обнаружения разладки. // Статистика и управление случайными процессами, Тр. МИАН, 202 — Vol. 26, No 1. Москва: ТВП, 1993 С. 287–295

[28] *Beibel M.* Sequential change-point detection in continuous time when the post-change drift is unknown. // *Bernoulli.* — 1997. — Vol. 3, No 4. Pp. 457–478

[29] *Lerche H. R.* The shape of Bayes tests of power one. // *The Annals of Statistics.* — 1986. — Vol. 14, No 3. P. 1030–1048

цесса, а величина роста — как разница между его значением и текущим минимумом.

С одной стороны, рассматриваемые моменты остановки представляют собой подкласс 2-CUSUM решающих правил, возникающих в задачах о разладке (общий класс правил содержит также моменты остановки, для которых падение и рост соответствуют броуновскому движению с разной величиной сноса). С другой стороны, данные величины играют важную роль в финансовой математике[30], поскольку их можно рассматривать как *статистическую меру риска* инвестирования в качестве альтернативы стандартным мерам риска, таким как вероятность возврата, V@R, Sharp ratio и т. д. Основные полученные результаты связаны с вычислением преобразований Лапласа для рассматриваемых моментов.

Во второй главе исследуется байесовская постановка задачи о "двусторонней разладке" для броуновского движения со сносом. В качестве функции риска рассматривается сумма штрафов за запаздывание при принятии решения, за ложную тревогу и за неверно принятое решение о величине сноса. Таким образом, данный критерий объединяет в себе две классические байесовские постановки из последовательного анализа[7].

Отметим, что эффективность того или иного критерия в "непрерывном времени" обычно проверяется в первую очередь для броуновского движения со сносом. С одной стороны, это объясняется тем, что данный процесс является предельным случаем для многих моделей с дискретными наблюдениями. С другой стороны, для броуновского движения оптимальные правила во многих ситуациях имеют простую структуру, и могут быть впоследствии обобщены на другие марковские модели, такие как *пуассоновский процесс*[31] и одномерные *диффузии*[32].

Однако, в последние два десятилетия различными исследователями отмечалось, что в теории телекоммуникаций[33], финансовых приложениях[34] и

[30] *Szegő G. P.* (Ed.) Risk measures for the 21st century // Wiley, 2004

[31] *Гальчук Л. И., Розовский Б. Л.* Задача о "разладке" для пуассоновского процесса. // Теория вероятностей и ее применения — Т. 16, № 4. С. 729–734

[32] *Gapeev P. V., Shiryaev A. N.* Bayesian quickest detection problems for some diffusion processes. // *Advances in Applied Probability.* — 2013. — Vol. 45, No 1. P. 164–185

[33] *Norros I.* On the use of the fractional Brownian motion in the theory of connectionless networks. // *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on.* — 1995. — Vol. 13, No 6. P. 953–962

[34] *Anh V. V., Inoue A.* Financial markets with memory I: Dynamic models. // *Stochastic Analysis and*

некоторых других важных областях наблюдаемые данные обладают свойством сильной *зависимости от прошлого* и *самоподобия*.

В случае непрерывного времени простейшим примером процесса с данными свойствами является *фрактальное броуновское движение* B^H, где величина $H \in (0,1)$ обозначает *параметр самоподобия Харста*. Чем больше H, тем более гладкими оказываются траектории. В случае $H = 1/2$ процесс B^H совпадает со стандартным броуновским движением.

Впервые данный процесс был рассмотрен А. Н. Колмогоровым[35] в 1940 г. при исследовании вопросов моделирования *турбулентности*[36]. Большу́ю популярность B^H получил в связи с исследованиями Б. Мандельброта[37] по *фракталам* и, в частности, после работы[38], в которой фрактальное броуновское движение было построено в виде интеграла по винеровскому процессу на всей действительной прямой. Отметим, что именно у Б. Мандельброта и Дж. ван Несса[38] процесс B^H получил своё название (в своих работах А. Н. Колмогоров называл B^H "винеровской спиралью").

Характерными свойствами B^H являются гауссовость, самоподобие и стационарность приращений. При $H > 1/2$ приращения процесса положительно коррелированы, а при $H < 1/2$ — отрицательно. В дополнении к этому, при $H > 1/2$ процесс B^H обладает свойством сильной зависимости от прошлого. Другие свойства могут быть найдены в монографии[39].

У. Четиным, А. А. Новиковым и А. Н. Ширяевым[40] была рассмотрена задача последовательного *оценивания* величины сноса μ фрактального броуновского движения в предположении гауссовости μ. Ими было показано, что оптимальный момент остановки является *детерминистическим*, когда функция штрафа является квадратичной или дельта-функцией.

