Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета
“Высшая школа экономики”

Общеинститутская кафедра высшей математики

На правах рукописи

УДК 517.5

Лебедев Владимир Владимирович

ОПЕРАТОРЫ СУПЕРПОЗИЦИИ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва 2013

Оглавление

Введение

В диссертации исследуются свойства операторов суперпозиции (замены переменной)

$$f \to f \circ \varphi$$

в некоторых пространствах функций, естественно возникающих в гармоническом анализе. (Как обычно $(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t))$.)

Для интегрируемых функций f на окружности $\mathbb{T}$ рассмотрим их разложения в ряд Фурье

$$f(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikt}.$$

С рядами Фурье связаны многие часто встречающиеся в анализе пространства "хороших" функций. Примерами служат: пространство непрерывных функций с условием

$$\sum_k |\widehat{f}(k)| < \infty$$

(алгебра Винера), его обобщение — пространство функций, преобразование Фурье которых $\widehat{f}$ суммируемо со степенью p, пространства Соболева, пространства функций с заданной скоростью убывания коэффициентов Фурье или с заданным их распределением и другие.

Для различных пространств $\mathbb{X}$ такого типа (по большей части в работе рассматриваются банаховы пространства) естественно рассматривать следующие три вопроса.

1. Можно ли произвольную непрерывную функцию на $\mathbb{T}$ привести в $\mathbb{X}$ при помощи гомеоморфной замены переменной, т.е. верно ли, что для любой непрерывной функции f найдется гомеоморфизм h окружности $\mathbb{T}$ на себя такой, что $f \circ h \in \mathbb{X}$?

2. Какие отображения окружности φ в себя (важным частным случаем являются гомеоморфизмы) допустимы в $\mathbb{X}$ (или действуют в $\mathbb{X}$), т.е. обладают тем свойством, что для любой функции $f \in \mathbb{X}$ мы имеем $f \circ \varphi \in \mathbb{X}$?

3. Какие функции f устойчивы в $\mathbb{X}$, т.е. обладают тем свойством, что для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ мы имеем $f \circ h \in \mathbb{X}$?

Второй вопрос допускает следующую модификацию. Имея два пространства $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ функций на $\mathbb{T}$ мы можем спросить, какие отображения φ окружности действуют из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$, т.е. обладают тем свойством, что для любой функции $f \in \mathbb{X}$ мы имеем $f \circ \varphi \in \mathbb{Y}$. Резонно также рассматривать многомерный случай т.е. пространства функций на торе $\mathbb{T}^n$, а также, не ограничиваясь периодическим случаем, рассматривать классы функций на прямой $\mathbb{R}$ или на $\mathbb{R}^n$, естественным образом характеризуемые поведением преобразования Фурье.

Начало исследований в направлении, связанном с приводимостью, было положено Г. Бором, который в 1935 г., улучшив более давний результат Ж. Пала, показал, что для любой вещественной непрерывной функции f на $\mathbb{T}$ существует гомеоморфизм $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ такой, что $f \circ h$ имеет равномерно сходящийся ряд Фурье. По-видимому следует считать, что этот результат Бора в целом положил начало изучению операторов суперпозиции в теории рядов Фурье. В дальнейшем задача о приводимости для различных пространств рассматривалась А. М. Олевским, Ж.-П. Каханом, И. Кацнельсоном, А. А. Саакяном, Б. С. Кашиным, Д. Ватерманом. Обзор результатов по этой тематике содержится в работе Олевского [58] (см. также его работу [59]). Позже некоторые поставленные там проблемы рассматривались автором настоящей работы в [34] и [35].

Значительно менее изучено направление, связанное с допустимыми заменами переменной. Первым значительным результатом явилась теорема А. Берлинга и Г. Хелсона (при дополнительном предположении гладкости одновременно полученная З. Л. Лейбензоном). Согласно этой теореме в пространстве абсолютно сходящихся рядов Фурье нет нетривиальных допустимых замен. В дальнейшем для разных пространств функций вопрос об операторах суперпозиции, действующих в этих пространствах, рассматривался Ж.-П. Каханом, И. Кацнельсоном, Н. Лебланом, Л. Алпаром, Р. Кауфманом, И. Домаром, Л. Хермандером. Обзор некоторых из этих результатов имеется в работе Кахана [28]. Ряд результатов о допустимых заменах в пространствах функций с последовательностью коэффициентов Фурье из l^p, и в пространстве l^p -мультипликаторов Фурье был получен совместно автором и А. М. Олевским [46]–[49].

Еще менее изученным является направление, связанное с устойчивостью. Первые результаты получены К. Гоффманом и Д. Ватерманом для пространства функций на окружности $\mathbb{T}$, имеющих сходящийся всюду ряд Фурье, а также А. Бернстайном и Д. Ватерманом для пространства функций, имеющих равномерно сходящийся ряд Фурье. Вопрос об устойчивости в пространствах функций на $\mathbb{T}$ с заданной скоростью убывания преобразования Фурье рассматривался Ватерманом. Этот вопрос рассматривал также Г. Т. Ониани.

В диссертации, в основном, исследуется ряд вопросов, связанных с допустимыми заменами и с устойчивостью.

Отметим, что многие свойства операторов суперпозиции $f \to f \circ \varphi$ в различных пространствах проявляются в том, как при больших частотах

$n \in \mathbb{Z}$ ведут себя в этих пространствах экспоненты $e^{in\varphi(t)}$. Изучению таких экспонент мы уделяем особое внимание. Отметим также, что некоторые вопросы, на первый взгляд не относящиеся к указанной тематике, в действительности могут быть сведены к задачам, связанным с операторами суперпозиции. В первую очередь это касается исследования поведения преобразования Фурье характеристических функций (индикаторов) областей в $\mathbb{R}^n$.

I. Обзор ранее известных результатов и краткое изложение результатов диссертации

Содержание главы 1.

Мы рассматриваем ряды Фурье

$$f(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{ikt}$$

(интегрируемых) функций f на окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел.

Пусть $A(\mathbb{T})$ — пространство непрерывных функций f на $\mathbb{T}$ таких, что последовательность коэффициентов Фурье $\widehat{f} = \{\widehat{f}(k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ принадлежит l^1. Снабженное естественной нормой

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} = \|\widehat{f}\|_{l^1(\mathbb{Z})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|,$$

пространство $A(\mathbb{T})$ является банаховым пространством. Хорошо известно, что $A(\mathbb{T})$ является банаховой алгеброй (с обычным умножением функций).

Естественными расширениями пространства $A(\mathbb{T})$ являются пространства $A_p(\mathbb{T}),\ 1 < p \leq 2$, интегрируемых функций f на $\mathbb{T}$ таких, что $\widehat{f}$ принадлежит l^p. Снабженные естественными нормами

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T})} = \|\widehat{f}\|_{l^p(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^p\right)^{1/p},$$

пространства $A_p(\mathbb{T}),\ 1 < p \leq 2$, являются банаховыми пространствами. При $p = 1$ мы полагаем $A_1 = A$.

Пусть имеется непрерывное отображение окружности в себя, т.е. непрерывная функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) \pmod{2\pi}.$$

Согласно известной теореме Берлинга–Хелсона [6] (см. также [27], [28]), если $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(1),\ n \in \mathbb{Z}$, то отображение φ линейно (аффинно) с целым угловым коэффициентом: $\varphi(t) = \nu t + \varphi(0),\ \nu \in \mathbb{Z}$. Эта теорема дает решение проблемы П. Леви об описании эндоморфизмов алгебры $A(\mathbb{T})$: все эти эндоморфизмы тривиальны, т.е. имеют вид $f(t) \to f(\nu t + t_0)$. Другими словами, лишь тривиальные замены переменной допустимы в $A(\mathbb{T})$. В самом деле, если отображение φ таково, что для любой функции $f \in A(\mathbb{T})$ мы имеем $f \circ \varphi \in A(\mathbb{T})$, то, пользуясь стандартными рассуждениями (теоремой о замкнутом графике), видим, что оператор суперпозиции $f \to f \circ \varphi$ является ограниченным оператором в $A(\mathbb{T})$ и, поскольку экспонента e^{int} с любой частотой $n \in \mathbb{Z}$ имеет норму в $A(\mathbb{T})$, равную 1, получаем $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(1)$, откуда в силу теоремы Берлинга–Хелсона следует линейность отображения φ.

Отметим также еще одну версию теоремы Берлинга–Хелсона: если U — ограниченный коммутирующий со сдвигами оператор в l^1 такой, что $\|U^n\|_{l^1 \to l^1} = O(1),\ n \in \mathbb{Z}$, то $U = \xi S$, где ξ — постоянная, $|\xi| = 1$, и S — оператор сдвига.

Вместе с тем, хотя теорема Берлинга–Хелсона устанавливает неограниченность норм $\|e^{in\varphi}\|_A$ для нелинейных отображений $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, характер роста этих норм при $|n| \to \infty$ во многом неясен. То же касается поведения норм $\|e^{in\varphi}\|_{A_p},\ p > 1$. Глава 1 посвящена изучению этих вопросов.

Отметим, что если отображение $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ непрерывно, то $\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$ не зависит от t. Заменяя отображение φ на $\varphi_0(t) = \varphi(t) - kt$, мы получим вещественную функцию φ_0 на $\mathbb{T}$. При этом $\|e^{in\varphi_0}\|_{A_p} = \|e^{in\varphi}\|_{A_p}$. Таким образом, вместо нелинейных непрерывных отображений $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ можно рассматривать непостоянные непрерывные функции $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. В этом случае нет надобности ограничиваться экспонентами с целыми частотами и можно равным образом изучать поведение экспонент $e^{i\lambda\varphi}$ с вещественными частотами λ. Соответствующие результаты о поведении экспонент $e^{in\varphi}$ для нелинейных отображений $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ и целых частот n немедленно получаются в качестве простых следствий.

Приведем ранее известные результаты о поведении экспонент $e^{i\lambda\varphi}$ в пространствах A_p.

Пусть $C^s(\mathbb{T})$ — класс (комплекснозначных) функций на $\mathbb{T}$, имеющих непрерывную производную порядка s. Имеем $C^1(\mathbb{T}) \subseteq A(\mathbb{T}) \subseteq A_p(\mathbb{T})$.

Нетрудно показать, что для любой вещественной функции $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$ (и более того, для любой абсолютно непрерывной вещественной функции φ с производной из $L^2(\mathbb{T})$) при $1 \leq p < 2$ справедлива оценка

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(|\lambda|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}), \qquad |\lambda| \to \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{1}$$

(см. [27, гл VI, § 3] в случае $p = 1$; общий случай немедленно получается интерполяцией между l^1 и l^2).

С другой стороны, давно известны оценки снизу норм экспонент $e^{i\lambda\varphi}$ для функций класса C^2. Предположим, что $\varphi \in C^2(\mathbb{T})$ — вещественная непостоянная функция и $1 \leq p < 2$. Тогда

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \geq c|\lambda|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $c = c(p, \varphi)$ не зависит от λ. При $p = 1$ эта оценка неявно содержится в работе З. Л. Лейбензона [51] и в явном виде была получена Ж.-П. Каханом [25] с использованием метода Лейбензона. В общем случае оценка (2) получена с использованием того же метода Л. Алпаром [3]. Простое и короткое доказательство для случая $p = 1$ имеется в [27, гл. VI, § 3] и в общем случае — в [46].

Таким образом, если $\varphi \in C^2(\mathbb{T})$ вещественная функция, $\varphi \neq \mathrm{const}$, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \simeq |\lambda|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \qquad |\lambda| \to \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

при всех $p,\ 1 \leq p < 2$. В частности

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \simeq \sqrt{|\lambda|}.$$

Отметим, что доказательство оценки Лейбензона–Кахана–Алпара (2) основано на лемме ван дер Корпута и существенно использует отделенность от нуля кривизны дуги графика функции φ, т.е. условие $|\varphi''(t)| \geq \rho > 0,\ t \in I$, где I — некоторый интервал. Этот подход не позволяет рассматривать функции гладкости меньшей чем C^2.

В общем случае (без предположений гладкости) рост норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}$ может быть довольно медленным. Кахан показал (см. [27, гл. VI, § 2]), что если непостоянная непрерывная функция $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ кусочно линейна, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_A \simeq \log|\lambda|. \tag{4}$$

При $p > 1$ нормы $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})}$ могут вовсе не расти; известно (см., например, [46]), что для любой кусочно линейной вещественной функции φ на $\mathbb{T}$ имеем $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p} = O(1)$ при всех $p > 1$. Таким образом, случай $p > 1$ отличается от случая $p = 1$.

Укажем теперь известные результаты в C^1 -гладком случае (помимо оценки (1)). В работе [46] (совместная работа автора и А. М. Олевского) построена вещественная функция $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$, $\varphi \neq \mathrm{const}$, такая, что $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p} = O(1)$ при всех $p > 1$. Кроме того, эта функция нигде не линейна, т.е. не является линейной ни на каком интервале (и, таким образом, в определенном смысле, существенно отличается от кусочно линейных функций). Используя близкий метод, автор показал в [38], что для C^1 -гладких функций нормы $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}$ могут расти довольно медленно, а именно, если $\gamma(\lambda) \geq 0$ и $\gamma(\lambda) \to \infty$, то существует нигде не линейная вещественная функция $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$ такая, что

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(\gamma(|\lambda|)\log|\lambda|). \tag{5}$$

Таким образом, случай C^1 -гладкой фазы φ существенно отличается от C^2 -гладкого случая (см. (3)).

Приведем еще результат М. Н. Леблана [50]: если вещественная функция $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$ непостоянна и ее производная φ' удовлетворяет условию Липшица с показателем α, $0 < \alpha \leq 1$, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \geq c\frac{|\lambda|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{(\log|\lambda|)^2}, \qquad |\lambda| \geq 2. \tag{6}$$

Насколько нам известно — это единственная, ранее полученная, оценка снизу норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A$ в случае, когда $\varphi \in C^1$, но дважды дифференцируемость функции φ не предполагается.

Особый интерес при исследовании поведения норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ представляет, на наш взгляд, случай $p = 1$. Напомним, что согласно теореме Берлинга–Хелсона, приведенной выше, если φ — непрерывное отображение окружности в себя, такое, что $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(1)$, то φ линейно. В связи с этой теоремой Каханом была поставлена следующая проблема: выяснить для каких последовательностей ω_n, стремящихся к бесконечности, условие $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(\omega_n)$ влечет линейность отображения φ. Отметим, что априори существование такой последовательности и, тем самым, возможное, принципиальное усиление теоремы Берлинга–Хелсона, — не очевидно. Никаких результатов на этот счет ранее не было. Для непрерывных кусочно линейных но не линейных отображений $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ имеем $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \simeq \log|n|$ (см. (4)). Может ли (для нелинейных непрерывных φ) рост норм $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}$ быть медленнее логарифмического — неизвестно. Кахану принадлежит гипотеза о том, что из условия $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = o(\log|n|)$, $|n| \to \infty$, следует, что φ линейно. Насколько известно автору, впервые проблема об усилении теоремы Берлинга–Хелсона и гипотеза о минимальности логарифмического роста были сформулированы Каханом в докладе на Международном конгрессе математиков в Стокгольме в 1962 г. [26]. Позднее они отмечались Каханом в [27] и [28].

В § 1 получено частичное решение проблемы Кахана. А именно, мы получаем (теорема 1) следующее усиление теоремы Берлинга–Хелсона: если

φ — непрерывное отображение окружности в себя такое, что

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = o\left(\left(\frac{\log\log|n|}{\log\log\log|n|}\right)^{1/12}\right), \tag{7}$$

то φ — линейно.

Идеологически доказательство нашей теоремы до некоторой степени близко к доказательству теоремы Берлинга–Хелсона, изложенному Каханом в [28] (доказательство в [28], основано на совершенно другой идее нежели оригинальное доказательство Берлинга и Хелсона [6], [27]). Мы модифицируем рассуждения Кахана и применяем их не к группе $\mathbb{T}$, а к циклической группе $\mathbb{T}_N$ при больших N и не к самому отображению φ, а к отображению φ_N, которое на $\mathbb{T}_N$ хорошо приближает отображение φ, и значения которого — рациональные числа "с малым общим знаменателем". Такое отображение строится при помощи теоремы Дирихле о совместных диофантовых приближениях. В доказательстве используется теорема Грина–Конягина [20, теорема 1.3], точнее ее важный частный случай, который для простых N дает оценку количества элементов произвольного множества $E \subseteq \mathbb{T}_N$ через l^1 -норму преобразования Фурье (на $\mathbb{T}_N$) его характеристической функции.

В конце параграфа указана соответствующая операторная версия полученной теоремы и обсуждаются некоторые открытые проблемы.

В дальнейшей части главы изучается поведение экспонент с C^1 -гладкой фазой в общем случае пространств $A_p,\ 1 \le p < 2$.

В § 2 получены оценки снизу норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ для C^1 -гладких вещественных функций φ на $\mathbb{T}$. Пусть задана непрерывная неубывающая функция ω на $[0, +\infty)$ такая, что $\omega(0) = 0$. Через $C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ обозначим класс непрерывно дифференцируемых функций g на $\mathbb{T}$ таких, что $\omega(g', \delta) = O(\omega(\delta)),\ \delta \to +0$, где

$$\omega(g', \delta) = \sup_{|t_1-t_2|\le\delta} |g'(t_1) - g'(t_2)|, \qquad \delta \ge 0,$$

— модуль непрерывности производной g' функции g. В случае $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, мы пишем просто $C^{1,\alpha}$ вместо C^{1,δ^α}.

Мы показываем, что (теорема 2) если $1 \le p < 2$ и $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ — вещественная непостоянная функция, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \ge c|\lambda|^{1/p}\chi^{-1}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| \ge 1, \tag{8}$$

где χ^{-1} — функция, обратная к $\chi(\delta) = \delta\omega(\delta)$, и константа $c = c(p, \varphi) > 0$ не зависит от λ.

Отсюда немедленно получаем оценки норм экспонент для фазовых функций, производная которых удовлетворяет условию Липшица с показателем α. Мы видим, что (следствие 1) если $0 < \alpha \leq 1$ и вещественная функция $\varphi \in C^{1,\alpha}(\mathbb{T})$ непостоянна, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \geq c_p|\lambda|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{1+\alpha}}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

при всех $p,\ 1 \leq p < 1+\alpha$. В частности, полагая здесь $p = 1$, получаем более сильный результат, чем оценка Леблана (6), а именно,

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \geq c|\lambda|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Для $\varphi \in C^2$ имеем $\alpha = 1$ и из (9) получаем оценку Лейбензона–Кахана–Алпара (2).

Отметим, что оценка Лейбензона–Кахана–Алпара и оценка Леблана имеют локальный характер; грубо говоря, они остаются в силе, если предположить, что φ нелинейна на некотором интервале и имеет на этом интервале требуемую гладкость. Наши оценки снизу также носят локальный характер (теорема $2'$).

Отметим также, что метод доказательства оценки (8) не имеет ничего общего с методом, использованным в § 1; в C^1 -гладком случае мы используем метод, который уместно назвать методом концентрации больших значений преобразования Фурье.

В § 3 для каждого класса $C^{1,\omega}$ мы строим нетривиальную функцию $\varphi \in C^{1,\omega}$, дающую медленный рост норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$, тем самым мы показываем, что оценка (8) (полученная в теореме 2) близка к окончательной, а в некоторых случаях является окончательной, а именно, мы показываем (теорема 3), что для каждого класса $C^{1,\omega}$ (при некотором простом условии, наложенном на ω) существует нигде не линейная вещественная функция $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ такая, что

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq c\frac{|\lambda|}{\log|\lambda|}\chi^{-1}\left(\frac{(\log|\lambda|)^2}{|\lambda|}\right), \qquad |\lambda| \geq 2,$$

и при всех $p,\ 1 < p < 2$,

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_p\left(\int_1^{|\lambda|}\left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)^p d\tau\right)^{1/p}, \qquad |\lambda| \geq 2.$$

Приведем следствия из этой теоремы. Полагая $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, немедленно получаем, что (следствие 2) при каждом $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$, существует нигде не линейная вещественная функция $\varphi \in C^{1,\alpha}(\mathbb{T})$ такая, что

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_A = O\big(|\lambda|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(\log|\lambda|)^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\big), \qquad |\lambda| \to \infty.$$

Для той же функции φ имеем

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p} \simeq |\lambda|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{1+\alpha}}$$

при $1 < p < 1+\alpha$, а также

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p} \simeq 1$$

при $1+\alpha < p < 2$. Кроме того,

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p} = O((\log|\lambda|)^{1/p})$$

при $p = 1+\alpha$.

Отметим, что из нашей оценки (9) и очевидной оценки

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \geq \|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_2(\mathbb{T})} = \|e^{i\lambda\varphi}\|_{L^2(\mathbb{T})} = 1, \qquad 1 \leq p \leq 2,$$

вытекает, что среди всех нетривиальных функций, производная которых удовлетворяет условию Липшица с показателем α, построенная нами функция φ дает минимально возможный рост норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ при $1 < p < 2,\ p \neq 1+\alpha$.

Другим следствием теоремы 3 (следствие 3) является приведенный выше результат автора о существовании нетривиальных C^1 -гладких функций φ с крайне медленным (как угодно близким к логарифмическому) ростом норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A$ (см. (5)).

Отметим, что наш метод построения нелинейных функций заданной гладкости, дающих медленный рост, является развитием метода, использованного в совместной работе автора и А. М. Олевского [46] при построении уже указанного выше примера (нигде не линейной) C^1 -гладкой фазовой функции φ такой, что $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(1)$ при всех $p > 1$.

В § 4 рассмотрены C^1 -гладкие отображения окружности в себя и даны соответствующие версии результатов, полученных в §§ 2, 3. Эти версии (теоремы 4, 5) имеют естественные приложения к изучению операторов суперпозиции $f \to f \circ \varphi$ в пространствах A_p. В частности, мы указываем гладкость, которой может обладать нелинейное отображение $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ такое, что $f \circ \varphi \in \bigcap_{p>1} A_p$ для любой функции $f \in A$.

Отметим, что, как было показано ранее автором совместно с А. М. Олевским, если C^1 -гладкое отображение φ порождает ограниченный оператор суперпозиции в $A_p(\mathbb{T})$ при каком либо $p,\ p \neq 2$, то φ линейно [46].

В § 5 мы распространяем, полученные в §§ 2, 3, результаты о поведении норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ на многомерный случай. Пусть $A(\mathbb{T}^m)$ — пространство непрерывных функций f на m -мерном торе $\mathbb{T}^m$ таких, что последовательность коэффициентов Фурье $\widehat{f} = \{\widehat{f}(k),\ k \in \mathbb{Z}^m\}$ принадлежит $l^1(\mathbb{Z}^m)$.

При $1 < p \leq 2$ пусть $A_p(\mathbb{T}^m)$ — пространство интегрируемых функций f на $\mathbb{T}^m$ таких, что $\widehat{f} \in l^p(\mathbb{Z}^m)$. При $p = 1$ полагаем $A_1 = A$. Снабженные естественными нормами

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} = \|\widehat{f}\|_{l^p(\mathbb{Z}^m)} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |\widehat{f}(k)|^p\right)^{1/p}$$

пространства $A_p(\mathbb{T}^m)$ являются банаховыми $(1 \leq p \leq 2)$, причем $A(\mathbb{T}^m)$ — банахова алгебра (с обычным умножением функций).

Пусть $C^s(\mathbb{T}^m)$ — класс (комплекснозначных) функций на торе $\mathbb{T}^m$ таких, что все частные производные порядка s непрерывны.

В многомерном случае для фазовых функций φ гладкости C^2 (и выше) поведение норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A$ ранее рассматривал Хедстром [79]. Как и в одномерном случае, легко получить оценку сверху, так, например [1], если $\varphi \in C^s(\mathbb{T}^m),\ s > m/2,\ m \geq 2$, то $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^m)} = O(|\lambda|^{m/2})$ (в [79] эта оценка, являющаяся многомерным аналогом оценки (1) для $p = 1$, получена при несколько иных предположениях гладкости). В той же работе [79] получена следующая оценка снизу: если $\varphi \in C^2(\mathbb{T}^m)$ — вещественная функция такая, что матрица ее вторых производных имеет определитель, не равный тождественно нулю, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^m)} \geq c|\lambda|^{m/2}. \tag{10}$$

Этот результат Хедстрома является многомерным вариантом результата Лейбензона–Кахана, т.е. оценки (2) при $p = 1$. Доказательство заключается в сведении к одномерному случаю.

Основным результатом § 5 является теорема 6, которая дает многомерный вариант нашей оценки (8), т.е. оценку снизу норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}$ для C^1 -гладких вещественных функций φ на торе $\mathbb{T}^m$. При этом мы предполагаем, что множество значений $\nabla\varphi(\mathbb{T}^m)$ градиента $\nabla\varphi$ функции φ имеет положительную (лебегову) меру; в этом случае мы говорим, что градиент функции φ невырожден. Это условие является заменой условия нелинейности (непостоянства) в многомерном случае. Основой доказательства теоремы является естественная модификация метода концентрации больших значений преобразования Фурье, использованного в § 2 для одномерного случая.

Отметим, что для C^2 -гладких функций φ наше условие невырожденности градиента равносильно условию $\det(\partial^2\varphi/\partial t_i\partial t_j) \not\equiv 0$. Это следует из

[1] Чтобы убедиться в этом, достаточно повторить, с очевидными изменениями, рассуждения, использованные при $m = 1$ в [27, гл. VI, § 3].

теоремы Сарда о критических значениях (см., например, [57, гл. 1, § 2]) и теоремы об обратном отображении, примененных к отображению $\nabla\varphi$.

Для фазовых функций с градиентом, удовлетворяющим условию Липшица с показателем α, теорема 6 влечет следствие 4, дающее многомерный вариант оценки (9) следствия 1. Частный случай следствия 4 при $\alpha = 1$ (следствие 5) немедленно влечет результат Хедстрома (10).

Далее, для каждого класса фазовых функций заданной гладкости мы строим фазу φ, имеющую нигде не вырожденный градиент, такую, что нормы $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}$ растут очень медленно (теорема 7 и ее следствия 6, 7). Для одномерного случая это сделано в § 3. Общий случай легко получить из одномерного.

Отметим еще, что, пользуясь вполне стандартными методами, мы получаем многомерный аналог оценки (1) (теорема 8) и с учетом нашей оценки снизу получаем многомерный аналог соотношения (3) (теорема 9).

Содержание главы 2.

Пусть D — ограниченная область (открытое связное множество) в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Рассмотрим ее характеристическую функцию 1_D, т.е. функцию на $\mathbb{R}^n$, принимающую значение $1_D(t) = 1$ при $t \in D$ и значение $1_D(t) = 0$ при $t \notin D$. Рассмотрим преобразование Фурье $\widehat{1_D}$ этой функции. В главе 2 изучается следующий вопрос: для каких областей D мы имеем $\widehat{1_D} \in L^p(\mathbb{R}^n)$? Интерес представляет лишь случай $1 < p < 2$.

Удобно иметь дело с пространствами $A_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, умеренных распределений f на $\mathbb{R}^n$ таких, что преобразование Фурье $\widehat{f}$ принадлежит $L^p(\mathbb{R}^n)$. Норма в $A_p(\mathbb{R}^n)$ определяется естественным образом: $\|f\|_{A_p(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

Прямое вычисление показывает, что если D — куб в $\mathbb{R}^n$, то $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$ при всех $p > 1$. То же верно в случае, когда D — многогранник (т.е. конечное объединение симплексов). С другой стороны, пользуясь хорошо известной ассимптотикой функций Бесселя, можно убедиться, что если $D \subseteq \mathbb{R}^n$ — шар, то $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$ при $p > 2n/(n+1)$ и $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^n)$ при $p \leq 2n/(n+1)$. Такой же результат имеет место в общем случае для ограниченных областей с дважды гладкой границей. (Это вытекает из теорем 1, 2 главы 2.) Таким образом, для ограниченных областей с C^2 -гладкой границей $2n/(n+1)$ является критическим значением показателя интегрируемости преобразования Фурье характеристической функции.

Мы получаем ряд результатов о поведении преобразования Фурье характеристических функций ограниченных областей с C^1 -гладкой границей. Этот случай, вообще говоря, существенно отличается от дважды гладкого;

в § 3 мы строим пример области $D \subseteq \mathbb{R}^2$, граница которой C^1 -гладкая, и вместе с тем $1_D \in A_p(\mathbb{R}^2)$ при всех $p > 1$. (Критическое значение для плоских областей с дважды гладкой границей равно $4/3$.)

Отметим, что различные вопросы о поведении на бесконечности (порядке убывания к нулю) преобразования Фурье характеристических функций областей и близкие вопросы о поведении преобразования Фурье (гладких) мер, сосредоточенных на поверхностях, исследовались многими авторами и относятся к классической тематике гармонического анализа, см. обзорную статью И. Стейна [70], где имеется обширная библиография, а также его книгу [71] (гл. VIII). Основными инструментами для получения асимптотических оценок в этих исследованиях являются метод стационарной фазы и лемма ван дер Корпута. Применение этих методов требует значительной гладкости границы области, как минимум равной двум уже в плоском случае. Важнейшую роль при таком подходе играет кривизна поверхности (границы области). Наш подход не использует никаких соображений, связанных с кривизной, и позволяет рассматривать области с C^1 -гладкой границей.

Мы обозначаем границу области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ через ∂D. Говоря, что граница области D является C^1 -гладкой или C^2 -гладкой, мы имеем ввиду, что в окрестности каждой своей точки граница ∂D является графиком некоторой (вещественной) функции класса C^1 или C^2 соответственно (т.е. функции, у которой все частные производные первого или второго порядка соответственно — непрерывны).

Для всякой области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ с C^1 -гладкой границей пусть $\nu_D(x)$ — единичная внешняя нормаль к ∂D в точке $x \in \partial D$. Возникающее таким образом отображение $\nu_D : \partial D \to S^{n-1}$ границы области D в единичную сферу S^{n-1} с центром в начале координат мы называем нормальным отображением. Через $\omega(\nu_D, \delta)$ обозначим модуль непрерывности отображения ν_D:

$$\omega(\nu_D, \delta) = \sup_{x,y\ \in \partial D;\ |x-y| \le \delta} |\nu_D(x) - \nu_D(y)|, \qquad \delta \ge 0,$$

где $|u|$ — длина вектора $u \in \mathbb{R}^n$. Пусть далее $\omega(\delta)$ — произвольная неубывающая непрерывная функция на $[0, \infty)$ такая, что $\omega(0) = 0$. В случае, когда $\omega(\nu_D, \delta) = O(\omega(\delta))$, $\delta \to +0$, мы говорим, что граница ∂D является $C^{1,\omega}$ -гладкой [2].

Если граница ∂D области D является C^1 -гладкой, C^2 -гладкой или $C^{1,\omega}$

[2] Для ограниченных областей это условие эквивалентно тому, что в окрестности каждой своей точки граница области D является графиком некоторой функции класса $C^{1,\omega}$. Другими словами — для каждой точки $x \in \partial D$ можно найти окрестность B, содержащую x, и область $V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ такую, что $B \cap \partial D$ является графиком некоторой (вещественной) функции $\varphi \in C^{1,\omega}(V)$, т.е. функции с условием

-гладкой, то мы пишем $\partial D \in C^1$, $\partial D \in C^2$, $\partial D \in C^{1,\omega}$, соответственно. Если $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, то мы пишем просто $C^{1,\alpha}$ вместо C^{1,δ^α}.

В § 1 мы даем простое доказательство включения $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$, верного при $p > 2n/(n+1)$ для всех ограниченных областей $D \subseteq \mathbb{R}^n$ с C^1 -гладкой границей (теорема 1). Для выпуклых областей (без предположения гладкости границы) такое утверждение было ранее получено К. Герцем [18].

В § 2 получен основной результат главы 2. А именно, мы показываем (теорема 2), что если $\partial D \in C^{1,\omega}$ и

$$\int_0^1 \frac{\delta^{n(p-1)-1}}{\omega(\delta)^{n-p}} d\delta = \infty, \tag{11}$$

то $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^n)$. В частности (следствие 1), если $\partial D \in C^{1,\alpha}$, то $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^n)$ при

$$p \le 1 + \frac{(n-1)\alpha}{n+\alpha}.$$

В свою очередь, отсюда, полагая $\alpha = 1$ и учитывая предыдущий результат, получаем уже упомянутое утверждение о критическом показателе для областей с дважды гладкой границей, более того, эффект критического показателя имеет место в $C^{1,1}$ -гладком случае (следствие 2).

В § 3 рассматриваются плоские области. В соответствии с указанным выше результатом видим (см. (11)), что если для области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ мы имеем $\partial D \in C^{1,\omega}$ и

$$\int_0^1 \frac{\delta^{2p-3}}{\omega(\delta)^{2-p}} d\delta = \infty,$$

то $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^2)$. В частности, если $\partial D \in C^{1,\alpha}$, то $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^2)$ при $p \le 1 + \alpha/(2+\alpha)$. Мы показываем (теорема 3), что этот результат является точным в том смысле, что для каждого класса $C^{1,\omega}$ (при некотором простом условии, наложенном на ω) существует ограниченная область $D \subseteq \mathbb{R}^2$ такая, что $\partial D \in C^{1,\omega}$ и $1_D \in A_p(\mathbb{R}^2)$ при всех $p > 1$, для которых

$$\int_0^1 \frac{\delta^{2p-3}}{\omega(\delta)^{2-p}} d\delta < \infty.$$

В частности (следствие 3), если $0 < \alpha < 1$, то существует плоская область D с $C^{1,\alpha}$ -гладкой границей такая, что $1_D \in A_p(\mathbb{R}^2)$ при всех $p > 1 + \alpha/(2+\alpha)$. Кроме того, отсюда вытекает, что (следствие 4) существует

$\omega(V, \nabla\varphi, \delta) = O(\omega(\delta))$, $\delta \to +0$, где

$$\omega(V, \nabla\varphi, \delta) = \sup_{x,y \in V;\ |x-y| \le \delta} |\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y)|, \qquad \delta \ge 0,$$

— модуль непрерывности градиента $\nabla\varphi$ функции φ.

плоская область D с C^1 -гладкой границей такая, что $1_D \in A_p(\mathbb{R}^2)$ при всех $p>1$ (достаточно взять ω убывающей к нулю медленнее любой степени, т.е. так, что $\lim_{\delta\to+0}\omega(\delta)/\delta^\varepsilon=\infty$ при всех $\varepsilon>0$).

Результаты главы 2 существенным образом опираются на результаты главы 1. Простые соображения (лемма 1 главы 2) позволяют свести изучение характеристических функций областей к изучению поведения экспонент.

Содержание главы 3.

Пусть $C(\mathbb{T})$ — класс непрерывных (комплекснозначных) функций на окружности $\mathbb{T}$. Мы рассматриваем некоторые пространства $\mathbb{X}$ функций на $\mathbb{T}$, естественным образом связанные с разложением в ряд Фурье, и изучаем следующий вопрос об устойчивости непрерывных функций в этих пространствах: какие функции $f\in C(\mathbb{T})$ обладают тем свойством, что для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя суперпозиция $f\circ h$ принадлежит $\mathbb{X}$?

Первые результаты в этом направлении получены К. Гоффманом и Д. Ватерманом [19], а также А. Бернстайном и Д. Ватерманом [7] в случаях, когда $\mathbb{X}$ — это соответственно пространство функций, имеющих сходящийся всюду ряд Фурье, и пространство функций, имеющих равномерно сходящийся ряд Фурье. Д. Ватерман [10] рассматривал пространства функций, имеющих заданную скорость убывания коэффициентов Фурье, и показал, что для произвольной функции $f\in C(\mathbb{T})$ следующие условия эквивалентны:

(i) $\widehat{f\circ h}(n)=O(\gamma(|n|)/|n|),\ |n|\to\infty$, для любого гомеоморфизма h;

(ii) $V(f,n)=O(\gamma(n))$.

Здесь γ — заданная функция, удовлетворяющая некоторым простым условиям, и $V(f,n)$ — модуль вариации функции f, введенный З. А. Чантурией [82] (см. также [83], [84]) и позже, независимо, Е. А. Севастьяновым [68], а именно:

$$V(f,n)=\sup\sum_{j=1}^{n}|f(b_j)-f(a_j)|,$$

где n фиксировано и верхняя грань берется по всевозможным наборам попарно непересекающихся интервалов $(a_j,b_j)\subset\mathbb{T},\ j=1,2,\dots,n$. В частности, $\widehat{f\circ h}(n)=O(1/|n|)$ для любого гомеоморфизма h тогда и только тогда, когда f — функция ограниченной вариации.

Отметим, что нетривиальная часть теоремы Ватермана — это утверждение (i)$\Rightarrow$(ii). Импликация (ii)$\Rightarrow$(i) доказывается следующим образом.

Пользуясь хорошо известной оценкой $|\widehat{g}(n)| \le c\omega_1(g,1/|n|)$ коэффициентов Фурье через L^1 -модуль непрерывности (см. [5]) и оценкой $\omega_1(g,1/n) \le cV(g,n)/n$, полученной в [83], мы имеем $|\widehat{g}(n)| \le cV(g,|n|)/|n|,\ n \ne 0$, и остается лишь заметить, что модуль вариации функции инвариантен относительно замен переменной, т.е. $V(f,n) = V(f\circ h,n)$ для любого гомеоморфизма $h:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$. Подобная ситуация является типичной для ряда пространств. В вопросе устойчивости нетривиальным является получение необходимого условия устойчивости. Достаточное условие обычно получается сравнительно просто.

Наши результаты об устойчивости формулируются в основном в терминах модуля квадратичной вариации. Напомним, что квадратичная вариация $V_2(f)$ функции f на $\mathbb{T}$ определяется соотношением

$$V_2(f) = \sup\Big(\sum_{j=1}^{n}|f(b_j)-f(a_j)|^2\Big)^{1/2},$$

где верхняя грань берется по всем n и всем наборам попарно непересекающихся интервалов $(a_j,b_j)\subset\mathbb{T},\ j=1,2,\dots,n$. Определим модуль квадратичной вариации $V_2(f,n),\ n=1,2,\dots$, функции f, полагая

$$V_2(f,n) = \sup\Big(\sum_{j=1}^{n}|f(b_j)-f(a_j)|^2\Big)^{1/2},$$

где n фиксировано и верхняя грань берется по всевозможным наборам из n попарно непересекающихся интервалов $(a_j,b_j)\subset\mathbb{T},\ j=1,2,\dots,n.$

В § 1 получены две теоремы общего характера. В дальнейшем (в §§ 2, 3) они используются при описании классов устойчивых функций в ряде конкретных пространств. Основным результатом является теорема 1, в которой мы рассматриваем общий случай линейных нормированных пространств $\mathbb{X}$ функций на окружности $\mathbb{T}$ и при некоторых (малообременительных и легко проверяемых) предположениях относительно $\mathbb{X}$ указываем необходимое инвариантное условие устойчивости в $\mathbb{X}$. Одно из предположений заключается в том, что характеристическая функция 1_I любого интервала $I\subseteq\mathbb{T}$ принадлежит $\mathbb{X}$. Для всякого такого пространства положим $\alpha_{\mathbb{X}}(\delta) = \|1_{(-\delta,\ \delta)}\|_{\mathbb{X}},\ 0<\delta\le\pi$. Мы показываем, что если $f\in C(\mathbb{T})$ функция такая, что $f\circ h\in\mathbb{X}$ для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя, то

$$V_2(f,n) = O\bigg(\frac{1}{\alpha_{\mathbb{X}}(1/n)}\bigg), \qquad n\to\infty.$$

Отметим, что для многих пространств получить оценку величины $\alpha_{\mathbb{X}}(\delta)$ не представляет труда.

Простым примером пространств, к которым применима теорема 1 являются пространства $A_p(\mathbb{T}),\ 1 < p < 2$. Другим примером служат пространства Соболева $W_2^\lambda(\mathbb{T}),\ 0 < \lambda < 1/2$, состоящие из функций $f \in L^1(\mathbb{T})$ таких, что

$$\|f\|_{W_2^\lambda} = |\widehat{f}(0)| + \left(\sum_k |\widehat{f}(k)|^2 |k|^{2\lambda}\right)^{1/2} < \infty.$$

С другой стороны, мы показываем (теорема 2), что (при некоторых предположениях относительно $\mathbb{X}$) если линейное нормированное пространство $\mathbb{X}$ функций на $\mathbb{T}$ не содержит характеристических функций интервалов, то в нем нет нетривиальных (т.е. непостоянных) непрерывных устойчивых функций. Так, например, в пространстве $A(\mathbb{T})$ устойчивы лишь постоянные. Последний факт был впервые отмечен А. М. Олевским в [58], [59].

В §§ 2, 3 мы рассматриваем ряд конкретных пространств функций и описываем функции устойчивые в этих пространствах. Необходимые условия устойчивости получаются применением общей теоремы 1 (или теоремы 2). Достаточные условия получены вполне стандартными методами (см. лемму 5, гл. 3). Для некоторых пространств нам удалось получить полное описание соответствующих классов устойчивых функций.

Напомним, что слабое пространство $l^p,\ 1 \leq p < \infty$, — это пространство последовательностей комплексных чисел $x = \{x_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ таких, что $\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : |x_k| > \lambda\} = O(1/\lambda^p),\ \lambda \to +0$, где $\operatorname{card} E$ — число элементов (конечного) множества E. Класс функций с последовательностью коэффициентов Фурье из слабого l^p уместно называть слабым A_p.

В § 2 рассматриваются пространства функций на $\mathbb{T}$ с заданным распределением преобразования Фурье. Пусть задана непрерывная строго возрастающая функция φ на некотором отрезке $[0,\ \lambda_0]$ $(\lambda_0 > 0)$ такая, что $\varphi(0) = 0$. Рассмотрим пространство (интегрируемых) функций f на $\mathbb{T}$ таких, что

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : |\widehat{f}(k)| > \lambda\} = O(1/\varphi(\lambda)), \quad \lambda \to +0.$$

При некоторых дополнительных предположениях относительно φ мы показываем (теорема 3), что для устойчивости функции $f \in C(\mathbb{T})$ в этом пространстве необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $V_2(f, n) = O(n\varphi^{-1}(1/n)),\ n \to \infty$ (где φ^{-1} — функция, обратная к φ).