Applications. — 2005. — Vol. 23, No 2. P. 275–300

[35] *Колмогоров А. Н.* Спирали Винера и другие интересные кривые в гильбертовом пространстве // *Доклады АН СССР.* — 1940. — Т. 26, № 2

[36] *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // *Доклады АН СССР.* — 1941. — Т. 30, № 4. С. 299–303

[37] *Mandelbrot B.* Fractals and scaling in finance: Discontinuity and concentration. // Springer Verlag, 1997

[38] *Mandelbrot B. B., van Ness J. W.* Fractional Brownian motions, fractional noises and applications // *SIAM review* — 1968. — Vol. 10, no. 4.— Pp. 422–437

[39] *Mishura Yu.* Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes // *Lecture Notes in Math.*, 1929 — Springer, Berlin, 2008

[40] *Çetin U., A. Novikov A. A., Shiryaev A. N.* Bayesian sequential estimation of a drift of fractional Brownian motion // to appear in *Sequential Analysis.* — 2013. — Vol. 32, No 3. — P. 288–296

В третьей главе изучаются задачи *различения гипотез* о величине сноса фрактального броуновского движения по результатам последовательных наблюдений. Доказывается, что задачи подобного типа могут быть сведены к задачам об оптимальной остановке для стандартного броуновского движения, для решения которых можно использовать хорошо разработанные методы из общей теории[41,42]. В данном случае оптимальный момент времени оказывается *случайным.*

Отметим, что при $H \neq 1/2$ процесс B^H не является ни марковским процессом, ни семимартингалом[39], поэтому хорошо разработанный аналитический аппарат оказывается неприменимым непосредственно к данному процессу (в частности, для B^H при $H \neq 1/2$ перестаёт быть верным *тождество Вальда*).

В четвёртой главе показано, что, несмотря на это, B^H можно представить как линейный функционал от бесконечномерного диффузионного процесса типа *Орнштейна-Уленбека.* В качестве применения данного результата, доказывается неравенство, связывающее среднее значение остановленного процесса B^H_τ и среднее время наблюдения τ (для моментов остановки τ). В случае $H < 1/2$ данное неравенство дополняет результаты А. А. Новикова и Э. Валкейлы[43].

Цель работы. Целью работы является изучение оптимальных решающих правил в двух конкретных моделях: броуновском движении с возникающей разладкой и фрактальном броуновском движении с неизвестным сносом. Также целью является исследование границ применимости марковских методов к фрактальному броуновскому движению (являющегося одним из классических примеров процесса с зависимостью от прошлого).

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Найдены аналитические формулы преобразований Лапласа для моментов остановки, связанных с падением и ростом броуновского движения

[41] *Peskir G., Shiryaev A.* Optimal stopping and free-boundary problems. — Birkhäuser Basel, 2006

[42] *van Moerbeke P.* On optimal stopping and free-boundary problems // *Arch. Rational Mech. Anal.* — 1976. — Vol. 60, — Pp. 101–148

[43] *Novikov A., Valkeila. E.* On some maximal inequalities for fractional Brownian motions // *Statistics & probability letters* — 1999. — Vol. 1, no. 4.— Pp. 47–54

со сносом, представляющие собой подкласс 2-CUSUM решающих правил.

2. В байесовской постановке задачи о "двусторонней разладке" изучена структура оптимальных решающих правил. А именно, доказана выпуклость, непрерывность и дифференцируемость функции риска, а оптимальные границы остановки характеризуются как единственное решение некоторого интегрального уравнения.

3. Предложен метод, позволяющий конструктивно решать задачи о различении конечного числа гипотез о величине сноса фрактального броуновского движения. Показано, как сводить задачи подобного типа к задачам об оптимальной остановке для стандартного броуновского движения.

4. Получено представление фрактального броуновского движения в виде функционала от *бесконечномерной диффузии* (аналоге процесса Орнштейна-Уленбека). В качестве приложения данного результата доказано неравенство, связывающее средние значения произвольного момента остановки и фрактального броуновского движения, остановленного в этот момент.

Методы исследования. В диссертации применены методы стохастического анализа: теория марковских процессов, теория мартингалов и стохастическое дифференциальное исчисление.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть полезны в вопросах последовательного анализа стохастических систем, связанных с проверкой гипотез и обнаружением разладок. Результаты четвёртой главы могут быть использованы для применения аналитических методов теории марковских процессов при изучении свойств фрактального броуновского движения.

Апробация диссертации. Результаты работы докладывались автором на следующих научных конференциях и семинарах:

1. *Конференция "The Seventh Bachelier Colloquium on Mathematical Finance and Stochastic Calculus"*, Метабьеф, Франция, 13–20 января 2013 г. Тема доклада: Quickest disorder detection problem with sequential hypothesis testing.
2. *Конференция "Stochastic Optimization and Optimal Stopping"*, Москва, 24–

28 сентября 2012 г. Тема доклада: On a two-side disorder problem for a Brownian motion in a Bayesian setting.