Из этой теоремы, полагая $\varphi(\lambda) = \lambda^p$, немедленно получаем описание классов функций устойчивых в слабых A_p. А именно, при $p = 1$ видим, что (теорема 4) если $f \in C(\mathbb{T})$, то следующие условия эквивалентны:

(i) для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя последовательность коэффициентов Фурье $\widehat{f \circ h}$ суперпозиции $f \circ h$ принадлежит слабому

l^1, т.е. $\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : |\widehat{f \circ h}(k)| > \lambda\} = O(1/\lambda),\ \lambda \to +0$;

(ii) функция f имеет ограниченную квадратичную вариацию.

В случае $1 < p < 2$ получаем, что (теорема 5) следующие условия эквивалентны (как и выше, $f \in C(\mathbb{T})$):

(i) для любого гомеоморфизма h последовательность коэффициентов Фурье суперпозиции $\widehat{f \circ h}$ принадлежит слабому l^p, т.е. $\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : |\widehat{f \circ h}(k)| > \lambda\} = O(1/\lambda^p)$;

(ii) $V_2(f, n) = O(n^{1/q})$, где $1/p + 1/q = 1$.

Отметим, что в некоторых случаях условия устойчивости, сформулированные в терминах роста модуля квадратичной вариации $V_2(f, n)$, можно эквивалентным образом дать в терминах роста модуля вариации $V(f, n)$. Ясно, что $V(f, n) \le n^{1/2} V_2(f, n)$. Между тем, можно оценить $V_2(f, n)$ через $V(f, n)$. В частности, при $\gamma > 0$ имеем $V_2(f, n) = O(n^\gamma)$ тогда и только тогда, когда $V(f, n) = O(n^{1/2+\gamma})$ (лемма 7 и следствие 1).

В § 3 рассматриваются пространства $A_p(\mathbb{T})$, пространства Соболева $W_2^\lambda(\mathbb{T})$ и некоторые другие пространства функций на $\mathbb{T}$. Описание класса функций устойчивых в A_p (теорема 6) получается следующим образом. Несложно показать, что (мы считаем функцию f непрерывной) при $1 < p < 2$ условие $\sum_{n=1}^\infty (V_2(f, n)/n)^p < \infty$ влечет $f \in A_p$. Поскольку указанное условие инвариантно относительно суперпозиций функции f с гомеоморфизмами, из него следует, что $f \circ h \in A_p$ для любого гомеоморфизма h. В частности это имеет место, если $V_2(f, n) = O(n^{1/q - \varepsilon})$ при некотором $\varepsilon > 0$. С другой стороны, из приведенного выше результата о слабых A_p немедленно получаем, что (при $1 < p < 2$) если $f \circ h \in A_p$ для любого гомеоморфизма h, то $V_2(f, n) = O(n^{1/q})$. (Это также легко получить напрямую, применяя общую теорему 1 к пространству $\mathbb{X} = A_p$, достаточно лишь заметить, что при $p > 1$ имеем $\alpha_{A_p(\mathbb{T})}(\delta) \simeq \delta^{1/q}$.) Таким образом, нами получен частичный ответ на поставленный А. М. Олевским [58], [59] вопрос об описании функций, устойчивых в A_p. Отметим, что из теоремы об устойчивости в A_p немедленно вытекает (следствие 2), что для устойчивости функции $f \in C(\mathbb{T})$ в $\bigcap_{p>1} A_p(\mathbb{T})$ необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ выполнялось условие $V_2(f, n) = O(n^\varepsilon),\ n \to \infty$. Результат подобный теореме об устойчивости в A_p имеет место для пространств $W_2^\lambda,\ 0 < \lambda < 1/2$, (теорема 7), а именно, несложно увидеть, что если $\sum_{n=1}^\infty (V_2(f, n)/n^{1-\lambda})^2 < \infty$ и, в частности, если $V_2(f, n) = O(n^{1/2-\lambda-\varepsilon})$, то $f \circ h \in W_2^\lambda$ для любого гомеоморфизма h. С другой стороны, применяя общую теорему 1, получаем, что если $f \circ h \in W_2^\lambda$ для любого гомеоморфизма h, то $V_2(f, n) = O(n^{1/2-\lambda})$. Вопрос о точном описании непрерывных функций, устойчивых в A_p, $1 < p < 2$, и в W_2^λ, $0 < \lambda < 1/2$, остается открытым. Что касается пространств W_2^λ, $\lambda \geq 1/2$, то соответствующий класс устойчивых непрерывных функций содержит лишь постоянные.

Мы также рассматриваем класс функций f таких, что соответствующая сопряженная функция (преобразование Гильберта) $\widetilde{f}$ принадлежит L^∞. Хорошо известно, что существуют непрерывные функции на $\mathbb{T}$, сопряженные к которым не принадлежат L^∞ Мы показываем, что (теорема 8) если $f \in C(\mathbb{T})$ и для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ функция $\widetilde{f \circ h}$, сопряженная к $f \circ h$, принадлежит $L^\infty(\mathbb{T})$, то $f = \mathrm{const}$. Этот результат получается применением общей теоремы 2.

Отметим еще, что из нашего результата о функциях, устойчивых в A_p, вытекает (теорема 9) усиление полученного в [62] результата о функциях, устойчивых в пространствах l^p -мультипликаторов Фурье.

В § 4 рассматривается вопрос об устойчивости в многомерном случае. Этот случай существенно отличается от одномерного. Мы показываем (теорема 10), что при некоторых предположениях относительно пространства $\mathbb{X}$ функций на торе $\mathbb{T}^d$, $d \geq 2$, либо $L^\infty(\mathbb{T}^d) \subseteq \mathbb{X}$, и, следовательно, всякая непрерывная функция устойчива в $\mathbb{X}$, либо устойчивы лишь постоянные. Причина этого в том, что группа гомеоморфизмов тора $\mathbb{T}^d$ при $d \geq 2$ слишком массивна. Из этой теоремы немедленно следует, что, в отличие от одномерного случая, при $d \geq 2$ в пространствах $A_p(\mathbb{T}^d) = \{f \in L^1(\mathbb{T}^d) : \widehat{f} \in l^p(\mathbb{Z}^d)\}$, $1 < p < 2$, нет непостоянных непрерывных устойчивых функций. Более того, при помощи этой теоремы мы показываем, что (теорема 11) если f — непрерывная функция на торе $\mathbb{T}^d$, $d \geq 2$, и для любого гомеоморфизма h тора $\mathbb{T}^d$ мы имеем $f \circ h \in \bigcup_{1<p<2} A_p(\mathbb{T}^d)$, то $f = \mathrm{const}$.

Содержание главы 4.

В этой главе рассматриваются операторы суперпозиции в пространстве $U(\mathbb{T})$ непрерывных функций на окружности $\mathbb{T}$, имеющих равномерно сходящийся ряд Фурье, и операторы суперпозиции в классах Пэли–Винера $PW(\mathbb{R}^n)$ функций из $L^2(\mathbb{R}^n)$, преобразование Фурье которых имеет ограниченный носитель.

В § 1 рассматривается пространство $U(\mathbb{T})$. Это пространство, снабженное нормой

$$\|f\|_{U(\mathbb{T})} = \sup_N \|S_N(f)\|_{C(\mathbb{T})},$$

где $S_N(f)$ означает N -ую частичную сумму ряда Фурье функции f (и $\|\cdot\|_{C(\mathbb{T})}$ — обычная $\sup$ -норма в пространстве $C(\mathbb{T})$ непрерывных функций на $\mathbb{T}$), является банаховым пространством. Неизвестно, существуют ли нетривиальные (т.е. нелинейные) отображения окружности, действующие в $U(\mathbb{T})$. В [58] А. М. Олевским высказано предположение, что ответ на этот вопрос — отрицательный. Следуя обзорам А. М. Олевского [58], [59] и Ж.-П. Кахана [28], приведем известные результаты. Алпар показал, что нетривиальные аналитические отображения не действуют в $U(\mathbb{T})$. С другой стороны, всякий гомеоморфизм окружности, действующий в $U(\mathbb{T})$, должен быть абсолютно непрерывным — это немедленно вытекает из следующих двух результатов. Один из них — результат Д. М. Оберлина (см. [58]), заключающийся в том, что всякая непрерывная функция, заданная на компакте $F \subseteq \mathbb{T}$ нулевой меры, продолжается на $\mathbb{T}$ до функции из $U(\mathbb{T})$. Другой — (значительно более ранний) результат Д. Е. Меньшова, из которого следует, что никакой компакт положительной меры таким интерполяционным свойством не обладает (см. [5, гл. VI, § 6]). Отметим, что вместе с тем, существуют нетривиальные отображения φ такие, что $\|e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})} = O(1)$ (всякое такое отображение действует из $A(\mathbb{T})$ в $U(\mathbb{T})$). Так, например, Р. Кауфман, усилив один результат Алпара, показал, что это верно для любого отображения φ гладкости C^3 и выше без точек одновременного вырождения производных порядка большего 1 (см. [28]).

Мы рассматриваем простой случай кусочно линейных отображений. Как оказалось (теорема 1), если $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ — кусочно линейное но не линейное непрерывное отображение, то $\|e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})} \simeq \log |n|$. Здесь оценка сверху вытекает из уже указанной (в связи с результатами главы 1) оценки Кахана $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \simeq \log |n|$. Мы лишь получаем оценку снизу. Из полученного результата следует, что кусочно линейные отображения не действуют из $A(\mathbb{T})$ в $U(\mathbb{T})$. Более того (это — немедленное следствие полученной оценки и теоремы о замкнутом графике, примененной к оператору $f \to f \circ \varphi$), если φ — нетривиальная кусочно линейная замена переменной, то для любой последовательности $w(n),\ n = 0, 1, 2, \ldots$ неотрицательных вещественных чисел с условием $w(n) = o(\log n)$ найдется непрерывная функция f такая, что $\sum_k |\widehat{f}(k)| w(|k|) < \infty$, но $f \circ \varphi \notin U(\mathbb{T})$. Разумеется, отсюда вытекает, что такие замены переменной, вообще говоря, разрушают равномерную сходимость ряда Фурье.

В § 2 мы рассматриваем пространство $PW(\mathbb{R}^n)$ функций из $L^2(\mathbb{R}^n)$, преобразование Фурье которых имеет компактный носитель. При $n = 1$ соответствующий класс изучался Н. Винером и Р. Пэли [13]. Отметим, что функции класса PW возникают в задачах обработки сигналов (в этой связи см., например, библиографию работы [1]) и часто называются сигналами в ограниченном диапазоне (bandlimited signals). Очевидно, что линейные (аффинные) отображения $\mathbb{R}^n$ действуют в $PW(\mathbb{R}^n)$. В работе [1] Ш. Азизи, Д. Кокрэйн и Дж. Н. Макдональд показали, что если φ — гомеоморфизм прямой $\mathbb{R}$ на себя такой, что для любой функции $f \in PW(\mathbb{R})$ мы имеем $f \circ \varphi \in PW(\mathbb{R})$, то отображение φ аффинно. Эти же авторы поставили вопрос [2] о том, верно ли аналогичное утверждение в многомерном случае.

Мы даем полное описание непрерывных отображений $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, действующих из $PW(\mathbb{R}^n)$ в $PW(\mathbb{R}^m)$. Лишь инъективные аффинные отображения φ обладают этим свойством (теорема 2). В частности, отсюда получаем положительный ответ на указанный выше вопрос работы [2], более того, мы не предполагаем, что φ является гомеоморфизмом, и, таким образом, наш результат является новым даже в одномерном случае.

Содержание добавления.

Пусть $A_p^+(D)$ $(1 \le p \le \infty)$ — пространство функций

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n, \qquad z \in D,$$

аналитических в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ таких, что последовательность коэффициентов Тейлора $\widehat{f} = \{\widehat{f}(n);\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ принадлежит l^p. Для $f \in A_p^+(D)$ положим $\|f\|_{A_p^+(D)} = \|\widehat{f}\|_{l^p}$.

Аналитическая в D функция m называется l^p -мультипликатором, если для всякой функции $f \in A_p^+(D)$ произведение $m \cdot f$ принадлежит $A_p^+(D)$. Семейство всех таких мультипликаторов мы обозначаем через $M_p^+(D)$. Снабженное естественной нормой

$$\|m\|_{M_p^+(D)} = \sup_{\|f\|_{A_p^+(D)} \le 1} \|m \cdot f\|_{A_p^+(D)},$$

$M_p^+(D)$ является банаховой алгеброй (с обычным умножением функций).

Нас интересует следующий вопрос: какие внутренние функции принадлежат $M_p^+(D)$? Напомним, что аналитическая в D функция I называется внутренней, если $|I(z)| \le 1,\ z \in D$, и $|I(e^{it})| = 1$ почти всюду. Обзор ряда результатов о внутренних функциях и мультипликаторах имеется в статье С. А. Виноградова [15] [3].

Хорошо известно (см. [55]), что $M_p^+(D) = M_q^+(D)$ при $1/p + 1/q = 1$, и

$$A_1^+(D) = M_1^+(D) = M_\infty^+(D) \subseteq M_p^+(D) \subseteq M_2^+(D) = H^\infty(D), \qquad (12)$$

[3] Мы употребляем обозначаения $A_p^+(D)$ и $M_p^+(D)$ вместо использованных Виноградовым обозначений l_A^p и M_A^p.

где $H^\infty(D)$ — пространство Харди ограниченных аналитических функций в D.

Отметим, что поскольку $M_1^+(D) = M_\infty^+(D) = A_1^+(D)$ (см. (12)), внутренние функции в $M_p^+(D)$ при $p = 1, \ \infty$ — это лишь конечные произведения Бляшке с точностью до множителя $\lambda \in \mathbb{C}$ (только такие внутренние функции непрерывны в D вплоть до границы [17]). Случай $p = 2$ тривиален, так как $M_2^+(D)$ совпадает с пространством Харди $H^\infty(D)$ (см. (12)). Таким образом, изучаемый нами вопрос интересен лишь в случае $p \neq 1, \infty, 2$.

В § 1 мы рассматриваем сингулярные внутренние функции. т.е. внутренние функции S, не имеющие нулей в D, такие, что $S(0) > 0$. Всякая такая функция имеет вид

$$S(z) = \exp\biggl(- \int_{\partial D} \frac{\xi + z}{\xi - z} d\mu(\xi)\biggr),$$

где μ — положительная сингулярная мера на окружности $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Мера μ называется представляющей мерой функции S. Замкнутый носитель этой меры называется спектром функции S.

Как показал И. Э. Вербицкий [12], сингулярная внутренняя функция

$$S(z) = \exp\biggl(- a\frac{1+z}{1-z}\biggr), \qquad a > 0$$

(спектр которой — одноточечное множество $\{1\}$), принадлежит $M_p^+(D)$ лишь в тривиальном случае $p = 2$. Существуют ли вообще сингулярные внутренние функции $S \not\equiv 1$ в $M_p^+(D), \ p \neq 2$? Ответ на этот вопрос, поставленный С. А. Виноградовым в [16], нам не известен. Тем не менее мы указываем ряд условий, характеризующих массивность замкнутых множеств на окружности, выполнение которых для произвольно взятого множества $E \subseteq \partial D$ означает, что E не может служить спектром никакой сингулярной внутренней функции из $M_p^+(D)$ при $p \neq 2$ (теоремы 1, 2 и их следствия 1, 2, 3). Грубо говоря, это имеет место, если E недостаточно массивно. В частности, из этих условий следует, что если спектр сингулярной внутренней функции S является непустым пористым множеством, то S принадлежит $M_p^+(D)$ лишь при $p = 2$.

В § 2 мы рассматриваем произведения Бляшке, т.е. функции вида

$$B(z) = z^m \prod_{z_n \neq 0} \frac{-|z_n|}{z_n} \frac{z - z_n}{1 - \overline{z_n} z}$$

с нулями $\{z_n\} \subset D$, удовлетворяющими условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty$$

(всякая такая функция является внутренней). Известно, что если нули произведения Бляшке B имеют единственную предельную точку (на ∂D) и накапливаются к ней очень быстро, то $B \in M_p^+(D)$. Точнее, пусть B — произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$, $z_n \to 1$, такими, что

$$\sum_{n:|1-z_n|<\varepsilon} |1 - z_n| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to +0; \tag{13}$$

тогда $B \in \bigcap_{1<p<\infty} M_p^+(D)$. Это теорема Виноградова–Вербицкого (первоначально она была доказана Виноградовым [14] в случае, когда z_n стремятся к 1 некасательно, и впоследствии распространена на общий случай независимо Виноградовым [15] и Вербицким [12]). Мы рассматриваем произведения Бляшке B с единственной предельной точкой нулей и при некотором дополнительном предположении о расположении нулей получаем условие необходимое для включения $B \in M_p^+(D)$ (теорема 3). Пользуясь этим условием, мы показываем (теорема 4), что если нули произведения Бляшке стремятся к 1 некасательным образом, оставаясь в замкнутой верхней полуплоскости, то верно утверждение обратное к теореме Виноградова–Вербицкого: в этом случае, если $B \in M_p^+(D)$ при каком-либо $p \neq 2$, то выполняется (13).

Неясно, к каким множествам на ∂D могут накапливаться нули произведений Бляшке из $M_p^+(D)$, $p \neq 2$. Мы строим (теорема 5) произведение Бляшке, принадлежащее $\bigcap_{1<p<\infty} M_p^+(D)$, такое, что множество предельных точек его нулей совершенно.

Напомним, что в общем случае спектром внутренней функции I называется множество $\sigma(I)$ всех $\xi \in \mathbb{C}$ таких, что $1/I$ не может быть аналитически продолжена в окрестность точки ξ. Как известно [17], всякая внутренняя функция I допускает факторизацию $I = \lambda BS$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, — постоянная, B — произведение Бляшке, и S — сингулярная внутренняя функция. При этом имеем $\sigma(I) = \overline{\{z_n\}} \cup \overline{\operatorname{supp}}\, \mu$, где $\overline{\{z_n\}}$ — замыкание множества нулей $\{z_n\}$ множителя Бляшке B и $\overline{\operatorname{supp}}\, \mu$ — замкнутый носитель представляющей меры сингулярного множителя S (см. [56]). Отметим, что, как показано в [37], если спектр $\sigma(I)$ внутренней функции I в пересечении с граничной окружностью имеет положительную меру, то $I \notin M_p^+(D)$, каково бы ни было $p \neq 2$. Этот результат следует из свойства существенной непрерывности l^p -мультипликаторов Фурье, полученного автором совместно с А. М. Олевским в [48], см. также [47], [49]. В частности, если нули произведения Бляшке B накапливаются к множеству положительной меры, то $B \notin M_p^+(D)$ при $p \neq 2$. По той же причине, если S — сингулярная внутренняя функция такая, что ее спектр имеет положительную меру, то

$S \notin M_p^+(D)$ при $p \neq 2$. Если же взять внутреннюю функцию I такую, что ее спектр в пересечении с граничной окружностью ∂D имеет нулевую меру и рассмотреть граничное значение функции I как функцию на окружности $\mathbb{T}$, то имеем $I(e^{it}) = e^{ig(t)}$, где g — вещественная функция, гладкая на всяком интервале, дополнительном к множеству F, которое определяется соотношением $\sigma(I) \cap \partial D = \{e^{it},\ t \in F\}$. При этом, если J — интервал, содержащийся в $\mathbb{T} \setminus F$ и находящийся близко от F, то g сильно осциллирует на J, и поведение функции $I(e^{it})$ напоминает поведение экспоненты $e^{i\lambda\varphi(t)}$ с большой частотой λ. Это обстоятельство позволяет использовать при исследовании внутренних функций из $M_p^+(D)$ соображения, используемые при исследовании экспонент $e^{i\lambda\varphi}$.

II. Апробация работы

Результаты работы докладывались автором на следующих семинарах:

– по теории функций действительного переменного кафедры теории функций и функционального анализа механико–математического факультета МГУ (в течении ряда лет);
– математического института им. В. А. Стеклова;
– Санкт-Петербургского отделения математического института им. В. А. Стеклова;
– кафедры теории функций и функционального анализа Самарского государственного университета;
– отдела функционального анализа института математики Польской Академии Наук, Варшава, Польша;
– отделения математики технологического института штата Джорджия, Атланта, США;
– отделения математики Тель-Авивского университета, Тель-Авив, Израиль;
– отделения математики Варшавского университета, Варшава, Польша;

и на следующих конференциях:

– British-Russian Workshop in Functional Analysis; Эйлеровский международный математический институт, Санкт-Петербург, 13-17 октября, 1996;
– 9-ая Саратовская зимняя школа, Современные проблемы теории функций и их приложения; Саратов, 26 января-1 февраля, 1998;

– 7th Summer St. Petersburg Meeting in Mathematical Analysis; Эйлеровский международный математический институт, Санкт-Петербург, 17-20 июня, 1998;
– International Conference on Harmonic Analysis and Approximation; Нор-Амберд, Армения, 18-25 сентября, 1998;
– II международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения; Дюрсо, 27 мая-2 июня, 2002;
– 11th Summer St. Petersburg Meeting in Mathematical Analysis; Эйлеровский международный математический институт, Санкт-Петербург, 15-20 августа, 2002;
– International Conference on Harmonic Analysis and Approximation III; Цахкадзор, Армения, 20-27 сентября, 2005;
– 14th Summer St.-Petersburg Meeting in Mathematical Analysis; Эйлеровский международный математический институт, Санкт-Петербург, 6-11 июня, 2005;
– Harmonic Analysis and Related Problems (HARP), Зарос, Крит, Греция, 19-23 июня, 2006;
– ICREA Conference on Approximation Theory and Fourier Analysis; Центр математических исследований (CRM), Барселона, Испания, 12-16 декабря 2011;
– Spring School on Banach Algebras (прочитано 4 лекции); Бедлево, Польша, 28-31 марта, 2012.