3. *Конференция "The Joint Meeting of International Young Business and Industrial Statisticians"*, Лиссабон, Португалия, 23–26 июля 2012 г. Тема доклада: On multiple Bayesian quickest detection problems.
4. *Конференция ИППИ (Москва) — WIAS (Берлин)* по стохастическому и предсказательному моделированию, Москва, 31 мая – 1 июня 2012 г. Тема доклада: The study of a fractional Brownian motion by means of Markov techniques.
5. *Конференция МИАН — ПОМИ*, посвященная теме "Вероятность и функциональный анализ", Москва, 16–17 февраля 2012 г. Тема доклада: Фрактальное броуновское движение: новое представление и следствия из него.
6. *Конференция "17th European Young Statisticians Meeting"*, Лиссабон, Португалия, 5–9 сентября 2011 г. Тема доклада: On some inequalities for fractional Brownian motion.
7. *Российско-японский симпозиум по стохастическому анализу"*, Москва, 15–17 сентября 2009 г. Тема доклада: О преобразовании Лапласа для характеристик, связанных с падением и ростом броуновского движения со сносом.
8. Большой семинар кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ, несколько докладов в 2009–2012 гг.
9. Научный семинар "Случайные процессы и стохастический анализ" под рук. А. Н. Ширяева, МГУ, несколько докладов в 2008–2013 гг.
10. Выступления в Лаборатории предсказательного моделирования, МФТИ, несколько докладов в 2012–2013 гг.

Публикации. Список работ автора, содержащих результаты диссертации, приведен в конце автореферата. Непосредственно по теме диссертации опубликованы 4 работы [1], [3]–[5]; работа [2] содержит вспомогательный результат.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав и приложения. Общий объём работы составляет 107 страниц. Список литературы включает 105 наименований.

Благодарность. Работа выполнена под руководством академика РАН профессора А. Н. Ширяева, которому автор выражает искреннюю благодарность.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Глава 1 посвящена исследованию величин, связанных с падением и ростом броуновского движения со сносом.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ задано стандартное броуновское движение $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$, и для $\mu \in \mathbb{R}$ рассмотрим броуновское движение со сносом $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$, т. е. $X_t = \mu t + B_t$.

Для фиксированного μ и $a > 0$, $b > 0$ введём моменты:

$$\tau_a = \inf\Big\{t \geqslant 0 : \sup_{s\leqslant t} X_s - X_t = a\Big\},$$
$$\sigma_b = \inf\Big\{t \geqslant 0 : X_t - \inf_{s\leqslant t} X_s = b\Big\},$$
$$\gamma_{ab} = \tau_a \wedge \sigma_b.$$

Без ограничения общности можно считать, что $b \geqslant a > 0$.

Для $a > 0$, $c > 0$ рассмотрим также следующие моменты:

$$\delta_c = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = c\}, \quad \zeta_{ac} = \tau_a \wedge \delta_c.$$

Лемма. *Пусть X — броуновское движение со сносом μ, моменты остановки τ_a, σ_a, γ_{ab} и γ_{aa} соответствуют X. Тогда при $b \geqslant a > 0$*

$$\big(\gamma_{ab}, X_{\gamma_{ab}}\big) = \big(\gamma_{aa}, X_{\gamma_{aa}}\big) + \Big(\widetilde{\zeta}_{a,b-a}, \widetilde{X}_{\widetilde{\zeta}_{a,b-a}}\Big)\mathbf{I}\{\gamma_{aa} = \sigma_a\},$$
$$\big(\tau_a, X_{\tau_a}\big) = \big(\gamma_{aa}, X_{\gamma_{aa}}\big) + \Big(\widetilde{\tau}_a, \widetilde{X}_{\widetilde{\tau}_a}\Big)\mathbf{I}\{\gamma_{aa} = \sigma_a\}.$$

где $\widetilde{\zeta}_{a,b-a}$ и $\widetilde{\tau}_a$ соответствуют независимой копии $\widetilde{X}$ процесса X.

Данная лемма играет важную роль в получении результатов первой главы. В частности, она позволяет найти формулы для $\mathrm{P}(\gamma_{ab} = \tau_a)$, $\mathrm{P}(\gamma_{ab} = \tau_a)$ и $\mathrm{E}\gamma_{ab}$. Основные результаты состоят в получении аналитических выражений для совместных преобразований Лапласа.

Положим

$$\Delta = \sqrt{\mu^2 + 2\lambda},\ \nu = \mu + \beta.$$

Теорема. *При $b \geqslant a > 0$ справедливо*

$$\mathrm{E}e^{-\lambda\gamma_{ab}+\beta X_{\gamma_{ab}}} = \frac{e^{-\nu a}(1 - e^{\nu(b-a)}e^{-\Delta(b-a)\operatorname{cth}(\Delta a)})}{\operatorname{ch}(\Delta a) - (\nu/\Delta)\operatorname{sh}(\Delta a)}$$
$$+\ 2\frac{\operatorname{ch}(\Delta a)\operatorname{ch}(\nu a) - (\nu/\Delta)\operatorname{sh}(\Delta a)\operatorname{sh}(\nu a) - 1}{\operatorname{sh}^2(\Delta a)(1 - (\nu/\Delta)^2)}e^{\nu(b-a)}e^{-\Delta(b-a)\operatorname{cth}(\Delta a)},$$

если $\lambda \geqslant 0$, $|\nu| < \Delta\operatorname{cth}(\Delta a)$.

Отсюда, в частности, получаем преобразования Лапласа для γ_{ab} и $X_{\gamma_{ab}}$. Плотность γ_{ab} может быть найдена с помощью формул обращения из справочника[44], но выражение для неё оказывается крайне громоздким и сложным для дальнейшего анализа. В то же время, отыскание распределения $X_{\gamma_{ab}}$ не составляет труда. Пусть

$$\lambda_a = \frac{e^{2\mu a} - 1}{2\mu}.$$

Следствие. *В случае $b \geqslant a > 0$ при $\mu \neq 0$ справедливо*

$$\mathrm{P}\big(X_{\gamma_{ab}} \in dx\big) = \frac{1}{\lambda_a}\exp\left(-\frac{x+a}{\lambda_a}\right)\mathbf{I}\{-a \leqslant x < b - 2a\}dx$$
$$+\ |\mu|\frac{|e^{2\mu(x-b+a)} - 1|}{2\operatorname{sh}^2(\mu a)}\exp\left(-\frac{b-a}{\lambda_a}\right)\mathbf{I}\{b - 2a \leqslant x \leqslant b\}dx$$

Когда снос отсутствует, выражение для плотности получается предельным переходом при $\mu \to 0$.

Введём обозначения

$$f_c(x, y) = \operatorname{ch}(cx) + (y/c)\operatorname{sh}(cx),$$
$$\Delta = \sqrt{\mu^2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2}, \quad \nu = \mu + \beta_1 + \beta_2,$$
$$\Delta_i = \sqrt{\mu^2 + 2\lambda_i}, \quad \nu_i = \mu + \beta_i, \quad i = 1, 2.$$

[44] *Бородин А. Н., Салминен П.* Справочник по броуновскому движению. — Санкт-Петербург: Лань, 2000

Теорема. *При $b \geqslant a > 0$ справедливо*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\exp\{-\lambda_1\tau_a + \beta_1 X_{\tau_a} - \lambda_2\sigma_b + \beta_2 X_{\sigma_b}\} = \Bigg[& e^{\nu(b-a)} e^{-\Delta(b-a)\operatorname{cth}(\Delta a)} \frac{e^{-\nu_1 a}}{f_{\Delta_1}(a,-\nu_1)} \\
& + \frac{e^{\nu_2 b} e^{-\nu a}}{f_{\Delta_2}(b,\nu_2)} \Bigg(\frac{(1+\nu_2/\Delta_2)(1-e^{(\beta_1+\Delta_2)(b-a)} e^{-\Delta(b-a)\operatorname{cth}(\Delta a)})}{2 f_\Delta(a, -\beta_1-\Delta_2)} \\
& + \frac{(1-\nu_2/\Delta_2)(1-e^{(\beta_1-\Delta_2)(b-a)} e^{-\Delta(b-a)\operatorname{cth}(\Delta a)})}{2 f_\Delta(a, -\beta_1+\Delta_2)} \Bigg) \Bigg] \\
& \times \frac{e^{\nu a} f_\Delta(a,-\nu) - 1}{\operatorname{sh}^2(\Delta a)(1-(\nu/\Delta)^2)} + \frac{e^{-\nu a} f_\Delta(a,\nu) - 1}{\operatorname{sh}^2(\Delta a)(1-(\nu/\Delta)^2)} \cdot \frac{e^{\nu_2 b}}{f_{\Delta_2}(b,\nu_2)},
\end{aligned}
$$

если $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\nu_1 < \Delta_1 \operatorname{cth}(\Delta_1 a)$, $\nu_2 > -\Delta_2 \operatorname{cth}(\Delta_2 b)$, $\beta_1 + \Delta_2 < \Delta \operatorname{cth}(\Delta a)$, $|\nu| < \Delta \operatorname{cth}(\Delta a)$.

В **главе 2** рассматривается задача о двусторонней разладке для броуновского движения в байесовской постановке.

Пусть на *вероятностно-статистическом* пространстве

$$(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P}_\pi;\ \pi \in \Pi),$$

где

$$\Pi = \Big(\pi = (\pi^1, \pi^2) : \pi^1 \geqslant 0, \pi^2 \geqslant 0, \pi^1 + \pi^2 \leqslant 1\Big),$$

задано броуновское движение $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$, а также случайные величины θ и μ, независимые между собой и от броуновского движения B. Будем считать, что θ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ и весом p в нуле, μ принимает значения $\mu_1 < 0$ с вероятностью ρ_1 и $\mu_2 > 0$ с вероятностью $\rho_2 = 1 - \rho_1$, а параметры распределения P_π определяют *априорные* вероятности

$$\pi^1 = \mathrm{P}_\pi(\theta = 0, \mu = \mu_1) = p\rho_1, \quad \pi^2 = \mathrm{P}_\pi(\theta = 0, \mu = \mu_2) = p\rho_2.$$

Предполагается, что мы наблюдаем за процессом $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$, удовлетворяющим стохастическому дифференциальному уравнению

$$dX_t = \mu \mathbf{I}(t \geqslant \theta) dt + \sigma dB_t, \qquad X_0 = 0,$$

где $\sigma > 0$ является известным заранее параметром.