Результаты диссертации полностью опубликованы в 10 -ти статьях автора [36]–[45]. Непосредственное отношение к теме диссертации имеют результаты, полученные автором совместно с А. М. Олевским в работах [46]–[49]. Эти результаты в диссертацию не включены.

III. Благодарность

Я благодарен А. М. Олевскому. Мой интерес к теории функций и гармоническому анализу сформировался под его влиянием.

Я благодарен Е. А. Горину за неизменную моральную поддержку и за замечания, способствовавшие улучшению стиля изложения и организации настоящего текста.

Первоначально теорема 1 главы 1 была получена автором в более слабой форме (правая часть условия (7) имела вид $o((\log\log\log n)^{1/16})$). В доказательстве использовалась теорема Грина–Сандерса [21]. Я благодарен

С. В. Конягину, указавшему мне на полученную им совместно с Б. Грином теорему 1.3 работы [20]. Использование этой теоремы вместо теоремы Грина–Сандерса позволило улучшить результат.

Я благодарен: Ю. Н. Кузнецовой за помощь в доказательстве леммы 3 главы 1; М. В. Коробкову за обсуждение его результата [32] о множестве значений градиента и М. Л. Гольдману за полезное замечание о вложении слабого пространства l^1 в подходящее пространство Марцинкевича, что позволило сократить доказательство теоремы 3 главы 3.

Часть результатов была получена автором во время работы в отделе функционального анализа института математики Польской академии наук, Варшава, Польша, в 1999 г.. Я благодарен М. Войцеховскому, организовавшему мой визит. Ряд результатов был получен автором во время работы на математическом отделении технологического института штата Джорджия, Атланта, США, в 1999/2000 академическом году. Я благодарен М. Лэйси, организовавшему мой визит.

Работа набрана в LaTeX 2_ε с использованием редактора WinEdt. Я благодарен И. А. Синелобову за техническую помощь.

Я благодарен следующим частным лицам, в течение некоторого времени совместно оказывавшим мне регулярную бескорыстную финансовую помощь: И. А. Синелобову, А. Б. Сивкову и А. А. Маркову. Я благодарен В. А. Овсянникову, спонсировавшего мою поездку на конференцию Geometric Methods in Fourier and Functional Analysis, Киль, Германия, 10-14 августа, 1998. Я благодарен А. В. Белову, изыскавшему средства для моего участия в конференции Approximation Theory and Fourier Analysis, Барселона, Испания, 12-16 декабря 2011.

Ряд результатов диссертации был получен при частичной поддержке РФФИ; гранты №96-01-01438, №98-01-00529, №02-01-00997, №04-01-00169.

Замечания об обозначениях

Для удобства здесь приводятся наиболее часто встречающиеся в тексте обозначения.

$\mathbb{R}$ и $\mathbb{Z}$ — вещественная прямая и множество целых чисел, соответственно, обычным образом рассматриваемые как аддитивные группы; $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ — окружность (аддитивная группа вещественных чисел по $\mathrm{mod}\ 2\pi$); $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость.

Через $|x|$ обозначается длина вектора $x \in \mathbb{R}^m$. Через (x, y) обозначается обычное скалярное произведение векторов x и y в $\mathbb{R}^m$ То же обозначение используется в случае $x \in \mathbb{Z}^m,\ y \in \mathbb{T}^m$. Через S^{m-1} мы обозначаем сферу радиуса 1 в $\mathbb{R}^m$ с центром в начале координат.

Для множества E содержащегося в некотором фиксированном множестве Q мы обозначаем через 1_E его характеристическую функцию, т.е. функцию, принимающую значение $1_E(x) = 1$ при $x \in E$ и значение $1_E(t) = 0$ при $x \in Q \setminus E$

Для произвольного измеримого множества E в $\mathbb{T}^m$ или в $\mathbb{R}^m$ через $|E|$ мы обозначаем его лебегову меру.

Обычным образом мы отождествляем интегрируемые функции на торе $\mathbb{T}^m$ и интегрируемые функции на кубе $[0, 2\pi]^m$ или на кубе $[-\pi, \pi]^m$.

Если f и E — соответственно функция на $\mathbb{R}^m$ и множество в $\mathbb{R}^m$, то мы пишем $\operatorname{supp} f \subseteq E$, если $f(t) = 0$ для почти всех $t \in \mathbb{R}^m \setminus E$. Те же обозначения используются для функций на $\mathbb{T}^m$ и множеств в $\mathbb{T}^m$.

Для множества W в $\mathbb{R}^m$ и числа $\lambda \in \mathbb{R}$ полагаем $\lambda W = \{\lambda x : x \in W\}$. Если $t \in \mathbb{R}^m$, полагаем $W + t = \{x + t : x \in W\}$.

Через $\mathrm{card} E$ обозначается количество элементов конечного множества E.

Мы пишем $a(\lambda) \simeq b(\lambda),\ \lambda \to \infty$, в случае, когда при всех достаточно больших λ имеем $c_1 \le a(\lambda)/b(\lambda) \le c_2$, где $c_1,\ c_2$ — положительные константы, не зависящие от λ.

Через $c, c_1, c_p, c_{p,1}, c(p), c_m$, и т.д. мы обозначаем различные положительные константы, зависящие, может быть, только от величин, указанных в скобках и записанных как индексы.

Г л а в а 1

Оценки норм экспонент в пространствах A_p

Мы рассматриваем ряды Фурье

$$f(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{ikt}$$

(интегрируемых) функций f на окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Как обычно, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{Z}$ — группа целых чисел и $\widehat{f} = \{\widehat{f}(k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ — последовательность коэффициентов Фурье функции f,

$$\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-ikt}\frac{dt}{2\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $A_1(\mathbb{T})$ — пространство непрерывных функций f на $\mathbb{T}$ таких, что последовательность коэффициентов Фурье $\widehat{f} = \{\widehat{f}(k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ принадлежит l^1. Пусть $A_p(\mathbb{T}),\ 1 < p \leq 2,$ — пространство интегрируемых функций f на $\mathbb{T}$ таких, что $\widehat{f}$ принадлежит l^p. Снабженные естественными нормами

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T})} = \|\widehat{f}\|_{l_p} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^p\right)^{1/p}$$

пространства $A_p(\mathbb{T}),\ 1 \leq p \leq 2,$ являются банаховыми пространствами. Мы часто используем обозначение A вместо A_1. Пространство $A(\mathbb{T})$ является банаховой алгеброй (с обычным умножением функций).

Мы отождествляем непрерывные отображения φ окружности $\mathbb{T}$ в себя и непрерывные функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

$$\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) \pmod{2\pi}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Согласно теореме Берлинга–Хелсона [6] (см. также [27], [28]), если $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ — непрерывное отображение такое, что

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(1), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

то φ — линейно (с целым угловым коэффициентом), т.е. $\varphi(t) = \nu t + \varphi(0)$, где $\nu \in \mathbb{Z}$.

Мы будем изучать характер роста норм экспонент $e^{in\varphi}$ в пространствах A_p. Случай $p = 1$ представляется особенно интересным.

Вместо отображений φ окружности $\mathbb{T}$ и экспонент $e^{in\varphi}$ с целыми частотами n можно рассматривать вещественные функции φ на $\mathbb{T}$ и экспоненты $e^{i\lambda\varphi}$ с частотами $\lambda \in \mathbb{R}$. Соответствующие результаты для отображений окружности и целых частот легко получаются в качестве простых следствий. В самом деле, если отображение окружности φ непрерывно (все рассматриваемые нами отображения — как минимум непрерывны), то $\varphi(t+2\pi) = \varphi(t)+2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$ не зависит от t. Полагая $\varphi_0(t) = \varphi(t)-kt$, получаем $\varphi(t+2\pi) = \varphi(t)$, т.е. φ_0 — вещественная функция на $\mathbb{T}$. При этом $\|e^{in\varphi}\|_{A_p} = \|e^{in\varphi_0}\|_{A_p},\ n \in \mathbb{Z}$. Если исходное отображение φ — нелинейно, то соответствующая функция φ_0 непостоянна.

Через $C^s(\mathbb{T})$ мы обозначаем класс (комплекснозначных) функций на $\mathbb{T}$, имеющих непрерывную производную порядка s. Имеем $C^1(\mathbb{T}) \subseteq A(\mathbb{T}) \subseteq A_p(\mathbb{T})$.

Кратко перечислим основные ранее известные результаты [1].

Для любой вещественной функции $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$, и, более того, для любой абсолютно непрерывной вещественной функции φ с производной из $L^2(\mathbb{T})$, при $1 \le p < 2$ справедлива оценка

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(|\lambda|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}), \qquad |\lambda| \to \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Если $\varphi \in C^2(\mathbb{T})$ — вещественная непостоянная функция и $1 \le p < 2$, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \ge c\,|\lambda|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где $c = c(p,\varphi) > 0$ не зависит от λ. Таким образом, если $\varphi \in C^2(\mathbb{T})$ — вещественная функция, $\varphi \ne \mathrm{const}$, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \simeq |\lambda|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$$

при всех $p,\ 1 \le p < 2$. В частности $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A \simeq \sqrt{|\lambda|}$.

При $p > 1$ для любой кусочно линейной вещественной функции φ на $\mathbb{T}$ имеем

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(1). \tag{4}$$

Если φ — кусочно линейная, непостоянная непрерывная вещественная функция на $\mathbb{T}$, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \simeq \log|\lambda|. \tag{5}$$

[1] Доказательство оценки (2) при $p = 1$ см. в [27, гл. VI, § 3]; общий случай немедленно получается интерполяцией между l^1 и l^2. Оценка (3) при $p = 1$ получена в неявном виде Лейбензоном [51] и в явном виде Каханом [25]; общий случай получен Алпаром [3]. Простое и короткое доказательство для случая $p = 1$ имеется в [27, гл. VI, § 3] и в общем случае — в [46]. Доказательство оценки (4) имеется в [46]. Доказательство оценки Кахана (5) имеется в его книге [27, гл. VI, § 2].

В первом параграфе этой главы мы получаем усиление теоремы Берлинга–Хелсона. В остальной части главы рассматривается поведение норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ в случае C^1 -гладкой фазы φ. Этот случай существенно отличается от C^2 -гладкого.

§ 1. Пространство $A(\mathbb{T})$. Гипотеза Кахана. Усиление теоремы Берлинга–Хелсона

Для всякого непрерывного кусочно линейного, но не линейного отображения $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ имеем $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \simeq \log|n|,\ n \in \mathbb{Z}$ (см. (5)). Неизвестно, могут ли нормы $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}$ расти медленнее, чем $\log|n|$. Кахану принадлежит гипотеза ([26], [27], [28]) о том, что теорема Берлинга–Хелсона может быть значительно усилена, в частности, он предположил, что условие

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = o(\log|n|), \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad |n| \to \infty,$$

влечет линейность отображения φ.

Здесь мы получим следующее усиление теоремы Берлинга–Хелсона.

Теорема 1. *Пусть $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ — непрерывное отображение. Предположим, что*

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = o\left(\left(\frac{\log\log|n|}{\log\log\log|n|}\right)^{1/12}\right), \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad |n| \to \infty.$$

Тогда φ — линейно, т.е. $\varphi(t) = \nu t + \varphi(0),\ \nu \in \mathbb{Z}$.

При доказательстве этой теоремы будем рассматривать дискретный аналог окружности $\mathbb{T}$, а именно, циклическую группу $\mathbb{T}_N$. Введем нужные обозначения и напомним некоторые (вполне стандартные, см., например, [73]) факты гармонического анализа на $\mathbb{T}_N$. Приведем также теорему Грина–Конягина, которая потребуется в доказательстве.

Пусть G — конечная абелева группа. Введем на ней нормированную считающую меру μ_G, поместив в каждую точку $x \in G$ массу $1/(\operatorname{card} G)$ (через $\operatorname{card} X$ обозначается число элементов произвольного конечного множества X). Таким образом, если $E \subseteq G$, то

$$\mu_G(E) = \frac{\operatorname{card} E}{\operatorname{card} G}$$

и, если f (комплексная) функция на G, то

$$\int_G f(x)d\mu_G(x) = \frac{1}{\operatorname{card} G}\sum_{x\in G} f(x).$$

Мы часто будем писать $\int_G f(x)dx$ или $\int_G f d\mu_G$ вместо $\int_G f(x)d\mu_G(x)$.

Положим

$$\|f\|_{L^2(G)} = \left(\int_G |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \qquad \|f\|_{L^\infty(G)} = \max_{x\in G} |f(x)|.$$

Вообще, для произвольного множества $E \subseteq G$ и функции f на E положим

$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \max_{x\in E} |f(x)|.$$

Всякая конечная абелева группа G с мерой μ_G является вероятностным пространством. Удобно рассмотреть общий случай. Пусть $(\mathbb{X}, \mu)$ — вероятностное пространство. Для произвольного множества $E \subseteq \mathbb{X}$ пусть 1_E — его характеристическая функция: $1_E(x) = 1$ при $x \in E$ и $1_E(x) = 0$ при $x \notin E$. Для произвольного μ -измеримого множества $E \subseteq \mathbb{X}$ положим

$$\delta_{\mathbb{X},\mu}(E) = \min(\mu(E), 1 - \mu(E)).$$

Ясно, что всегда $0 \leq \delta_{\mathbb{X},\mu}(E) \leq 1/2$. Если величина $\delta_{\mathbb{X},\mu}(E)$ очень мала, то множество E или "очень мало", или "очень велико" (т.е. его дополнение мало).

Через $\mathbb{T}_N$ обозначим циклическую группу:

$$\mathbb{T}_N = \left\{ \frac{2\pi j}{N},\ j = 0, 1, \ldots, N-1 \right\},$$

рассматриваемую как подгруппа в $\mathbb{T}$ (сложение осуществляется по $\bmod 2\pi$). Характерами на $\mathbb{T}_N$ являются функции $e_k,\ k = 0, 1, \ldots, N-1$, заданные следующим образом:

$$e_k\left(\frac{2\pi j}{N}\right) = e^{ik\frac{2\pi j}{N}}, \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Мы реализуем группу двойственную к $\mathbb{T}_N$ в виде группы

$$\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \ldots, N-1\},$$

рассматриваемой со сложением по $\bmod N$. Если f — произвольная функция на $\mathbb{T}_N$, то её преобразование Фурье $\widehat{f} = \{\widehat{f}(k),\ k \in \mathbb{Z}_N\}$ на группе $\mathbb{T}_N$ определяется следующим образом:

$$\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}_N} f\overline{e_k} d\mu_{\mathbb{T}_N}, \qquad k \in \mathbb{Z}_N,$$

(черта означает комплексное сопряжение). Мы используем одинаковое обозначение $\widehat{f}$ для преобразования Фурье на $\mathbb{T}$ и на $\mathbb{T}_N$, но это не приводит к недоразумению — всюду далее вплоть до окончания доказательства теоремы через $\widehat{f}$ обозначено преобразование Фурье на $\mathbb{T}_N$.

Пусть f — произвольная (комплексная) функция на $\mathbb{T}_N$. Имеем

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} \widehat{f}(k) e_k(t), \qquad t \in \mathbb{T}_N.$$

Положим

$$\|f\|_{A(\mathbb{T}_N)} = \|\widehat{f}\|_{l^1(\mathbb{Z}_N)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} |\widehat{f}(k)|.$$

Легко убедиться, что для любых функций $f_1,\ f_2$ на $\mathbb{T}_N$ имеем

$$\|f_1 f_2\|_{A(\mathbb{T}_N)} \le \|f_1\|_{A(\mathbb{T}_N)} \|f_2\|_{A(\mathbb{T}_N)}.$$

Вообще при $p \ge 1$ положим

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T}_N)} = \|\widehat{f}\|_{l^p(\mathbb{Z}_N)} = \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}_N} |\widehat{f}(k)|^p\Big)^{1/p}$$

(мы пишем $A(\mathbb{T}_N)$ вместо $A_1(\mathbb{T}_N)$).

Равенство Парсеваля имеет вид

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T}_N)} = \|f\|_{A_2(\mathbb{T}_N)}.$$

Для любых двух функций f_1, f_2 на $\mathbb{T}_N$ определим их свертку $f_1 * f_2$, полагая

$$f_1 * f_2(t) = \int_{\mathbb{T}_N} f_1(x) f_2(t-x)\, dx, \qquad t \in \mathbb{T}_N.$$

Имеем $\widehat{f_1 * f_2} = \widehat{f_1}\widehat{f_2}$.

Приведем теорему Грина–Конягина [20, теорема 1.3]. Отметим сначала тривиальный факт: если E — множество на окружности $\mathbb{T}$ такое, что преобразование Фурье его характеристической функции 1_E принадлежит $l^1(\mathbb{Z})$, то либо множество E имеет (лебегову) меру нуль, либо оно является почти всей окружностью $\mathbb{T}$. Более детально этот эффект проявляется на циклической группе $\mathbb{T}_N$. А именно, согласно теореме Грина–Конягина, если N — достаточно большое простое число, то для любой вещественной функции f на $\mathbb{T}_N$ такой, что $\int_{\mathbb{T}_N} f d\mu_{\mathbb{T}_N} = 0$ имеем

$$\min_{t \in \mathbb{T}_N} |f(t)| \le c \bigg(\frac{\log\log N}{\log N}\bigg)^{1/3} \|f\|_{A(\mathbb{T}_N)},$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от N и f. Беря произвольное множество $E \subseteq \mathbb{T}_N$ и полагая в этой оценке $f(t) = 1_E(t) - \mu_{\mathbb{T}_N}(E)$, видим, что

$$\delta_{\mathbb{T}_N,\ \mu_{\mathbb{T}_N}}(E) \leq c\left(\frac{\log\log N}{\log N}\right)^{1/3} \|1_E\|_{A(\mathbb{T}_N)}, \tag{6}$$

где $c > 0$ не зависит от N и E. (Мы учли, что $\mu_{\mathbb{T}_N}(E) = \widehat{1_E}(0)$, откуда $\|f\|_{A(\mathbb{T}_N)} \leq \|1_E\|_{A(\mathbb{T}_N)}$.)

Нам потребуется также теорема Дирихле о совместных диофантовых приближениях (см., например, [85, гл. II, § 1]). Если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ — вещественные числа и $D \geq 1$ — целое число, то существуют целые числа $Q, P_1, P_2, \dots, P_N$ такие что $1 \leq Q \leq D^N$ и

$$|\alpha_j Q - P_j| \leq \frac{1}{D}, \qquad j = 1, 2, \dots, N.$$

Доказательство теоремы 1. В силу непрерывности отображения φ имеем

$$\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) + 2\pi k,$$

где $k \in \mathbb{Z}$ не зависит от t. Заменяя функцию φ на $\varphi(t) - kt$, можем считать, что

$$\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t),$$

т.е., что φ — вещественная непрерывная функция на окружности $\mathbb{T}$.

Заметим также, что по самому условию теоремы $e^{in\varphi} \in A(\mathbb{T})$ при всех достаточно больших положительных $n \in \mathbb{Z}$. Беря достаточно большое n, имеем $e^{in\varphi} \in A(\mathbb{T})$ и $e^{i(n+1)\varphi} \in A(\mathbb{T})$. Тогда $e^{-in\varphi} = \overline{e^{in\varphi}} \in A(\mathbb{T})$, и мы видим, что $e^{i\varphi} = e^{i(n+1)\varphi} e^{-in\varphi} \in A(\mathbb{T})$. Следовательно, $e^{in\varphi} \in A(\mathbb{T})$ при всех $n \in \mathbb{Z}$.

Положим

$$\Theta(n) = \max_{\lambda = 0,1,2,\dots,n} \|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}.$$

Последовательность $\Theta(n),\ n = 0, 1, 2, \dots,$ — неубывающая, $\Theta(n) \geq \Theta(0) = 1$ при всех n, и, в силу предположения теоремы,

$$\Theta(n) = o\left(\left(\frac{\log\log n}{\log\log\log n}\right)^{1/12}\right). \tag{7}$$

Мы имеем

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq \Theta(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{8}$$

Всюду далее в доказательстве, вплоть до леммы 4, будем считать, что N — произвольное положительное целое число.