Пусть $\delta = (\tau, d)$ обозначает *решающее правило*, состоящее из момента остановки $\tau = \tau(\omega)$ относительно естественной фильтрации $\mathscr{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leqslant t)$ процесса X и функции принятия решения $d = d(\omega)$ — $\mathscr{F}_\tau^X$-измеримой случайной величины, принимающей значения d_1 и d_2. После того, как мы останавливаем наблюдения в момент τ, функция d показывает, какую гипотезу о величине сноса μ мы должны принять: если $d = d_1$, мы принимаем H_1, а если $d = d_2$ — мы принимаем H_2.

Каждому решающему правилу $\delta = (\tau, d)$ сопоставим байесовский риск

$$\mathscr{R}_\pi(\delta) = \mathscr{R}_\pi^\theta(\delta) + \mathscr{R}_\pi^\mu(\delta),$$

где

$$\mathscr{R}_\pi^\theta(\delta) = \mathrm{P}_\pi(\tau < \theta) + c\mathrm{E}_\pi[\tau - \theta]^+$$

состоит из линейной комбинации вероятности *"ложной тревоги"* и *"среднего запаздывания"* при правильном обнаружении *"разладки"*, $c > 0$, а

$$\mathscr{R}_\pi^\mu(\delta) = a\mathrm{P}_\pi(d = d_1, \mu = \mu_2) + b\mathrm{P}_\pi(d = d_2, \mu = \mu_1)$$

состоит из линейной комбинации вероятностей неправильного принятия гипотезы о величине сноса μ с весами $a, b > 0$.

Целью второй главы является исследование структуры *оптимального* решающего правила $\delta^* = (\tau^*, d^*)$ такого, что

$$\mathscr{R}_\pi(\delta^*) = \inf_\delta \mathscr{R}_\pi(\delta), \tag{1}$$

где инфимум берется по всем решающим правилам $\delta = (\tau, d)$ с $\mathrm{E}_\pi \tau < \infty$.

Рассмотрим процессы *апостериорных* вероятностей $\pi^i = (\pi_t^i)_{t \geqslant 0}$, где

$$\pi_t^i = \mathrm{P}_\pi\big(\theta \leqslant t, \mu = \mu_i \,|\, \mathcal{F}_t^X\big), \quad i = 1, 2.$$

Теорема. *Двумерный процесс* $\pi = (\pi^1, \pi^2)$ *является марковской достаточной статистикой в задаче* (1). *Кроме того, процесс* π *является решением следующей системы стохастических уравнений:*

$$d\pi_t^i = \lambda\rho_i(1 - \pi_t^1 - \pi_t^2)dt + \pi_t^i\left[\frac{\mu_i}{\sigma} - \left(\frac{\mu_1}{\sigma}\pi_t^1 + \frac{\mu_2}{\sigma}\pi_t^2\right)\right] d\overline{B}_t, \quad i = 1, 2,$$

где $\overline{B} = (\overline{B}_t)_{t\geqslant 0}$ *является броуновским движением (вообще говоря, отличным от* B*). Оптимальный момент остановки* τ^* *может быть найден как решение задачи об оптимальной остановке*

$$V(\pi) = \inf_{\tau} \mathrm{E}_\pi \Big[1 - \pi^1_\tau - \pi^2_\tau + c\int_0^\tau (\pi^1_t + \pi^2_t)dt \\ + a\big(\rho_1\pi^2_\tau + \rho_2(1-\pi^1_\tau)\big) \wedge b\big(\rho_2\pi^1_\tau + \rho_1(1-\pi^2_\tau)\big)\Big]. \quad (2)$$

Функция принятия решения d^* *принимает значение* d_1*, если* $a\ \big(\rho_1\pi^2_{\tau^*} + \rho_2(1-\pi^1_{\tau^*})\big) < b\big(\rho_2\pi^1_{\tau^*} + \rho_1(1-\pi^2_{\tau^*})\big)$*, и* d_2 *в противном случае.*

Как известно, в марковском случае фазовое пространство $\Pi = \big\{(\pi^1,\pi^2) : \pi^1 \geqslant 0, \pi^2 \geqslant 0, \pi^1+\pi^2 \leqslant 1\big\}$ разбивается на множество остановки D и множество продолжения наблюдения $C = \Pi \setminus D$, а оптимальным моментом остановки является момент τ^* первого попадания процесса π в область D:

$$\tau^* = \inf\big\{t \geqslant 0 : \pi_t \in D\big\}.$$

Множество D характеризуется тем, что $V(\pi) = G(\pi)$ на D, где

$$G(\pi) = 1 - (\pi^1+\pi^2) + a\big(\rho_1\pi^2 + \rho_2(1-\pi^1)\big) \wedge b\big(\rho_2\pi^1 + \rho_1(1-\pi^2)\big) \quad (3)$$

является суммой ошибок при мгновенной остановке, а на множестве C справедливо $V(\pi) < G(\pi)$. Очевидно, что точки $\pi_{1,0} = (1,0)$ и $\pi_{0,1} = (0,1)$ принадлежат множеству остановки D, поскольку в них можно безошибочно принять гипотезы H_1 и H_2 (функция риска $V(\pi)$ в этих точках равна нулю). В то же время, некоторые точки фазового пространства заведомо принадлежат множеству продолжения наблюдения C.

Лемма. *Множество* $C_0 = \{\pi^1+\pi^2 < \lambda/(\lambda+c)\}$ *и прямая* $\ell(\pi) = 0$ *принадлежат области продолжения наблюдения* C*, где*

$$\ell(\pi) = \rho_1\pi^2 - \rho_2\pi^1 + \frac{a\rho_2 - b\rho_1}{a+b}.$$

При этом, прямая $\ell(\pi) = 0$ разбивает фазовое пространство Π на два *непустых* множества $\Pi_1 = \{\pi : \ell(\pi) < 0\}$ и $\Pi_2 = \{\pi : \ell(\pi) > 0\}$.

Следующая теорема даёт качественное описание области D.

Теорема. *Множество оптимальной остановки D состоит из двух непересекающихся окрестностей D_1 и D_2 точек $\pi_{1,0}$ и $\pi_{0,1}$. При этом: $D_i \subset \Pi_i / C_0$, $i = 1, 2$, множества D_1 и D_2 являются односвязными, замкнутыми и выпуклыми. Как следствие, их границы $\gamma_i = \partial D_i$, $i = 1, 2$, непрерывны.*

Если наблюдаемый процесс π попал во множество D_i, следует немедленно остановить наблюдения и принять гипотезу $H_i : \mu = \mu_i$, $i = 1, 2$.

Область D однозначно определяется своими границами $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, и наоборот. Рассмотрим класс границ $\mathscr{G}$ таких, что соответствующие множества D удовлетворяет условиям предыдущей теоремы.

Теорема. *Оптимальные границы остановки в задаче* (2) *являются единственным решением интегрального уравнения*

$$\mathrm{E}_\pi \int_0^\infty \Big[\lambda(1-\pi_s^1-\pi_s^2)\mathbf{I}\{\pi_s \in D\} + c(\pi_s^1+\pi_s^2)\mathbf{I}\{\pi_s \in C\}\Big] ds = G(\pi), \quad \forall \pi \in \gamma,$$

в классе $\mathscr{G}$, где функция $G(\pi)$ задана формулой (3).

В **главе 3** рассматривается задача последовательного различения гипотез о величине сноса фрактального броуновского движения.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ задано фрактальное броуновское движение $B^H = (B_t^H)_{t \geqslant 0}$ с параметром Харста $H \in (0, 1)$, а μ — независимая от B^H случайная величина (удовлетворяющая условию $\mathrm{E}\,|\mu| < \infty$). Предположим, что мы последовательно наблюдаем за процессом $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$, определённым как

$$X_t = \mu t + B_t^H,$$

где значение сноса μ является ненаблюдаемым.

Пусть множества $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$ образуют *полную группу*, т.е. не пересекаются и $\sum_i P(\mu \in A_i) = 1$. Мы рассматриваем задачу различения гипотез $H_1, \ldots, H_n$, $H_i \colon \mu \in A_i$, по последовательным наблюдениям за X. Каждая процедура проверки задаётся *решающим правилом* $\delta = (\tau, d_\mu)$, состоящим из момента остановки τ фильтрации $(\mathscr{F}_t^X)_{t \geqslant 0}$, $\mathscr{F}_t^X = \sigma(X_s; s \leqslant t)$, и $\mathscr{F}_\tau^X$-измеримой функции d_μ, принимающей значения $1, \ldots, n$. Момент τ

соответствует времени прекращения наблюдения, а значение d_μ — номеру принимаемой гипотезе.

Каждому решающему правилу δ сопоставим *функцию потерь* $\mathscr{R}_X(\delta) = \mathrm{E}\big[c\tau + W(\mu, d_\mu)\big]$, где $c\tau$ является платой за наблюдения (пропорциональной времени наблюдения), а $W(\mu, d_\mu)$ — *функцией штрафа* (за неправильно принятое решение). Рассмотрим задачу отыскания оптимального правила $\delta^* = (\tau^*, d_\mu^*)$ такого, что

$$\mathscr{R}_X(\delta^*) = \inf_\delta \mathscr{R}_X(\delta), \tag{4}$$

где инфимум берётся по всем решающим правилам $\delta = (\tau, d_\mu)$ с $\mathrm{E}\tau < \infty$. В работе[40] показано, что когда функция штрафа является квадратичной или дельта-функцией, а $\mu \sim \mathscr{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$, оптимальный момент τ^* (в классе правил δ с $\tau \leqslant T$, $T > 0$) является *детерминистическим.* В (4) момент τ^*, вообще говоря, является *случайным.*