Фиксируя N и применяя теорему Дирихле к числам

$$\alpha_j = \frac{1}{2\pi}\varphi\left(\frac{2\pi j}{N}\right), \quad j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

и $D = N$, находим целые числа Q_N и $P_{N,j},\ j = 0, 1, \ldots, N-1$, такие, что

$$1 \le Q_N \le N^N \tag{9}$$

и

$$\left|\frac{1}{2\pi}\varphi\left(\frac{2\pi j}{N}\right)Q_N - P_{N,j}\right| \le \frac{1}{N}, \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Определим функцию φ_N на $\mathbb{T}_N$, полагая

$$\varphi_N\left(\frac{2\pi j}{N}\right) = \frac{2\pi P_{N,j}}{Q_N}, \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{10}$$

Мы видим, что

$$\left|\varphi\left(\frac{2\pi j}{N}\right) - \varphi_N\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\right| \le \frac{2\pi}{NQ_N}, \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

То есть

$$\|\varphi - \varphi_N\|_{L^\infty(\mathbb{T}_N)} \le \frac{2\pi}{NQ_N}. \tag{11}$$

Лемма 1. *При всех $n = 0, 1, 2, \ldots, Q_N - 1$ имеем $\|e^{in\varphi_N}\|_{A(\mathbb{T}_N)} \le 8\Theta(N^N)$.*

Доказательство. Пусть f — произвольная функция, принадлежащая $A(\mathbb{T})$. Рассматривая f как функцию на $\mathbb{T}_N$, имеем

$$\|f\|_{A(\mathbb{T}_N)} \le \|f\|_{A(\mathbb{T})}.$$

Этот факт хорошо известен [2]. Пользуясь этим неравенством, видим, что (см. (8))

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T}_N)} \le \Theta(n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

Заметим далее, что оценка (11) дает (при $n \ge 0$)

$$\|e^{in\varphi} - e^{in\varphi_N}\|_{L^\infty(\mathbb{T}_N)} \le n\|\varphi - \varphi_N\|_{L^\infty(\mathbb{T}_N)} \le n\frac{2\pi}{NQ_N},$$

[2] См., например, [58, § 2]. Следует лишь заметить, что если $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$, где $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| = \|f\|_{A(\mathbb{T})} < \infty$, то, вычисляя преобразование Фурье $\widehat{f}$ функции f на $\mathbb{T}_N$, получаем $\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}_N}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{imt}\right)e^{-ikt}d\mu_{\mathbb{T}_N}(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \int_{\mathbb{T}_N} e^{imt}e^{-ikt}d\mu_{\mathbb{T}_N}(t) = \sum_{m=k (\mathrm{mod}\ N)} c_m,\ k \in \mathbb{Z}_N$.

откуда при $n = 0, 1, \dots, Q_N - 1$ получаем

$$\|e^{in\varphi} - e^{in\varphi_N}\|_{L^\infty(\mathbb{T}_N)} \le \frac{2\pi}{N}. \tag{13}$$

Ясно, что для любой функции f на $\mathbb{T}_N$ мы имеем

$$|\widehat{f}(k)| \le \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}_N)}, \qquad k \in \mathbb{Z}_N$$

($\widehat{f}$ — преобразование Фурье на $\mathbb{T}_N$), откуда, учитывая, что $\operatorname{card} \mathbb{Z}_N = N$, видим, что

$$\|f\|_{A(\mathbb{T}_N)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_N} |\widehat{f}(k)| \le N\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}_N)}.$$

Следовательно (см. (13)),

$$\|e^{in\varphi} - e^{in\varphi_N}\|_{A(\mathbb{T}_N)} \le 2\pi, \qquad n = 0, 1, \dots, Q_N - 1. \tag{14}$$

Таким образом, при $n = 0, 1, \dots, Q_N - 1$ получаем (см. (12), (14) и (9))

$$\|e^{in\varphi_N}\|_{A(\mathbb{T}_N)} \le \|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T}_N)} + \|e^{in\varphi} - e^{in\varphi_N}\|_{A(\mathbb{T}_N)} \le$$
$$\le \Theta(n) + 2\pi \le 8\Theta(n) \le 8\Theta(Q_N) \le 8\Theta(N^N).$$

Лемма доказана.

Определим функцию Φ на $\mathbb{T}^3 = \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, полагая

$$\Phi(x, y, z) = \varphi(x) + \varphi(z - x) - \varphi(y) - \varphi(z - y), \qquad x, y, z \in \mathbb{T}.$$

Определим также функцию Φ_N на группе $\mathbb{T}_N^3 = \mathbb{T}_N \times \mathbb{T}_N \times \mathbb{T}_N$, полагая

$$\Phi_N(x, y, z) = \varphi_N(x) + \varphi_N(z - x) - \varphi_N(y) - \varphi_N(z - y), \qquad x, y, z \in \mathbb{T}_N.$$

Рассмотрим множество

$$E_N = \{(x, y, z) \in \mathbb{T}_N^3 : e^{i\Phi_N(x,y,z)} = 1\}.$$

Заметим, что всякое значение функции φ_N, а следовательно и всякое значение функции Φ_N имеет вид $2\pi P/Q_N$ при некотором $P \in \mathbb{Z}$ (см. (10)), поэтому справедливо тождество

$$\frac{1}{Q_N} \sum_{n=0}^{Q_N - 1} e^{in\Phi_N} = 1_{E_N}. \tag{15}$$

Следующая лемма устанавливает оценку снизу для меры множества E_N.

Лемма 2. *Имеем*

$$\frac{1}{64(\Theta(N^N))^2} \le \mu_{\mathbb{T}^3_N}(E_N).$$

Доказательство. Убедимся сначала, что если f — произвольная вещественная функция на $\mathbb{T}_N$, то

$$\frac{1}{\|e^{inf}\|^2_{A(\mathbb{T}_N)}} \le \int_{\mathbb{T}^3_N} e^{inF} d\mu_{\mathbb{T}^3_N}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

где

$$F(x,y,z) = f(x) + f(z-x) - f(y) - f(z-y), \qquad x,y,z \in \mathbb{T}_N.$$

Чтобы увидеть это мы дословно повторяем рассуждения Кахана [28], заменяя в них $\mathbb{T}$ на $\mathbb{T}_N$. А именно, интерполируя l^2 между l^1 и l^4, получаем $\|\cdot\|_{l^2} \le \|\cdot\|^{1/3}_{l^1}\|\cdot\|^{2/3}_{l^4}$. Следовательно,

$$1 = \|e^{inf}\|_{L^2(\mathbb{T}_N)} = \|e^{inf}\|_{A_2(\mathbb{T}_N)} \le \|e^{inf}\|^{1/3}_{A(\mathbb{T}_N)}\|e^{inf}\|^{2/3}_{A_4(\mathbb{T}_N)}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\|e^{inf}\|^2_{A(\mathbb{T}_N)}} \le \|e^{inf}\|^4_{A_4(\mathbb{T}_N)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_N} |\widehat{e^{inf} * e^{inf}}(k)|^2 =$$

$$= \|e^{inf} * e^{inf}\|^2_{L^2(\mathbb{T}_N)} = \int_{\mathbb{T}_N} \left| \int_{\mathbb{T}_N} e^{inf(x)} e^{inf(z-x)} dx \right|^2 dz =$$

$$= \int_{\mathbb{T}_N} \left(\int_{\mathbb{T}_N} e^{inf(x)} e^{inf(z-x)} dx \right) \overline{\left(\int_{\mathbb{T}_N} e^{inf(y)} e^{inf(z-y)} dy \right)} dz =$$

$$= \iiint_{\mathbb{T}^3_N} e^{inF(x,y,z)} dx dy dz.$$

Таким образом, имеем (16).

Воспользуемся теперь неравенством (16), полагая $f = \varphi_N$. Применяя лемму 1, видим, что при всех $n = 0, 1, \ldots, Q_N - 1$

$$\frac{1}{64(\Theta(N^N))^2} \le \int_{\mathbb{T}^3_N} e^{in\Phi_N} d\mu_{\mathbb{T}^3_N}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{64(\Theta(N^N))^2} \le \int_{\mathbb{T}^3_N} \left(\frac{1}{Q_N} \sum_{n=0}^{Q_N-1} e^{in\Phi_N} \right) d\mu_{\mathbb{T}^3_N}.$$

Остается воспользоваться тождеством (15). Лемма доказана.

Наша следующая цель — оценка сверху для $\delta_{\mathbb{T}^3_N,\ \mu_{\mathbb{T}^3_N}}(E_N)$. Она будет получена в лемме 4. Сначала докажем лемму 3, носящую технический характер.

Пусть $(\mathbb{X}_j, \mu_j)$, $j = 1, 2, \ldots m$, — вероятностные пространства. Пусть $(\mathbb{X}, \mu)$ — их произведение:

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \ldots \times \mathbb{X}_m, \qquad \mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_m.$$

Рассмотрим произвольное множество $E \subseteq \mathbb{X}$. При любом фиксированном $j = 1, 2, \ldots, m$ всякая точка

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m)$$

в $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \ldots \times \mathbb{X}_{j-1} \times \mathbb{X}_{j+1} \times \ldots \times \mathbb{X}_m$ определяет j -сечение множества E, а именно множество

$$E^{x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m} = \{x_j \in \mathbb{X}_j : (x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m) \in E\}.$$

Лемма 3. *Пусть $(\mathbb{X}_j, \mu_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, — вероятностные пространства и $(\mathbb{X}, \mu)$ — их произведение. Пусть E есть μ -измеримое множество в $\mathbb{X}$. Пусть $\delta \geq 0$. Предположим, что для каждого $j = 1, 2, \ldots, m$ любое j -сечение $E^{x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m}$ множества E удовлетворяет условию $\delta_{\mathbb{X}_j, \mu_j}(E^{x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m}) \leq \delta$. Тогда $\delta_{\mathbb{X}, \mu}(E) \leq 3^{m-1}\delta$.*

Доказательство [3]. Покажем сначала, что утверждение леммы верно при $m = 2$. Пусть $(\mathbb{X}_1, \mu_1)$ и $(\mathbb{X}_2, \mu_2)$ — вероятностные пространства. Положим $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ и $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$. Рассмотрим произвольное μ -измеримое множество $E \subseteq \mathbb{X}$ такое, что для любого его 1 -сечения

$$E^{x_2} = \{x_1 \in \mathbb{X}_1 : (x_1, x_2) \in E\}$$

и для любого его 2 -сечения

$$E^{x_1} = \{x_2 \in \mathbb{X}_2 : (x_1, x_2) \in E\}$$

мы имеем

$$\delta_{\mathbb{X}_1, \mu_1}(E^{x_2}) \leq \delta$$

[3] Автор не сомневается, что утверждение леммы 3 (в том или ином виде) является известным. Найти соответствующую ссылку автору не удалось.

и
$$\delta_{\mathbb{X}_2,\mu_2}(E^{x_1}) \le \delta$$
соответственно. Убедимся, что тогда $\delta_{\mathbb{X},\mu}(E) \le 3\delta$.

Положим
$$\mathbb{X}_1^{<} = \{x_1 \in \mathbb{X}_1 : \mu_2(E^{x_1}) \le \delta\}, \qquad \mathbb{X}_1^{>} = \{x_1 \in \mathbb{X}_1 : \mu_2(E^{x_1}) \ge 1-\delta\},$$
и аналогично
$$\mathbb{X}_2^{<} = \{x_2 \in \mathbb{X}_2 : \mu_1(E^{x_2}) \le \delta\}, \qquad \mathbb{X}_2^{>} = \{x_2 \in \mathbb{X}_2 : \mu_1(E^{x_2}) \ge 1-\delta\}.$$
Можем считать, что $0 \le \delta < 1/2$ (при $\delta \ge 1/2$ утверждение леммы тривиально). Тогда
$$\mathbb{X}_j^{<} \cap \mathbb{X}_j^{>} = \varnothing, \quad \mathbb{X}_j^{<} \cup \mathbb{X}_j^{>} = \mathbb{X}_j, \qquad j = 1, 2.$$

Положим
$$\alpha_1 = \mu_1(\mathbb{X}_1^{>}), \qquad \alpha_2 = \mu_2(\mathbb{X}_2^{>}).$$

Заметим, что
$$\iint_{\mathbb{X}_1^{>}\times\mathbb{X}_2^{<}} 1_E(x_1,x_2)d\mu_1(x_1)d\mu_2(x_2) \le \iint_{\mathbb{X}_1\times\mathbb{X}_2^{<}} 1_E(x_1,x_2)d\mu_1(x_1)d\mu_2(x_2) =$$
$$= \int_{\mathbb{X}_2^{<}} \mu_1(E^{x_2})d\mu_2(x_2) \le \delta\mu_2(X_2^{<}) = \delta(1-\alpha_2). \tag{17}$$
Вместе с тем, очевидно, что
$$\iint_{\mathbb{X}_1^{>}\times\mathbb{X}_2^{>}} 1_E(x_1,x_2)d\mu_1(x_1)d\mu_2(x_2) \le \mu_1(\mathbb{X}_1^{>})\mu_2(\mathbb{X}_2^{>}) = \alpha_1\alpha_2. \tag{18}$$
Сложив (17) и (18), получаем
$$\iint_{\mathbb{X}_1^{>}\times\mathbb{X}_2} 1_E(x_1,x_2)d\mu_1(x_1)d\mu_2(x_2) \le \delta(1-\alpha_2) + \alpha_1\alpha_2. \tag{19}$$
С другой стороны,
$$\iint_{\mathbb{X}_1^{>}\times\mathbb{X}_2} 1_E(x_1,x_2)d\mu_1(x_1)d\mu_2(x_2) = \int_{\mathbb{X}_1^{>}} \mu_2(E^{x_1})d\mu_1(x_1) \ge$$
$$\ge (1-\delta)\mu_1(\mathbb{X}_1^{>}) = (1-\delta)\alpha_1. \tag{20}$$
Вместе неравенства (19), (20) дают
$$(1-\delta)\alpha_1 \le \delta(1-\alpha_2) + \alpha_1\alpha_2. \tag{21}$$

Аналогичным образом,

$$(1-\delta)\alpha_2 \le \delta(1-\alpha_1) + \alpha_2\alpha_1. \tag{22}$$

Сложив неравенства (21) и (22), видим, что

$$\alpha_1 + \alpha_2 \le 2\delta + 2\alpha_1\alpha_2,$$

то есть

$$\alpha_1(1-\alpha_2) + \alpha_2(1-\alpha_1) \le 2\delta.$$

Отсюда, полагая $a = \min(\alpha_1, 1-\alpha_1)$, имеем

$$a = a(1-\alpha_2) + \alpha_2 a \le \alpha_1(1-\alpha_2) + \alpha_2(1-\alpha_1) \le 2\delta.$$

Таким образом, возможны лишь два случая: либо $\alpha_1 \le 2\delta$, либо $\alpha_1 \ge 1-2\delta$.

В первом случае получаем

$$\mu(E) = \int_{\mathbb{X}_1} \mu_2(E^{x_1}) d\mu_1(x_1) = \int_{\mathbb{X}_1^>} \mu_2(E^{x_1}) d\mu_1(x_1) + \int_{\mathbb{X}_1^<} \mu_2(E^{x_1}) d\mu_1(x_1) \le$$

$$\le \mu_1(\mathbb{X}_1^>) + \delta\mu_1(\mathbb{X}_1^<) = \alpha_1 + \delta(1-\alpha_1) \le \alpha_1 + \delta \le 3\delta.$$

Во втором случае получаем

$$\mu(E) = \int_{\mathbb{X}_1} \mu_2(E^{x_1}) d\mu_1(x_1) \ge \int_{\mathbb{X}_1^>} \mu_2(E^{x_1}) d\mu_1(x_1) \ge$$

$$\ge (1-\delta)\mu_1(\mathbb{X}_1^>) = (1-\delta)\alpha_1 \ge (1-\delta)(1-2\delta) = 1 - 3\delta + 2\delta^2 \ge 1 - 3\delta.$$

Таким образом, утверждение леммы верно при $m = 2$.

Для произвольного m утверждение леммы легко получается по индукции. Предположим, что оно верно для какого-то $m \ge 2$. Пусть $(\mathbb{X}_j, \mu_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m+1$, — вероятностные пространства. Достаточно рассмотреть два пространства, одно из которых — это $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \ldots \times \mathbb{X}_m$ с мерой $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_m$, а второе — это $\mathbb{X}_{m+1}$ с мерой μ_{m+1}. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если N — достаточно большое простое число, то*

$$\delta_{\mathbb{T}_N^3,\ \mu_{\mathbb{T}_N^3}}(E_N) \le c\left(\frac{\log\log N}{\log N}\right)^{1/3} (\Theta(N^N))^2,$$

где $c > 0$ не зависит от N.

Доказательство. Фиксируем произвольные $y \in \mathbb{T}_N$ и $z \in \mathbb{T}_N$. Рассмотрим соответствующее 1 -сечение множества E_N, а именно, множество

$$E_N^{y,z} = \{x \in \mathbb{T}_N : (x, y, z) \in E_N\}.$$

Рассмотрим также соответствующее сечение $\Phi_N^{y,z}$ функции Φ_N, т.е. функцию от $x \in \mathbb{T}_N$, определяемую следующим образом

$$\Phi_N^{y,z}(x) = \Phi_N(x, y, z).$$

Заметим, что в произведении

$$e^{in\Phi_N^{y,z}(x)} = e^{in\varphi_N(x)} e^{in\varphi_N(z-x)} e^{-in\varphi_N(y)} e^{-in\varphi_N(z-y)}$$

лишь два сомножителя являются функциями от x, причем оба имеют норму в $A(\mathbb{T}_N)$, равную $\|e^{in\varphi_N}\|_{A(\mathbb{T}_N)}$, в то время как оставшиеся два сомножителя — постоянные, по модулю равные 1. Поэтому

$$\|e^{in\Phi_N^{y,z}}\|_{A(\mathbb{T}_N)} \leq \|e^{in\varphi_N}\|_{A(\mathbb{T}_N)}^2.$$

Отсюда, пользуясь леммой 1, видим, что

$$\|e^{in\Phi_N^{y,z}}\|_{A(\mathbb{T}_N)} \leq (8\Theta(N^N))^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, Q_N - 1.$$

Вместе с тем, в силу тождества (15), для сечения $E_N^{y,z}$ множества E_N мы имеем

$$1_{E_N^{y,z}} = \frac{1}{Q_N} \sum_{n=0}^{Q_N - 1} e^{in\Phi_N^{y,z}}.$$

Следовательно,

$$\|1_{E_N^{y,z}}\|_{A(\mathbb{T}_N)} \leq (8\Theta(N^N))^2.$$

Отсюда, пользуясь оценкой (6), видим, что для произвольного 1 -сечения $E_N^{y,z}$ множества E_N мы имеем

$$\delta_{\mathbb{T}_N,\ \mu_{\mathbb{T}_N}}(E_N^{y,z}) \leq c \left(\frac{\log \log N}{\log N} \right)^{1/3} (8\Theta(N^N))^2,$$

где $c > 0$ не зависит от y, z и N.

Таким же образом получаем аналогичную оценку сверху для произвольного 2 -сечения

$$E_N^{x,z} = \{y \in \mathbb{T}_N : (x, y, z) \in E_N\}$$

и произвольного 3 -сечения

$$E_N^{x,y} = \{z \in \mathbb{T}_N : (x, y, z) \in E_N\}.$$

Пользуясь леммой 3 при $m = 3$ и $(\mathbb{X}_j, \mu_j) = (\mathbb{T}_N, \mu_{\mathbb{T}_N}),\ j = 1, 2, 3$, видим, что

$$\delta_{\mathbb{T}_N^3,\ \mu_{\mathbb{T}_N^3}}(E_N) \leq 9c \left(\frac{\log \log N}{\log N} \right)^{1/3} (8\Theta(N^N))^2.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим дополнение $F_N = \mathbb{T}^3_N \setminus E_N$ множества E_N.

Лемма 5. *Если N стремится к бесконечности, пробегая множество простых чисел, то* $\mu_{\mathbb{T}^3_N}(F_N) \to 0$.