Рассмотрим интегральный оператор M, преобразующий f в $M(f)$ согласно

$$M_t(f) = c_H \int_0^t s^{1/2-H}(t-s)^{1/2-H} df_s, \quad c_H = \left(\frac{\Gamma(3-2H)}{2H\Gamma(3/2-H)^3\Gamma(1/2+H)}\right)^{1/2}.$$

Определим процесс $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$ как $Z_t = M(X)_{\langle M(X)\rangle_t^{-1}}$, где $\langle M(X)\rangle_t = t^{2-2H}$ есть квадратичная характеристика $M(X)$.

Лемма. *Процесс Z допускает представление $Z_t = \lambda t + B_t$, где $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ есть стандартное броуновское движение, а λ — независимая от B случайная величина.*

При этом, если τ является моментом остановки относительно X, то $\sigma = \langle M(X)\rangle_\tau = \tau^{1-2\alpha}$ будет моментом остановки относительно процесса Z.

Каждому $(\mathscr{F}_t^Z)_{t\geqslant 0}$-решающему правилу $\gamma = (\sigma, d_\lambda)$ поставим в соответствие $(\mathscr{F}_t^X)_{t\geqslant 0}$-решающее правило $\delta = (\tau, d_\mu)$ с $\tau = \sigma^{1/(2-2H)}$, $d_\mu(\tau) \equiv d_\lambda(\sigma)$. Несложно видеть, что это отображение (назовём его $\mathscr{A}$) является *биекцией.* Рассмотрим задачу

$$\mathscr{R}_Z(\gamma^*) = \inf_\gamma \mathscr{R}_Z(\gamma), \qquad \mathscr{R}_Z(\gamma) = \mathrm{E}\big[c\sigma^{1/(2-2H)} + \widetilde{W}(\lambda, d_\lambda)\big], \tag{5}$$

где $\widetilde{W}(\lambda, d_\lambda) = W(\mu, d_\mu)$, и инфимум берётся по всем решающим правилам $\gamma = (\sigma, d_\lambda)$ с $\mathrm{E}\sigma^{1/(2-2H)} < \infty$.

Теорема. *Решения задач* (4) *и* (5) *совпадают, т.е.* $\mathscr{R}_X(\delta^*) = \mathscr{R}_Z(\gamma^*)$, *при этом оптимальные правила связаны соотношением* $\delta^* = \mathscr{A}\gamma^*$.

Следуя общей теории статистического последовательного анализа[45], получаем

$$\mathscr{R}_Z(\gamma^*) = \inf_\sigma \mathrm{E}\Big[c\sigma^{1/(2-2H)} + \min_i \mathrm{E}\big(\widetilde{W}(\lambda, i)\big|\mathscr{F}^Z_\sigma\big)\Big], \tag{6}$$

где инфимум берётся по моментам остановки σ таким, что $\mathrm{E}\sigma^{1/(2-2H)} < \infty$. При этом, если σ^* является оптимальным, то правило $\delta^* = (\sigma^*, d^*_\lambda)$ с $d^*_\lambda = \arg\min_i \mathrm{E}\big(\widetilde{W}(\lambda, i)\big|\mathscr{F}^Z_{\sigma^*}\big)$ является оптимальным в (5). Пусть P^0 обозначает меру $\mathrm{P}^0(\,\cdot\,) = \mathrm{P}(\,\cdot\,|\,\lambda = 0)$, по которой процесс Z является броуновским движением. Рассмотрим задачу

$$V = \inf_\sigma \mathrm{E}^0\Big[c\sigma^{1/(2-2H)}\mathrm{E}^0\big(\mathscr{E}_\sigma(\lambda)|\mathscr{F}^Z_\sigma\big) + \min_i \mathrm{E}^0\big(\widetilde{W}(\lambda, i)\mathscr{E}_\sigma(\lambda)|\mathscr{F}^Z_\sigma\big)\Big], \tag{7}$$

где $\mathscr{E}(\lambda)$ обозначает $\mathscr{E}_\sigma(\lambda) = \exp(\lambda Z_\sigma - \lambda\sigma^2/2)$, E^0 — математическое ожидание по мере P^0, а инфимум берётся по всем моментам остановки σ с $\mathrm{E}^0\sigma^{1/(2-2H)} < \infty$.

Теорема. *Пусть* σ^* *является оптимальным моментом в задаче* (7) *и* $\mathrm{P}(\sigma^* < \infty) = 1$. *Тогда* σ^* *также является оптимальным и в задаче* (6), *и* $\mathscr{R}_Z(\gamma^*) = V$.