Доказательство. Если N — достаточно большое простое число, то по лемме 4 имеем либо

$$\mu_{\mathbb{T}^3_N}(E_N) \le c\biggl(\frac{\log\log N}{\log N}\biggr)^{1/3}(\Theta(N^N))^2,$$

либо

$$\mu_{\mathbb{T}^3_N}(F_N) \le c\biggl(\frac{\log\log N}{\log N}\biggr)^{1/3}(\Theta(N^N))^2. \tag{23}$$

В первом случае в силу леммы 2 получаем

$$\frac{1}{64(\Theta(N^N))^2} \le c\biggl(\frac{\log\log N}{\log N}\biggr)^{1/3}(\Theta(N^N))^2,$$

то есть

$$\frac{1}{64c}\biggl(\frac{\log N}{\log\log N}\biggr)^{1/3} \le (\Theta(N^N))^4,$$

что невозможно, если N очень велико (см. (7)). Таким образом, при всех достаточно больших простых N имеем оценку (23), откуда, учитывая (7), получаем

$$\mu_{\mathbb{T}^3_N}(F_N) \le c\biggl(\frac{\log\log N}{\log N}\biggr)^{1/3} o\biggl(\biggl(\frac{\log N}{\log\log N}\biggr)^{1/6}\biggr) = o(1).$$

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Заметим, что (поскольку $e^{i\Phi_N} = 1$ на E_N) из соотношения (11) следует, что

$$\|e^{i\Phi} - 1\|_{L^\infty(E_N)} = \|e^{i\Phi} - e^{i\Phi_N}\|_{L^\infty(E_N)} \le$$
$$\le \|\Phi - \Phi_N\|_{L^\infty(E_N)} \le \|\Phi - \Phi_N\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3_N)} \le$$
$$\le 4\|\varphi - \varphi_N\|_{L^\infty(\mathbb{T}_N)} \le \frac{8\pi}{NQ_N} \le \frac{8\pi}{N} = o(1), \qquad N \to \infty.$$

Пользуясь этой оценкой и леммой 5, видим, что если N стремится к бесконечности, пробегая простые числа, то

$$\int_{\mathbb{T}_N^3} |e^{i\Phi} - 1| d\mu_{\mathbb{T}_N^3} = \int_{E_N} |e^{i\Phi} - 1| d\mu_{\mathbb{T}_N^3} + \int_{F_N} |e^{i\Phi} - 1| d\mu_{\mathbb{T}_N^3} \leq$$

$$\leq \|e^{i\Phi} - 1\|_{L^\infty(E_N)} + 2\mu_{\mathbb{T}_N^3}(F_N) \to 0.$$

С другой стороны (так как функция Φ непрерывна на $\mathbb{T}^3$) при $N \to \infty$ имеем

$$\int_{\mathbb{T}_N^3} |e^{i\Phi} - 1| d\mu_{\mathbb{T}_N^3} = \frac{1}{N^3} \sum_{0 \leq k,l,m \leq N-1} |e^{i\Phi(\frac{2\pi k}{N}, \frac{2\pi l}{N}, \frac{2\pi m}{N})} - 1| \to$$

$$\to \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} |e^{i\Phi(x,y,z)} - 1| dx dy dz.$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{T}^3} |e^{i\Phi(x,y,z)} - 1| dx dy dz = 0.$$

Отсюда (поскольку функция Φ непрерывна) получаем

$$e^{i\Phi(x,y,z)} = 1$$

при всех $(x, y, z) \in \mathbb{T}^3$, и мы видим, что

$$\Phi(x, y, z) = 2\pi k, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{T}^3,$$

где k — целое, не зависящее от (x, y, z). Беря $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ получаем $k = 0$, откуда $\Phi(x, y, z) = 0$ на $\mathbb{T}^3$. То есть

$$\varphi(x) + \varphi(z - x) - \varphi(y) - \varphi(z - y) = 0$$

при всех $x, y, z \in \mathbb{R}$. Следовательно, функция φ —линейна, $\varphi(t) = at + b$. Из условия (1) получаем $a \in \mathbb{Z}$. Теорема доказана.

Замечания.

1. Теорема 1 имеет следующую (эквивалентную) операторную версию. Пусть U — ограниченный коммутирующий со сдвигами оператор в $l^1(\mathbb{Z})$ такой, что

$$\|U^n\|_{l^1 \to l^1} = o\left(\left(\frac{\log\log|n|}{\log\log\log|n|}\right)^{1/12}\right), \qquad |n| \to \infty, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{24}$$

тогда $U = \xi S$, где ξ — комплексное число, $|\xi| = 1$, и S — оператор сдвига. В самом деле, легко проверить (и хорошо известно, см., например, [33]), что всякий ограниченный коммутирующий со сдвигами оператор в $l^1(\mathbb{Z})$ является оператором свертки с некоторой последовательностью, принадлежащей $l^1(\mathbb{Z})$, причем норма оператора равна l^1 -норме этой последовательности. В частности, U является оператором свертки с некоторой последовательностью $\{u_k,\ k\in\mathbb{Z}\}\in l^1$. Определим функцию u на $\mathbb{T}$, полагая

$$u(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}u_ke^{ikt}.$$

Имеем $u\in A(\mathbb{T})$ и

$$\|u^n\|_{A(\mathbb{T})}=\|U^n\|_{l^1\to l^1}.$$

Функция u является непрерывной, и, поскольку $\|u^n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\le\|u^n\|_{A(\mathbb{T})}$, ясно, что $|u(t)|=1$ при всех $t\in\mathbb{T}$. (В противном случае рост норм $\|U^n\|_{l^1\to l^1}$ был бы экспоненциальным либо при $n\to+\infty$, либо при $n\to-\infty$.) Таким образом u — непрерывная функция, отображающая $\mathbb{R}$ в окружность $\mathcal{C}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Всякая такая функция имеет вид $u(t)=e^{i\varphi(t)}$, где $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция [4]. Поскольку функция u является 2π -периодической, то $\varphi(t+2\pi)=\varphi(t)(\mathrm{mod}\ 2\pi)$, т.е. φ — непрерывное отображение окружности $\mathbb{T}$ в себя. Имеем $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}=\|u^n\|_{A(\mathbb{T})}=\|U^n\|_{l^1\to l^1}$. Пользуясь теоремой 1, из (24) получаем, что $\varphi(t)=\nu t+\varphi(0)$ при некотором $\nu\in\mathbb{Z}$. Тогда $u(t)=\xi e^{i\nu t}$, где $\xi=e^{i\varphi(0)}$. Следовательно, оператор U есть оператор свертки с последовательностью $\{u_k,\ k\in\mathbb{Z}\}$, где $u_k=0$ при всех $k\ne\nu$ и $u_\nu=\xi$. Таким образом, $U=\xi S$, где $\xi\in\mathbb{C},\ |\xi|=1$, и S — оператор сдвига $(S:\{x_k\}\to\{x_{k-\nu}\})$.

2. Теорема 1 легко переносится на многомерный случай. Пусть $A(\mathbb{T}^d)$ — пространство непрерывных функций на d -мерном торе $\mathbb{T}^d$, имеющих абсолютно сходящийся ряд Фурье. Положим $\|f\|_{A(\mathbb{T}^d)}=\|\widehat{f}\|_{l^1(\mathbb{Z}^d)}$, где $\widehat{f}$ — преобразование Фурье на $\mathbb{T}^d$. Если $\varphi:\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}$ — непрерывное отображение такое, что

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^d)}=o\Bigg(\bigg(\frac{\log\log|n|}{\log\log\log|n|}\bigg)^{1/12}\Bigg),\qquad n\in\mathbb{Z},\quad |n|\to\infty,$$

то φ — линейно, т.е. $\varphi(t)=(\nu,t)+\varphi(0)$, где $\nu\in\mathbb{Z}^d$. (Через (ν,t) обозначено скалярное произведение векторов $\nu\in\mathbb{Z}^d$ и $t\in\mathbb{T}^d$.) Многомерный случай легко сводится к одномерному индукцией по размерности. Достаточно лишь заметить следующее. Пусть $f\in A(\mathbb{T}^{d+1})$. При фиксированном $x\in\mathbb{T}^d$ рассмотрим функцию f_x на $\mathbb{T}$, полагая $f_x(y)=f(x,y)$. Тогда $\|f_x\|_{A(\mathbb{T})}\le\|f\|_{A(\mathbb{T}^{d+1})}$.

[4] Функция φ есть поднятие u относительно накрытия $e:\mathbb{R}\to\mathcal{C}$, где $e(x)=e^{ix}$. Существование φ гарантировано теоремой о монодромии, см., например, [65, лекция 4, следствие из теоремы 1].

Соответствующий версия для операторов U в $l^1(\mathbb{Z}^d)$ также имеет место.

3. Как указали Грин и Конягин [20, § 1], возможно, что оценка в их теореме может быть улучшена. В частности, возможно, что $(\log\log N/\log N)^{1/3}$ в правой части в (6) можно заменить на $1/\log N$ (дальнейшее улучшение невозможно). Улучшение такого вида позволило бы заменить правую часть в условии теоремы 1 на $o((\log\log|n|)^{1/4})$. По-видимому более просто получить улучшение оценки (6) с заменой в ней показателя степени $1/3$ на $1/2$, см. по этому поводу работу Сандерса [67]. Это позволило-бы заменить показатель $1/12$ в теореме 1 на $1/8$. По поводу возможности ликвидировать $\log\log N$ в теореме Грина–Конягина, см. [20, § 6]. Это позволило бы ликвидировать $\log\log\log|n|$ в теореме 1.

4. Гипотеза Кахана остается не доказанной даже при дополнительном предположении C^1 -гладкости отображения φ. В связи с этим отметим, что как мы увидим в § 3 (см. следствие 3), если $\gamma(n)\geq 0$ — произвольная последовательность, $\gamma(n)\to+\infty$, то существует C^1 -гладкое нелинейное отображение $\varphi:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ такое, что $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}=O(\gamma(|n|)\log|n|)$.

5. Неясно существует ли непрерывное нелинейное отображение φ : $\mathbb{T}\to$ $\mathbb{T}$ такое, что
$$\|e^{in_k\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}=O(1), \tag{25}$$
где $\{n_k\}$ — какая-то неограниченная последовательность целых чисел. Если φ абсолютно непрерывно (т.е., если функция $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ с условием (1) абсолютно непрерывна на любом интервале длины 2π), то это невозможно. Приведем простое доказательство.

Заметим сначала, что если g — вещественная измеримая функция на $\mathbb{T}$ такая, что $\widehat{e^{i\lambda g}}\in l^1(\mathbb{Z})$ при всех $\lambda\in\mathbb{R}$ и
$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\|\widehat{e^{i\lambda g}}\|_{l^1(\mathbb{Z})}<\infty,$$
то g — постоянна почти всюду. Это можно увидеть следующим образом. Имеем $\widehat{e^{ig}}\in l^1(\mathbb{Z})$, следовательно, e^{ig} совпадает почти всюду с некоторой непрерывной функцией ξ. Тогда $|\xi|=1$ почти всюду и, следовательно, всюду. Отсюда следует, что $\xi=e^{i\psi}$, где $\psi:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ — непрерывное отображение (это уже объяснялось в первом замечании). Тогда при любом $n\in\mathbb{Z}$ имеем $e^{in\psi}=\xi^n=e^{ing}$ почти всюду; следовательно, $\|e^{in\psi}\|_{A(\mathbb{T})}=\|\widehat{e^{ing}}\|_{l^1(\mathbb{Z})}=O(1)$, $n\in\mathbb{Z}$. По теореме Берлинга–Хелсона функция ψ — линейна с целым угловым коэффициентом. Таким образом, g почти всюду совпадает по $\operatorname{mod} 2\pi$ с линейной функцией, имеющей целый угловой коэффициент. Возьмем какое-нибудь (вещественное) иррациональное число α. Повторяя рассуждение для функции $g_\alpha=\alpha g$ вместо g, видим,

что αg также почти всюду совпадает по $\mathrm{mod}\, 2\pi$ с линейной функцией, имеющей целый угловой коэффициент. Это возможно лишь в случае, когда g постоянна почти всюду.

Пусть $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ — абсолютно непрерывное отображение. Предположим, что выполняется (25). Вычитая подходящую линейную функцию, можем считать, что φ есть вещественная 2π — периодическая функция на $\mathbb{R}$. Можем также считать, что $n_k \to \infty$. При произвольных $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, и $k = 1, 2, \ldots$ определим функцию $g_{\lambda,k}$ на $\mathbb{R}$, полагая

$$g_{\lambda,k}(t) = \frac{\varphi(t + \lambda/n_k) - \varphi(t)}{\lambda/n_k}.$$

При $k \to \infty$ имеем $g_{\lambda,k} \to \varphi'$ почти всюду. Заметим далее, что

$$e^{i\lambda g_{\lambda,k}(t)} = e^{in_k\varphi(t+\lambda/n_k)}e^{-in_k\varphi(t)},$$

откуда, считая, что $\|e^{in_k\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq c,\ k = 1, 2, \ldots$, получаем $\|e^{i\lambda g_{\lambda,k}}\|_{A(\mathbb{T})} \leq c^2$. Устремляя k к ∞, видим, что $\|\widehat{e^{i\lambda\varphi'}}\|_{l^1(\mathbb{Z})} \leq c^2$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ (случай $\lambda = 0$ очевиден). Таким образом, производная φ' функции φ постоянна почти всюду. Из условия абсолютной непрерывности следует, что функция φ линейна.

§ 2. Пространства A_p. Оценки снизу норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ в случае C^1 -гладкой фазы φ

Здесь для C^1 -гладких вещественных функций φ на окружности $\mathbb{T}$ мы получим оценки снизу для норм экспонент $e^{i\lambda\varphi}$ в пространствах $A_p(\mathbb{T}), p \geq 1$.

Пусть задана непрерывная неубывающая функция $\omega(\delta)$ на $[0, +\infty)$ с условием $\omega(0) = 0$. Через $C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ обозначим класс функций g на $\mathbb{T}$ таких, что $\omega(g', \delta) = O(\omega(\delta)),\ \delta \to +0$, где

$$\omega(g', \delta) = \sup_{|t_1 - t_2| \leq \delta} |g'(t_1) - g'(t_2)|, \qquad \delta \geq 0,$$

— модуль непрерывности производной g' функции g. Вообще, для произвольного интервала $I \subseteq \mathbb{R}$ будем пользоваться следующими обозначениями. Обозначим через $\mathrm{Lip}_\omega(I)$ класс функций g на I с модулем непрерывности

$$\omega(I, g, \delta) = \sup_{\substack{|t_1 - t_2| \leq \delta \\ t_1, t_2 \in I}} |g(t_1) - g(t_2)|, \qquad \delta \geq 0,$$

удовлетворяющим условию $\omega(I, g, \delta) = O(\omega(\delta)),\ \delta \to +0$. Через $C^{1,\omega}(I)$ обозначим класс функций g на I с производной $g' \in \mathrm{Lip}_\omega(I)$. (Таким образом, класс $C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ состоит из 2π -периодических функций, принадлежащих

$C^{1,\omega}(\mathbb{R})$.) Для $0<\alpha\le 1$ будем писать $C^{1,\alpha}$ вместо C^{1,δ^α}. Класс $C^1(I)$ состоит из непрерывно дифференцируемых функций на I. Если $I=\mathbb{R}$, мы пишем просто $\omega(g,\delta)$ вместо $\omega(\mathbb{R},g,\delta)$.

Теорема 2. *Пусть $1\le p<2$. Пусть φ — вещественная функция на $\mathbb{T}$. Предположим, что φ непостоянна и $\varphi\in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$. Тогда*

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})}\ge c\,|\lambda|^{1/p}\,\chi^{-1}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right),\qquad \lambda\in\mathbb{R},\quad |\lambda|\ge 1,$$

где χ^{-1} — функция, обратная к $\chi(\delta)=\delta\omega(\delta)$, и $c=c(p,\varphi)>0$ не зависит от λ.

Разумеется, ввиду очевидной оценки $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})}\ge 1$, оценка теоремы 2 содержательна лишь в случае, когда ее правая часть неограниченно растет с ростом λ. (Это всегда имеет место при $p=1$.)

Из теоремы 2 немедленно вытекает

Следствие 1. *Пусть $0<\alpha\le 1$. Если φ — вещественная непостоянная функция на $\mathbb{T}$ и $\varphi\in C^{1,\alpha}(\mathbb{T})$, то при всех p, $1\le p<1+\alpha$, имеем*

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})}\ge c_p\,|\lambda|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{1+\alpha}},\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

В частности, $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}\ge c\,|\lambda|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$.

Для $\varphi\in C^2$ мы имеем $\alpha=1$; таким образом, частным случаем следствия 1 является оценка Лейбензона–Кахана–Алпара (3) [5].

Следующая ниже теорема $2'$ является локальным вариантом теоремы 2.

Пусть $I\subset\mathbb{R}$ — интервал длины, меньшей 2π. Скажем, что функция f, заданная на I, принадлежит $A_p(\mathbb{T},I)$, если существует функция F из $A_p(\mathbb{T})$ такая, что ее сужение $F_{|I}$ на интервал I совпадает с f. Положим

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T},I)}=\inf_{F\in A_p(\mathbb{T}),\ F_{|I}=f}\|F\|_{A_p(\mathbb{T})}.$$

Ясно, что $A_p(\mathbb{T},I)$ — банахово пространство, $1\le p\le 2$.

Теорема $2'$. *Пусть $1\le p<2$. Пусть φ — вещественная функция на интервале $I\subset\mathbb{R}$, $|I|<2\pi$. Предположим, что φ нелинейна на I и*

[5] Кроме того, оценка следствия 1 при $p=1$ является улучшением результата Леблана, показавшего в [50], что если $\varphi\in C^{1,\alpha}(\mathbb{T})$ — вещественная непостоянная функция, то $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}\ge c\frac{|\lambda|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{(\log|\lambda|)^2}$.

$\varphi \in C^{1,\omega}(I)$. *Тогда*

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T},I)} \geq c\,|\lambda|^{1/p}\,\chi^{-1}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| \geq 1.$$

Локальный аналог следствия 1 очевиден.

Доказательство теоремы 2. Пусть

$$m = \min_{t\in[0,2\pi]} \varphi'(t), \qquad M = \max_{t\in[0,2\pi]} \varphi'(t).$$

Поскольку φ непостоянна и всякая непрерывная 2π -периодическая функция, линейная на $[0,2\pi]$, является постоянной, имеем $m < M$.

Фиксируем $c > 0$ так, что

$$\omega(\varphi', \delta) \leq c\omega(\delta), \quad \delta \geq 0.$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Без ограничения общности мы можем считать, что $\lambda > 0$ (комплексное сопряжение не меняет норму функций в A_p). Определим $\delta_\lambda > 0$ соотношением

$$\chi(2\delta_\lambda) = \frac{1}{2c\lambda}. \tag{26}$$

При $0 < \varepsilon \leq \pi$ пусть Δ_ε — "треугольная" функция, сосредоточенная на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, т.е. функция на $\mathbb{T}$, заданная следующим образом:

$$\Delta_\varepsilon(t) = \max\left(1 - \frac{|t|}{\varepsilon},\ 0\right), \qquad t \in [-\pi,\ \pi].$$

Для произвольного интервала $J \subseteq [0,2\pi]$ пусть Δ_J означает треугольную функцию, сосредоточенную на J, а именно, $\Delta_J(t) = \Delta_{|J|/2}(t - c_J)$, где c_J — центр интервала J (и $|J|$ — его длина).

В основе доказательства теоремы лежит следующая лемма о концентрации больших значений преобразования Фурье.

Лемма 6. *Пусть $\lambda > 0$ достаточно велико. Тогда для любого $k \in \mathbb{Z}$ такого, что $m\lambda < k < M\lambda$, найдется интервал $I_{\lambda,k} \subseteq [0,2\pi]$ такой, что $|I_{\lambda,k}| = 2\delta_\lambda$ и*

$$|(\Delta_{I_{\lambda,k}} e^{i\lambda\varphi})^\wedge(k)| \geq \frac{\delta_\lambda}{4\pi}.$$

Доказательство. Будем считать λ столь большим, что

$$2\delta_\lambda < 2\pi \tag{27}$$

и, кроме того,

$$\lambda > \frac{2}{M-m}. \tag{28}$$

Возьмем произвольное $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющее условию $m\lambda < k < M\lambda$ (см.(28)). Мы можем найти точку $t_{\lambda,k}$ в $(0, 2\pi)$ такую, что $\varphi'(t_{\lambda,k}) = k/\lambda$. Существует интервал $I_{\lambda,k} \subseteq [0, 2\pi]$, который содержит точку $t_{\lambda,k}$ и имеет длину $2\delta_\lambda$ (см. (27)). Рассмотрим следующую линейную функцию:

$$\varphi_{\lambda,k}(t) = \varphi(t_{\lambda,k}) + \frac{k}{\lambda}(t - t_{\lambda,k}), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Если $t \in I_{\lambda,k}$, то для некоторой точки θ, лежащей между t и $t_{\lambda,k}$, имеем

$$\varphi(t) - \varphi(t_{\lambda,k}) = \varphi'(\theta)(t - t_{\lambda,k}).$$

Поэтому

$$|\varphi(t) - \varphi_{\lambda,k}(t)| = |(\varphi(t) - \varphi(t_{\lambda,k})) - \frac{k}{\lambda}(t - t_{\lambda,k})| =$$

$$= |\varphi'(\theta)(t - t_{\lambda,k}) - \varphi'(t_{\lambda,k})(t - t_{\lambda,k})| =$$

$$= |t - t_{\lambda,k}||\varphi'(\theta) - \varphi'(t_{\lambda,k})| \leq 2\delta_\lambda \omega(\varphi', 2\delta_\lambda) \leq 2\delta_\lambda c\omega(2\delta_\lambda) = c\chi(2\delta_\lambda).$$

Отсюда, учитывая (26), имеем

$$|e^{i\lambda\varphi(t)} - e^{i\lambda\varphi_{\lambda,k}(t)}| \leq |\lambda\varphi(t) - \lambda\varphi_{\lambda,k}(t)| \leq \lambda c\chi(2\delta_\lambda) = \frac{1}{2}, \qquad t \in I_{\lambda,k}. \tag{29}$$

Пользуясь оценкой (29), получаем

$$|(\Delta_{I_{\lambda,k}} e^{i\lambda\varphi})^\wedge(k) - (\Delta_{I_{\lambda,k}} e^{i\lambda\varphi_{\lambda,k}})^\wedge(k)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta_{I_{\lambda,k}}(t)|e^{i\lambda\varphi(t)} - e^{i\lambda\varphi_{\lambda,k}(t)}|\, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta_{I_{\lambda,k}}(t)\, dt = \frac{1}{2}\widehat{\Delta_{I_{\lambda,k}}}(0).$$

Вместе с тем имеем

$$|(\Delta_{I_{\lambda,k}} e^{i\lambda\varphi_{\lambda,k}})^\wedge(k)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta_{I_{\lambda,k}}(t) e^{i(\lambda\varphi_{\lambda,k}(t) - kt)}\, dt\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Delta_{I_{\lambda,k}}(t)\, dt = \widehat{\Delta_{I_{\lambda,k}}}(0)$$

и, таким образом,

$$|(\Delta_{I_{\lambda,k}} e^{i\lambda\varphi})^\wedge(k)| \geq \frac{1}{2}\widehat{\Delta_{I_{\lambda,k}}}(0) = \frac{\delta_\lambda}{4\pi}.$$

Лемма доказана.

При каждом $\lambda \in \mathbb{R}$ определим функцию g_λ ее разложением Фурье:

$$g_\lambda(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k)|\, e^{ikt}.$$

Очевидно, что $g_\lambda \in L^2(\mathbb{T})$.

Хорошо известно, что $\Delta_\varepsilon \in A(\mathbb{T})$ и коэффициенты Фурье функции Δ_ε не отрицательны[6]. Поскольку для произвольного интервала J функция Δ_J получается из $\Delta_{|J|/2}$ сдвигом, имеем $|\widehat{\Delta_J}(k)| = \widehat{\Delta_{|J|/2}}(k),\ k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, из леммы 6 следует, что если λ достаточно велико, то

$$\frac{\delta_\lambda}{4\pi} \leq |(\Delta_{I_{\lambda,k}} e^{i\lambda\varphi})^\wedge(k)| =$$

$$= \left|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{\Delta_{I_{\lambda,k}}}(\nu)\widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k-\nu)\right| \leq \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{\Delta_{I_{\lambda,k}}}(\nu)||\widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k-\nu)| =$$

$$= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{\Delta_{\delta_\lambda}}(\nu)\widehat{g_\lambda}(k-\nu) = (\Delta_{\delta_\lambda}\cdot g_\lambda)^\wedge(k), \qquad m\lambda < k < M\lambda. \tag{30}$$

Так как $\|\Delta_\varepsilon\|_A = \sum_k \widehat{\Delta_\varepsilon}(k) = \Delta_\varepsilon(0) = 1$, то для любой функции $f \in A_p(\mathbb{T})$ мы имеем $\|\Delta_\varepsilon \cdot f\|_{A_p} \leq \|f\|_{A_p},\ 1 \leq p \leq 2,\ 0 < \varepsilon \leq \pi$. Поэтому, пользуясь оценкой (30), получаем, что при всех достаточно больших λ

$$\left(\frac{1}{2}(M-m)\lambda\right)^{1/p} \frac{\delta_\lambda}{4\pi} \leq \left(\sum_{m\lambda<k<M\lambda}\left(\frac{\delta_\lambda}{4\pi}\right)^p\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{m\lambda<k<M\lambda} |(\Delta_{\delta_\lambda}\cdot g_\lambda)^\wedge(k)|^p\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \|\Delta_{\delta_\lambda}\cdot g_\lambda\|_{A_p} \leq \|g_\lambda\|_{A_p} = \|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}. \tag{31}$$

Заметим теперь, что условие (26) дает

$$1 = 2c\lambda 2\delta_\lambda\omega(2\delta_\lambda) \leq 4c\lambda\delta_\lambda\omega(4\delta_\lambda) \leq \lambda(c+1)4\delta_\lambda\omega((c+1)4\delta_\lambda) = \lambda\chi((c+1)4\delta_\lambda),$$

[6] Прямое вычисление дает $\widehat{\Delta_\varepsilon}(k) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin^2(\varepsilon k/2)}{\varepsilon k^2},\ k \neq 0, \quad \widehat{\Delta_\varepsilon}(0) = \frac{\varepsilon}{2\pi}.$

и, следовательно,

$$\delta_\lambda \geq \frac{1}{4(c+1)}\chi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Подставляя эту оценку в (31), получаем утверждение теоремы.

Доказательство теоремы $2'$. Оно получается очевидной модификацией доказательства теоремы 2, а именно, считая, что I — отрезок, содержащийся в $(0, 2\pi)$ (это не ограничивает общности), положим $m = \min_{t\in I}\varphi'(t)$ и $M = \max_{t\in I}\varphi'(t)$. Поскольку φ нелинейна на I, имеем $m < M$. Фиксируем p, $1 \leq p < 2$. При каждом λ фиксируем функцию $F_\lambda \in A_p(\mathbb{T})$, являющуюся 2π -периодическим продолжением функции $e^{i\lambda\varphi}$ с I на $\mathbb{R}$, такую, что

$$\|F_\lambda\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq 2\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T},I)}.$$

В доказательстве теоремы 2 следует заменить $\omega(\varphi', 2\delta_\lambda)$ на $\omega(I, \varphi', 2\delta_\lambda)$ и, считая, что λ достаточно велико, следует заменить соотношение (27) на соотношение $2\delta_\lambda < |I|$. При $m\lambda < k < M\lambda$ точку $t_{\lambda,k}$ с условием $\varphi'(t_{\lambda,k}) = k/\lambda$ выбираем во внутренности отрезка I. Интервал $I_{\lambda,k}$ длины $2\delta_\lambda$, содержащий $t_{\lambda,k}$, выбираем так, что он содержится в I. Вместо $e^{i\lambda\varphi}$ следует рассмотреть функцию F_λ.

Замечание 6. Из следствия 1 и оценки (2), верной верной для любой вещественной функции $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$, вытекает, что для любой вещественной функции $\varphi \in C^{1,1}(\mathbb{T})$, $\varphi \neq \mathrm{const}$, мы имеем

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \simeq |\lambda|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, порядок роста норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ в случае $C^{1,1}$ -гладкой фазы φ такой же, как и в C^2 -гладком случае.

§ 3. Медленный рост

В этом параграфе для каждого класса $C^{1,\omega}$ (при некотором простом условии, наложенном на ω) мы построим нетривиальную функцию $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ с медленным ростом норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})}$.

Случай $\omega(\delta) = \delta$ исчерпывается замечанием 6.

Мы называем функцию нигде не линейной, если она не является линейной ни на каком интервале.

Как и выше, χ^{-1} — функция, обратная к $\chi(\delta) = \delta\omega(\delta)$.

Теорема 3. *Пусть* $\omega(2\delta) < 2\omega(\delta)$ *при всех достаточно малых* $\delta > 0$. *Существует нигде не линейная вещественная функция* $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ *такая, что*

$$\text{(i)} \qquad \|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq c\frac{|\lambda|}{\log|\lambda|}\chi^{-1}\bigg(\frac{(\log|\lambda|)^2}{|\lambda|}\bigg), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| \geq 2;$$

$$\text{(ii)} \qquad \|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_p\bigg(\int_1^{|\lambda|}\bigg(\chi^{-1}\bigg(\frac{1}{\tau}\bigg)\bigg)^p\,d\tau\bigg)^{1/p}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| \geq 2,$$

при всех p, $1 < p < 2$. *Положительные константы* c, c_p *не зависят от* λ.

Полагая $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, в теореме 3 и пользуясь следствием 1, а также тривиальной оценкой $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p} \geq 1$, $1 \leq p \leq 2$, немедленно получаем

Следствие 2. *Пусть* $0 < \alpha < 1$. *Существует нигде не линейная вещественная функция* $\varphi \in C^{1,\alpha}(\mathbb{T})$ *такая, что*

$$\text{(i)} \quad \|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O\big(|\lambda|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(\log|\lambda|)^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\big);$$

$$\text{(ii)} \quad \|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \simeq |\lambda|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{1+\alpha}} \qquad \text{при} \quad 1 < p < 1+\alpha,$$

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \simeq 1 \qquad \text{при} \quad 1+\alpha < p < 2,$$

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O((\log|\lambda|)^{1/p}) \qquad \text{при} \quad p = 1+\alpha.$$

Таким образом, при $p \neq 1$ оценка следствия 1 окончательна. Среди нетривиальных функций класса $C^{1,\alpha}$, функция φ из следствия 2 дает минимально возможный рост норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ при $1 < p < 2$, $p \neq 1+\alpha$.

Замечание 7. Неясно, существует ли при $1 < p < 2$ нетривиальная функция $\varphi \in C^{1,p-1}(\mathbb{T})$ такая, что $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(1)$.

Из теоремы 3 получаем

Следствие 3. *Пусть* $\gamma(\lambda) \geq 0$ *и* $\gamma(\lambda) \to +\infty$ *при* $\lambda \to +\infty$. *Существует нигде не линейная вещественная функция* $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$ *такая, что*

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O\big(\gamma(|\lambda|)\log|\lambda|\big), \qquad |\lambda| \to \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Правая часть оценки (i) в теореме 3 не превосходит $c|\lambda|\chi^{-1}(1/|\lambda|)\log|\lambda|$, и остается заметить, что мы можем выбрать ω так, что $|\lambda|\chi^{-1}(1/|\lambda|)$ растет сколь угодно медленно. Следствие доказано.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 3 напомним, что, согласно оценкам (4), (5), для кусочно линейных вещественных непрерывных функций φ мы имеем $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A = O(\log|\lambda|)$ и $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p} = O(1)$ при $p > 1$. Напомним также, что логарифмический рост в $A(\mathbb{T})$ является самым медленным из известных. Поэтому если мы хотим получить медленный рост нормы $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ для C^1 -гладкой нетривиальной функции φ, представляется естественным рассмотреть первообразные канторовых лестниц. Эти первообразные, будучи C^1 -гладкими, вместе с тем схожи с кусочно линейными функциями.

С целью сделать доказательство теоремы 3 более прозрачным, мы сначала построим функцию $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$, $\varphi \neq \mathrm{const}$, для которой выполнены оценки (i), (ii) теоремы 3, не требуя нигде не линейности. При этом мы получим ряд лемм, которые будут использованы далее для построении нигде не линейной функции φ с теми же свойствами.

Подбирая (при необходимости) подходящим образом числа $a, b > 0$ и заменяя $\omega(\delta)$ на $a\omega(b\delta)$ (это приводит лишь к изменению констант c, c_p в оценках (i), (ii) теоремы 3), мы можем считать, что $\omega(2\pi) = 1$ и $\omega(2\delta) < 2\omega(\delta)$ при $0 < \delta \leq 2\pi$.

Определим положительные числа ρ_j, $j = 0, 1, 2\ldots$, соотношением

$$\omega(\rho_j) = 2^{-j}. \tag{32}$$

Мы можем считать, что $\rho_0 = 2\pi$. Поскольку $\omega(2\rho_{j+1}) < 2\omega(\rho_{j+1}) = 2^{-j} = \omega(\rho_j)$, имеем $2\rho_{j+1} < \rho_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Построим симметричное совершенное множество $E \subset [0, 2\pi]$ следующим образом (см. [24, гл. V, § 3], [5, гл. XIV, § 19]). Удалим из отрезка $[0, 2\pi] = [0, \rho_0]$ концентрический открытый интервал так, чтобы два оставшихся отрезка имели одинаковую длину, равную ρ_1. Из каждого из оставшихся отрезков удалим соответствующий концентрический открытый интервал так, чтобы остались четыре отрезка длины ρ_2 и т. д. На j -ом шаге мы получаем 2^j отрезков I_ν^j, $\nu = 1, 2, \dots 2^j$, длины ρ_j. Продолжив этот процесс, получим множество оставшихся точек:

$$E = \bigcap_{j=0}^{\infty} \bigcup_{\nu=1}^{2^j} I_\nu^j.$$

Пусть ψ — функция типа лестницы Кантора, соответствующая множеству E, а именно, вещественная непрерывная неубывающая функция на $[0, 2\pi]$, которая принимает постоянные значения на интервалах, дополнительных к E в $[0, 2\pi]$ (т.е. на компонентах связности дополнения $[0, 2\pi] \setminus E$), и прирастает на величину, равную 2^{-j}, на каждом отрезке I_ν^j, $\nu = 1, 2, \dots, 2^j$, полученном на j -ом шаге построения множества E. Заметим, что из условия (32) следует, что $\psi \in \mathrm{Lip}_\omega([0, 2\pi])$. В этом легко убедиться, повторяя практически дословно рассуждения из [24, гл. V, § 3], где рассмотрен случай $\omega(\delta) = \delta^\alpha$.

Дальнейшей модификацией лестницы легко получить функцию ψ на отрезке $[0, 2\pi]$ со следующими свойствами:
1) ψ принимает постоянные значения на интервалах, дополнительных к E в $[0, 2\pi]$;
2) $\psi \in \mathrm{Lip}_\omega([0, 2\pi])$;
3) $\psi(0) = \psi(2\pi) = 0$;
4) $\int_0^{2\pi} \psi(\theta) d\theta = 0$;
5) $\max_{t \in [0, 2\pi]} |\psi(t)| = 1$;
6) $[0, 2\pi] = J_1 \cup J_2 \cup J_3$, где J_1, J_2, J_3 — попарно непересекающиеся интервалы, на каждом из которых функция ψ монотонна.

Определим теперь функцию φ на $\mathbb{T}$, полагая

$$\varphi(t) = \int_0^t \psi(\theta)\, d\theta, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Имеем $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = \varphi'(0) = \varphi'(2\pi) = 0$. Таким образом, $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$. При этом функция φ непостоянна на $\mathbb{T}$ и линейна на каждом интервале, дополнительном к E в $[0, 2\pi]$.

Покажем, что для функции φ имеет место оценка (i) теоремы 3.

Положим

$$\Theta(y) = \frac{y}{\log y} \chi^{-1}\left(\frac{(\log y)^2}{y}\right), \qquad y > 1. \tag{33}$$

Лемма 7. *Пусть g — вещественная функция на $[0, 2\pi]$, линейная на интервале $\Delta \subseteq [0, 2\pi]$. Тогда для всех $y \geq 2$ имеем*

$$\sum_{|k| \leq y} |\widehat{1_\Delta e^{ig}}(k)| \leq c \log y,$$

где $c>0$ не зависит от Δ, g и y.

Доказательство. Фиксируем $y \geq 2$. Считая, что $g(t)=at+b$ при $t\in\Delta$, где $a,\ b\in\mathbb{R}$, прямым вычислением получаем

$$|\widehat{1_\Delta e^{ig}}(k)| = \left|\frac{\sin((k-a)|\Delta|/2)}{\pi(k-a)}\right| \leq \frac{1}{|k-a|}, \qquad k\in\mathbb{Z}, \quad k\neq a. \tag{34}$$

Вместе с тем имеем

$$|\widehat{1_\Delta e^{ig}}(k)| \leq \frac{|\Delta|}{2\pi}, \qquad k\in\mathbb{Z}. \tag{35}$$

Таким образом,

$$\sum_{|k|\leq y} |\widehat{1_\Delta e^{ig}}(k)| \leq \sum_{|k|\leq y} \min\left(\frac{1}{|k-a|},\ 1\right).$$

Рассмотрим два случая: $|a|\geq 2y$ и $|a|<2y$. В первом случае при $|k|\leq y$ имеем $|k-a|\geq y$. Поэтому

$$\sum_{|k|\leq y} \min\left(\frac{1}{|k-a|},\ 1\right) \leq \sum_{|k|\leq y}\frac{1}{y} \leq 3.$$

Во втором случае при $|k|\leq y$ имеем $|k-a|\leq 3y$. Поэтому

$$\sum_{|k|\leq y} \min\left(\frac{1}{|k-a|},\ 1\right) \leq \sum_{|k-a|\leq 3y} \min\left(\frac{1}{|k-a|},\ 1\right) \leq$$

$$\leq \sum_{|k-a|<2} 1 + \sum_{2\leq |k-a|\leq 3y} \frac{1}{|k-a|} \leq 5 + \int_{1\leq|x-a|\leq 3y} \frac{dx}{|x-a|} = 5+2\log(3y).$$

Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть g — вещественная функция на $[0,2\pi]$, линейная на каждом интервале, дополнительном к E в $[0,2\pi]$. Пусть $\lambda\geq 2$. Тогда*

$$\sum_{|k|\leq 2\lambda} |\widehat{e^{ig}}(k)| \leq c\Theta(\lambda),$$

где $c>0$ не зависит от λ и g.

Доказательство. Фиксируем целое положительное j, которое мы выберем позже. Множество E покрывается 2^j отрезками равной длины ρ_j.

Обозначим их объединение через F_j. Дополнение $G_j = [0, 2\pi] \setminus F_j$ является объединением $2^j - 1$ попарно непересекающихся открытых интервалов, на каждом из которых функция g линейна. Применяя лемму 7 к каждому из этих интервалов, получаем

$$\sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{1_{G_j} e^{ig}}(k)| \leq c_1 2^j \log \lambda. \tag{36}$$

Вместе с тем, $|F_j| = 2^j \rho_j$, поэтому (пользуясь неравенством Коши и равенством Парсеваля) имеем

$$\sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{1_{F_j} e^{ig}}(k)| \leq (4\lambda + 1)^{1/2} \left(\sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{1_{F_j} e^{ig}}(k)|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq (4\lambda + 1)^{1/2} \|1_{F_j} e^{ig}\|_{L^2(\mathbb{T})} = (4\lambda + 1)^{1/2} \left(\frac{|F_j|}{2\pi} \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq c_2 \lambda^{1/2} (2^j \rho_j)^{1/2}. \tag{37}$$

Из оценок (36), (37) получаем

$$\sum_{|k| \leq 2\lambda} |\widehat{e^{ig}}(k)| \leq c_1 2^j \log \lambda + c_2 \lambda^{1/2} (2^j \rho_j)^{1/2}. \tag{38}$$

Константы $c_1, c_2 > 0$ не зависят от λ, g и j.

Заметим, что

$$\log y = o(\Theta(y)), \quad y \to +\infty, \tag{39}$$

поэтому, если λ достаточно велико, скажем $\lambda \geq \lambda_0$, то

$$\frac{\Theta(\lambda)}{\log \lambda} \geq 1.$$

Достаточно получить оценку леммы при дополнительном предположении, что $\lambda \geq \lambda_0$.

Пусть $\lambda \geq \lambda_0$. Подберем j так, чтобы минимизировать правую часть в (38). Определим целое положительное число $j(\lambda)$ из условия

$$2^{j(\lambda)-1} \leq \frac{\Theta(\lambda)}{\log \lambda} < 2^{j(\lambda)}. \tag{40}$$

Легко проверить, что

$$\frac{\log y}{\Theta(y)} = \omega\left(\frac{\log y}{y} \Theta(y) \right), \qquad y > 1.$$

Поэтому, пользуясь правым неравенством условия (40), имеем (см. (32))

$$\omega(\rho_{j(\lambda)}) = 2^{-j(\lambda)} \le \frac{\log\lambda}{\Theta(\lambda)} = \omega\left(\frac{\log\lambda}{\lambda}\Theta(\lambda)\right),$$

откуда

$$\rho_{j(\lambda)} \le \frac{\log\lambda}{\lambda}\Theta(\lambda). \tag{41}$$

В силу левого неравенства условия (40) и оценки (41) получаем, что при $j = j(\lambda)$ правая часть в (38) не превосходит $c\Theta(\lambda)$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть f — вещественная функция на $[0, 2\pi]$. Пусть $I \subseteq [0, 2\pi]$ — интервал. Предположим, что $f \in C^1(I)$, производная f' монотонна на I и $|f'(t)| \le 1$ при $t \in I$. Пусть $\lambda > 0$. Тогда при всех $k \in \mathbb{Z}$ таких, что $|k| \ge 2\lambda$, имеем*

$$|\widehat{1_I e^{i\lambda f}}(k)| \le \frac{2}{|k|}.$$

Доказательство. Согласно первой части леммы ван дер Корпута (см. [24, гл. V, лемма 4.3]), если $I \subset \mathbb{R}$ — ограниченный интервал и $g \in C^1(I)$ — вещественная функция такая, что ее производная g' монотонна и $|g'(t)| \ge \rho > 0$ при всех $t \in I$, то

$$\left|\int_I e^{ig(t)}dt\right| \le \frac{2\pi}{\rho}.$$

Фиксируем $\lambda > 0$ и $k \in \mathbb{Z}$, $|k| \ge 2\lambda$. Положим $g(t) = \lambda f(t) - kt$. Ясно, что производная $g'(t) = \lambda f'(t) - k$ монотонна на I и $|g'(t)| \ge |k| - \lambda \ge |k|/2$. Отсюда

$$|\widehat{1_I e^{i\lambda f}}(k)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_I e^{ig(t)}dt\right| \le \frac{2}{|k|}.$$

Лемма доказана.

Оценим норму $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A$. Можно считать, что $\lambda \ge 2$. Отдельно оценим суммы модулей коэффициентов Фурье $\widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k)$ по $k \in \mathbb{Z}$ таким, что $|k| \le 2\lambda$, $2\lambda < |k| \le \lambda^2$ и $\lambda^2 < |k|$.