Приведённые теоремы позволяют перейти от (4) к (7). Отметим, что (7) является *стандартной* задачей, поскольку имеет вид $V = \inf_\sigma \mathrm{E}^0 G(\sigma, Z_\sigma)$. Для её изучения могут быть использованы хорошо разработанные методы теории об оптимальной остановке броуновского движения[41,42]. В качестве примера рассмотрена задача различения двух простых гипотез.

Глава 4 содержит результат, который может быть полезен и в исследованиях вне рамок диссертации. А именно, показано, что B^H можно представить как линейный функционал от бесконечномерного диффузионного процесса.

[45] *Ширяев А. Н.* Статистический последовательный анализ. — 2 изд. — Москва: Наука, 1976

Пусть $\xi = (\xi_\beta)_{\beta>0}$ — гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $R_\xi(\alpha,\beta) = (\alpha+\beta)^{-1}$, а $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ — независимое от ξ стандартное броуновское движение. Построим по ξ и B семейство процессов $\{Z^\beta\}_{\beta>0}$, где $Z^\beta = (Z_t^\beta)_{t\geqslant 0}$ — процесс Орнштейна–Уленбека, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения

$$dZ_t^\beta = -\beta Z_t^\beta\, dt + dB_t, \quad Z_0^\beta = \xi_\beta.$$

Теорема. *Для* $H \in (0,1/2)\cup(1/2,1)$ *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *процесс* $\overline{B}^{H,\varepsilon} = (\overline{B}_t^{H,\varepsilon})_{t\geqslant 0}$, *определяемый как*

$$\overline{B}_t^{H,\varepsilon} = c_H \int_0^\infty \beta^{-1/2-H}(Z_t^\beta - \xi_\beta - e^{-\beta\varepsilon_0}B_t)\, d\beta + \varepsilon B_t, \tag{8}$$

где

$$c_H = \frac{[\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)]^{1/2}}{|\mathrm{B}(1/2+H,1/2-H)|}, \quad \varepsilon_0 = \left(\frac{\varepsilon}{c_H\Gamma(1/2-H)}\right)^{1/(H-1/2)},$$

является фрактальным броуновским движением с параметром Харста H.

Следствие. *Процесс* $\overline{B}^H = (\overline{B}_t^H)_{t\geqslant 0}$, *определяемый как*

$$\overline{B}_t^H = \begin{cases} c_H \int_0^\infty \beta^{-1/2-H}(Z_t^\beta - \xi_\beta)\, d\beta & \text{\textit{при} } H \in (0,\tfrac{1}{2}), \\ c_H \int_0^\infty \beta^{-1/2-H}(Z_t^\beta - \xi_\beta - B_t)\, d\beta & \text{\textit{при} } H \in (\tfrac{1}{2},1), \end{cases} \tag{9}$$

также является фрактальным броуновским движением с параметром Харста H.

Один из естественно возникающих вопросов состоит в том, как для заданного B^H построить соответствующие процессы ξ и B. Следующее замечание частично отвечает на него.

Замечание. Пусть $B^H = (B_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ является фрактальным броуновским движением на всей действительной прямой. Тогда существуют процессы ξ и B такие, что $(B_t^H)_{t\geqslant 0}$ задаётся представлениями (8)-(9).

Полученные представления позволяют применять к B^H некоторые методы из теории марковских процессов. Так, для получения неравенств с

B^H может быть использована общая теория об оптимальной остановке для семейства марковских процессов $\{Z^\beta\}_{\beta>0}$.

Теорема. *Пусть B^H — фрактальное броуновское движение с параметром Харста H. Тогда*

$$-k_H(\mathrm{E}\tau)^H \leqslant \mathrm{E}B^H_\tau \leqslant k_H(\mathrm{E}\tau)^H$$

для всех моментов остановки τ процесса B^H. При этом

$$k_H \leqslant c_H\frac{(2\pi)^{-H/2}}{H\sqrt{2}}\int_{\mathbb{R}}\Phi(u)\left[\int_{-\infty}^{u}\Phi^2(v)e^{v^2/2}\,dv\right]^{-H}du.$$

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Муравлёв А. А. О моментах остановки, связанных с падением и ростом броуновского движения со сносом // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 6. — С. 171–172.

[2] Муравлёв А. А. Об одном свойстве распределения броуновского движения со сносом и его максимума // Теория вероятностей и ее применения. — 2010. — Т. 55, № 2. — С. 362–368.

[3] Муравлёв А. А. Представление фрактального броуновского движения через бесконечномерный процесс Орнштейна–Уленбека // Успехи математических наук. — 2011. — Т. 66, № 2. — С. 235–236.

[4] Muravlev A. A. On the Laplace transform of characteristics connected with drawdowns and rallies of a Brownian motion with drift // Theory of probability and its applications. — 2011. — Vol. 55, № 3. — Pp. 548–549.

[5] Муравлёв А. А. Методы последовательного различения гипотез о значении сноса фрактального броуновского движениния // Успехи математических наук. — 2013. — Т. 68, № 3. — С. 194–195.

Подписано в печать 13.06.2013
Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8