Применяя лемму 8 к функции $g = \lambda\varphi$, получаем

$$\sum_{|k| \le 2\lambda} |\widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k)| \le c_1\Theta(\lambda). \tag{42}$$

Заметим, что $|\varphi'(t)| = |\psi(t)| \le 1$ на $[0, 2\pi]$ и отрезок $[0, 2\pi]$ является объединением трех попарно непересекающихся интервалов, на каждом из которых производная $\varphi' = \psi$ монотонна. Применяя лемму 9 к каждому из этих интервалов, видим, что

$$|\widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k)| \leq \frac{6}{|k|}, \qquad |k| > 2\lambda. \tag{43}$$

Поэтому

$$\sum_{2\lambda<|k|\leq\lambda^2} |\widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k)| \leq \sum_{2\lambda<|k|\leq\lambda^2} \frac{6}{|k|} \leq c_2 \log\lambda. \tag{44}$$

Далее заметим, что

$$\sum_{|k|>\lambda^2} |\widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k)| = \sum_{|k|>\lambda^2} \frac{1}{|k|} |\widehat{(e^{i\lambda\varphi})'}(k)| \leq$$

$$\leq \bigg(\sum_{|k|>\lambda^2} \frac{1}{k^2}\bigg)^{1/2} \|(e^{i\lambda\varphi})'\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq c_3. \tag{45}$$

Складывая неравенства (42), (44), (45) и учитывая соотношение (39), получаем оценку (i) теоремы 3.

Покажем теперь, что для той-же функции φ имеет место оценка (ii) теоремы 3. При $p > 1$ положим

$$\Theta_p(y) = \bigg(\int_1^y \Big(\chi^{-1}\Big(\frac{1}{\tau}\Big)\Big)^p \, d\tau\bigg)^{1/p}, \qquad y > 1. \tag{46}$$

Лемма 10. *Пусть $1 < p < 2$. Пусть g — вещественная функция на $[0, 2\pi]$, линейная на интервале $\Delta \subseteq [0, 2\pi]$. Тогда*

$$\|1_\Delta e^{ig}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_p |\Delta|^{1/q},$$

где $1/p + 1/q = 1$ и константа $c_p > 0$ не зависит от g и Δ.

Доказательство. Считая, что $g(t) = at + b$ при $t \in \Delta$, из оценок (34), (35), использованных в доказательстве леммы 7, получаем

$$\|1_\Delta e^{ig}\|_{A_p(\mathbb{T})}^p = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{1_\Delta e^{ig}}(k)|^p \leq$$

$$\leq \sum_{|k-a|>1/|\Delta|} \frac{1}{|k-a|^p} + \sum_{|k-a|\leq 1/|\Delta|} |\Delta|^p \leq c_p |\Delta|^{p-1}.$$

Лемма доказана.

Ниже нам будет удобно использовать аналоги пространств $A_p(\mathbb{T})$ для функций, заданных на прямой $\mathbb{R}$. Преобразование Фурье умеренных распределений на $\mathbb{R}$ мы также обозначаем символом $^\wedge$. При $1 \le p \le \infty$ пусть $A_p(\mathbb{R})$ — пространство умеренных распределений g на $\mathbb{R}$ таких, что $\widehat{g}$ принадлежит $L_p(\mathbb{R})$. Положим

$$\|g\|_{A_p(\mathbb{R})} = \|\widehat{g}\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

В силу неравенства Хаусдорфа–Юнга (см., например [72, гл. V, § 1]) при $1 \le p \le 2$ преобразование Фурье (равно как и его обратное) является ограниченным оператором из $L^p(\mathbb{R})$ в $L^q(\mathbb{R})$, $1/p+1/q = 1$. Таким образом, всякое распределение из $A_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le 2$, является функцией из $L^q(\mathbb{R})$.

Пусть $1 < p \le 2$. Напомним хорошо известную теорему Планшереля–Пойа [64, § 44] (мы приводим ее в наших обозначениях). Если f есть 2π -периодическая функция и f^* — ее сужение на $[0, 2\pi]$, продолженное нулем на $\mathbb{R}$, т.е. $f^* = f$ на $[0, 2\pi]$, $f^* = 0$ на $\mathbb{R} \setminus [0, 2\pi]$, то f принадлежит $A_p(\mathbb{T})$ тогда и только тогда, когда $f^* \in A_p(\mathbb{R})$, причем

$$c_1(p)\|f^*\|_{A_p(\mathbb{R})} \le \|f\|_{A_p(\mathbb{T})} \le c_2(p)\|f^*\|_{A_p(\mathbb{R})}.$$

Мы называем это утверждение принципом переноса.

Пусть $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ — произвольный интервал. Как известно (см., например, [69]), оператор S_Δ, задаваемый соотношением

$$S_\Delta(g) = (1_\Delta \cdot \widehat{g})^\vee, \qquad g \in L^p \cap L^2(\mathbb{R}),$$

где $^\vee$ — обратное преобразование Фурье, является ограниченным оператором в $L^p(\mathbb{R})$ при $1 < p < \infty$.

Для произвольного семейства $\{\Delta_\nu\}$ попарно непересекающихся интервалов на $\mathbb{R}$ определим квадратичную функцию Литтлвуда–Пэли:

$$S(g) = \left(\sum_\nu |S_{\Delta_\nu}(g)|^2 \right)^{1/2}.$$

Напомним неравенство Рубио де Франсиа [66]:

$$\|S(g)\|_{L^p(\mathbb{R})} \le c_p\|g\|_{L^p(\mathbb{R})}, \qquad g \in L^p(\mathbb{R}),$$

верное при $2 < p < \infty$. Константа $c_p > 0$ не зависит ни от g, ни от семейства $\{\Delta_\nu\}$. Двойственным образом при $1 < p < 2$ для любой функции $g \in L^p(\mathbb{R})$ такой, что

$$\operatorname{supp} \widehat{g} \subseteq \bigcup_\nu \Delta_\nu, \tag{47}$$

имеем

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c_p \|S(g)\|_{L^p(\mathbb{R})}. \tag{48}$$

Следующая лемма легко вытекает из неравенства Рубио де Франсиа.

Лемма 11. *Пусть* $1 < p < 2$. *Пусть* $\Delta_\nu \subset \mathbb{T}$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, — *конечное семейство попарно непересекающихся интервалов и* f_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, — *функции из* $A_p(\mathbb{T})$ *такие, что* $\operatorname{supp} f_\nu \subseteq \Delta_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$. *Тогда*

$$\Big\| \sum_\nu f_\nu \Big\|^p_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_p \sum_\nu \|f_\nu\|^p_{A_p(\mathbb{T})},$$

где $c_p > 0$ *не зависит ни от* N, *ни от семейств* $\{\Delta_\nu\}$, $\{f_\nu\}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное конечное семейство Δ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, попарно непересекающихся ограниченных интервалов на прямой $\mathbb{R}$. При $1 < p < 2$, учитывая очевидное неравенство

$$S(g) \leq \left(\sum_\nu |S_{\Delta_\nu}(g)|^p \right)^{1/p},$$

из неравенства (48) получаем, что

$$\|g\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \leq c_p^p \sum_\nu \|S_{\Delta_\nu}(g)\|^p_{L^p(\mathbb{R})} \tag{49}$$

для любой функции $g \in L^p(\mathbb{R})$ с условием (47).

Пусть f_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, — функции из $A_p(\mathbb{R})$, $1 < p < 2$, с носителями на Δ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, соответственно. Применяя оценку (49) к функции

$$g = \left(\sum_\nu f_\nu \right)^\vee$$

и учитывая, что прямое и обратное преобразования Фурье на $\mathbb{R}$ отличаются лишь знаком переменной, находим, что

$$\Big\| \sum_\nu f_\nu \Big\|^p_{A_p(\mathbb{R})} \leq c_p^p \sum_\nu \|f_\nu\|^p_{A_p(\mathbb{R})}.$$

(Так как функции f_ν принадлежат $L^q(\mathbb{R})$ и интервалы Δ_ν ограничены, то $f_\nu \in L^2(\mathbb{R})$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$. Поэтому $g \in L^2(\mathbb{R})$.)

Остается воспользоваться принципом переноса. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть $1 < p < 2$ и g — вещественная функция на $[0, 2\pi]$, линейная на каждом интервале, дополнительном к E в $[0, 2\pi]$. Пусть $\lambda \geq 2$. Тогда*

$$\sum_{|k|\leq 2\lambda} |\widehat{e^{ig}}(k)|^p \leq c_p \, (\Theta_p(\lambda))^p,$$

где $c_p > 0$ не зависит от λ и g.

Доказательство. При произвольном $j = 1, 2, \ldots$ множество E покрывается 2^j отрезками равной длины ρ_j. Их объединение F_j имеет меру $|F_j| = 2^j \rho_j$. Дополнение $G_j = [0, 2\pi] \setminus F_j$ является объединением $2^j - 1$ попарно непересекающихся открытых интервалов, которые обозначим через Δ_ν^j, $\nu = 1, 2, \ldots 2^j - 1$. Функция g линейна на каждом интервале Δ_ν^j, поэтому, пользуясь леммами 11 и 10, получаем, что

$$\|1_{G_j} e^{ig}\|^p_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_p \sum_{\nu=1}^{2^j-1} \|1_{\Delta_\nu^j} e^{ig}\|^p_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_{p,1} \sum_{\nu=1}^{2^j-1} |\Delta_\nu^j|^{p-1}. \tag{50}$$

Семейство интервалов Δ_ν^j, $\nu = 1, 2, \ldots, 2^j - 1$, состоит из одного интервала длины $\rho_0 - 2\rho_1 < \rho_0$, двух интервалов длины $\rho_1 - 2\rho_2 < \rho_1$, и т.д., из 2^m интервалов длины $\rho_m - 2\rho_{m+1} < \rho_m$, где $m = 0, 1, \ldots j - 1$. Поэтому получаем (см. (50))

$$\sum_{|k|\leq 2\lambda} |\widehat{1_{G_j} e^{ig}}(k)|^p \leq \|1_{G_j} e^{ig}\|^p_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_{p,1} \sum_{m=0}^{j-1} 2^m \rho_m^{p-1}. \tag{51}$$

Вместе с тем, пользуясь неравенством Гельдера с $p^* = 2/p$ и $1/p^* + 1/q^* = 1$, имеем

$$\sum_{|k|\leq 2\lambda} |\widehat{1_{F_j} e^{ig}}(k)|^p \leq \Bigg(\sum_{|k|\leq 2\lambda} |\widehat{1_{F_j} e^{ig}}(k)|^{pp^*}\Bigg)^{1/p^*} \Bigg(\sum_{|k|\leq 2\lambda} 1\Bigg)^{1/q^*} \leq$$

$$\leq \Bigg(\sum_{|k|\leq 2\lambda} |\widehat{1_{F_j} e^{ig}}(k)|^2\Bigg)^{p/2} (4\lambda + 1)^{1-\frac{p}{2}} \leq \|1_{F_j} e^{ig}\|^p_{L^2(\mathbb{T})} (4\lambda + 1)^{1-\frac{p}{2}} =$$

$$= \left(\frac{|F_j|}{2\pi}\right)^{p/2} (4\lambda + 1)^{1-\frac{p}{2}} \leq c_{p,2} (2^j \rho_j)^{p/2} \lambda^{1-\frac{p}{2}}. \tag{52}$$

Из оценок (51), (52) получаем, что

$$\Bigg(\sum_{|k|\leq 2\lambda} |\widehat{e^{ig}}(k)|^p\Bigg)^{1/p} \leq c_{p,3} \Bigg(\sum_{m=0}^{j-1} 2^m \rho_m^{p-1}\Bigg)^{1/p} + c_{p,4} (2^j \rho_j)^{1/2} \lambda^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \tag{53}$$

где $c_{p,3}, c_{p,4} > 0$ не зависят от λ, g и j.

Легко выбрать j так, чтобы минимизировать выражение в правой части соотношения (53) в случае $\omega(\delta) = \delta^\alpha$. Общий случай требует некоторых вычислений.

Положим
$$a_m = \frac{1}{\chi(\rho_m)}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots.$$
Последовательность $\{a_m\}$ неограничена, строго возрастает и $a_0 = 1/(2\pi)$.

Ясно, что достаточно получить оценку леммы при дополнительном условии $\lambda \geq a_1$.

Выберем $j(\lambda) = 2, 3, \ldots$ так, что
$$a_{j(\lambda)-1} \leq \lambda < a_{j(\lambda)}. \tag{54}$$

Оценим первый член в правой части соотношения (53). Заметим, что при $m = 1, 2, \ldots$
$$\frac{a_m}{a_{m-1}} = \frac{\chi(\rho_{m-1})}{\chi(\rho_m)} = \frac{\rho_{m-1}\omega(\rho_{m-1})}{\rho_m \omega(\rho_m)} = \frac{\rho_{m-1}2^{-(m-1)}}{\rho_m 2^{-m}} = \frac{2\rho_{m-1}}{\rho_m} \geq 2,$$
откуда
$$a_m \leq 2(a_m - a_{m-1}), \qquad m = 1, 2, \ldots.$$
Поэтому
$$\sum_{m=1}^{j(\lambda)-1} 2^m \rho_m^{p-1} = \sum_{m=1}^{j(\lambda)-1} \frac{\rho_m^{p-1}}{\omega(\rho_m)} = \sum_{m=1}^{j(\lambda)-1} \frac{\rho_m^p}{\chi(\rho_m)} =$$
$$= \sum_{m=1}^{j(\lambda)-1} a_m \left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{a_m}\right)\right)^p \leq 2 \sum_{m=1}^{j(\lambda)-1} (a_m - a_{m-1}) \left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{a_m}\right)\right)^p \leq$$
$$\leq 2 \sum_{m=1}^{j(\lambda)-1} \int_{a_{m-1}}^{a_m} \left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)^p d\tau = 2 \int_{a_0}^{a_{j(\lambda)-1}} \left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)^p d\tau \leq$$
$$\leq 2 \int_{a_0}^{\lambda} \left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)^p d\tau = c_{p,5} + 2(\Theta_p(\lambda))^p. \tag{55}$$

Оценим второй член в правой части соотношения (53). Положим $t = \chi^{-1}(1/\lambda)$. Тогда (см. (54))
$$\rho_{j(\lambda)} < t \leq \rho_{j(\lambda)-1}.$$
Отсюда, пользуясь правым неравенством, получаем, что $\omega(t) \leq 2^{-(j(\lambda)-1)}$ и, следовательно,
$$2^{j(\lambda)} \leq \frac{2}{\omega(t)} = \frac{2t}{\chi(t)} = 2\chi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\lambda.$$

Вместе с тем левое неравенство дает

$$\rho_{j(\lambda)} < t = \chi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Поэтому

$$(2^{j(\lambda)}\rho_{j(\lambda)})^{p/2}\lambda^{1-\frac{p}{2}} \le 2^{p/2}\lambda\left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^p.$$

Поскольку $\lambda \ge 2$ и функция χ^{-1} возрастающая, получаем

$$\lambda\left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^p \le 2(\lambda-1)\left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^p \le 2\int_1^\lambda \left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)^p d\tau = 2(\Theta_p(\lambda))^p.$$

Таким образом,

$$(2^{j(\lambda)}\rho_{j(\lambda)})^{p/2}\lambda^{1-\frac{p}{2}} \le c_{p,6}(\Theta_p(\lambda))^p.$$

Пользуясь этим неравенством и неравенством (55), видим, что при $j = j(\lambda)$ правая часть в (53) не превосходит $c_p\Theta_p(\lambda)$. Лемма доказана.

Оценим нормы $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p},\ p>1$. Применяя лемму 12 к функции $g=\lambda\varphi$, имеем (можно считать, что $\lambda \ge 2$)

$$\sum_{|k|\le 2\lambda} |\widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k)|^p \le c_{p,1}(\Theta_p(\lambda))^p.$$

Вместе с тем в силу оценки (43)

$$\sum_{|k|>2\lambda} |\widehat{e^{i\lambda\varphi}}(k)|^p \le \sum_{|k|>2\lambda}\left(\frac{6}{|k|}\right)^p \le 6^p\sum_{|k|\ge 1}\frac{1}{|k|^p} = c_{p,2}.$$

Таким образом,

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|^p_{A_p(\mathbb{T})} \le c_{p,1}(\Theta_p(\lambda))^p + c_{p,2},$$

и мы получаем (ii).

Доказательство теоремы 3. При $m=0,1,2,\dots$ пусть E_m — порция множества E, сосредоточенная на отрезке $[0,\rho_m]$, т.е. $E_m = E\cap[0,\rho_m]$. Разумеется $E_0 = E$.

Пусть снова ψ — функция типа лестницы Кантора, соответствующая множеству E. При каждом $m=0,1,2,\dots$ сужение функции ψ на $[0,\rho_m]$ принадлежит $\mathrm{Lip}_\omega([0,\rho_m])$. Таким образом, легко видеть, что существуют функции $\psi_m,\ m=0,1,2,\dots$, на $[0,2\pi]$ (модифицированные лестницы) со следующими свойствами:

1) ψ_m принимает постоянные значения на интервалах, дополнительных к E_m в $[0, \rho_m]$;
2) $\psi_m \in \mathrm{Lip}_\omega([0, \rho_m])$;
3) $\psi_m(0) = \psi_m(\rho_m) = 0$, и $\psi_m = 0$ на $[0, 2\pi] \setminus [0, \rho_m]$;
4) $\int_0^{\rho_m} \psi_m(\theta) d\theta = 0$;
5) $\max_{t\in[0,\rho_m]} |\psi_m(t)| = 1$;
6) $[0, \rho_m]$ является объединением трех попарно не пересекающихся интервалов, на каждом из которых функция ψ_m монотонна.

При $m = 0, 1, 2, \dots$ положим

$$\varphi_m(t) = \int_0^t \psi_m(\theta)\ d\theta, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Ясно, что $\varphi_m(0) = \varphi_m(\rho_m) = \varphi'_m(0) = \varphi'_m(\rho_m) = 0$, $\varphi_m = 0$ на $[0, 2\pi]\setminus[0, \rho_m]$ и $\varphi'_m \in \mathrm{Lip}_\omega[0, \rho_m]$, $m = 0, 1, 2, \dots$.

Пусть $I \subseteq [0, 2\pi]$ — произвольный отрезок. Пусть $E_m(I)$ — аффинная копия множества E_m, сосредоточенная на I, а именно, $E_m(I) = l^{-1}_{m,I}(E_m)$, где $l_{m,I}$ — аффинное отображение, при котором I отображается на $[0, \rho_m]$. Пусть φ^I_m — аффинная копия функции φ_m, сосредоточенная на I, а именно, такая функция на $[0, 2\pi]$, что $\varphi^I_m = \varphi_m \circ l_{m,I}$ на I и $\varphi^I_m = 0$ на $[0, 2\pi] \setminus I$.

Определим по индукции последовательность отрезков $I_m \subseteq [0, 2\pi]$ с условием

$$|I_m| \le 2^{-m}\rho_m, \qquad m = 0, 1, 2, \dots, \tag{56}$$

и последовательность множеств $B_m \subset I_m$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Пусть $I_0 = [0, 2\pi]$ и $B_0 = E_0$. Если $I_0, I_1, I_2, \dots, I_m$ и $B_0, B_1, B_2, \dots, B_m$ уже определены, то определим I_{m+1} и B_{m+1} следующим образом. Рассмотрим объединение $\bigcup_{s=1}^m B_s$ и выберем интервал максимальной длины, дополнительный к этому объединению в $[0, 2\pi]$ (если таких интервалов несколько, то берем один из них). Обозначим этот интервал через J. Пусть I_{m+1} — отрезок, содержащийся в J, концентрический с J и имеющий длину $|I_{m+1}| \le 2^{-(m+1)}\rho_{m+1}$. Положим $B_{m+1} = E_{m+1}(I_{m+1})$.

Определим теперь функции f_m, $m = 0, 1, 2, \dots$, полагая $f_m = \varphi^{I_m}_m$.

Продолжая 2π -периодическим образом функции φ_m, f_m, $m = 0, 1, 2, \dots$, с отрезка $[0, 2\pi]$ на $\mathbb{R}$, всюду далее мы будем считать эти функции функциями на $\mathbb{T}$. Все эти функции принадлежат $C^{1,\omega}(\mathbb{T})$. Каждая функция f_m равна нулю на $[0, 2\pi] \setminus I_m$ и линейна на интервалах, дополнительных к B_m в I_m. Имеем также

$$|\varphi'_m(t)| \le 1, \qquad t \in \mathbb{T}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

и поскольку l_{m,I_m} — линейная функция на $[0, 2\pi]$ с угловым коэффициентом, равным (с точностью до знака) $\rho_m/|I_m|$, то

$$|f_m'(t)| \leq \frac{\rho_m}{|I_m|}, \qquad t \in \mathbb{T}, \quad m = 0, 1, 2, \dots. \tag{57}$$

Положим

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m f_m,$$

где числа $\varepsilon_m > 0$ убывают к нулю так быстро, что $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$.

Ясно, что функция φ нигде не линейна.

Потребуем еще, чтобы последовательность $\{\varepsilon_m\}$ удовлетворяла условию

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \frac{\rho_m}{|I_m|} = 1 \tag{58}$$

и убывала так быстро, что

$$\delta_{j(\lambda)} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \qquad \lambda \to +\infty, \tag{59}$$

где

$$\delta_j = \sum_{m=j+1}^{\infty} \varepsilon_m \frac{\rho_m}{|I_m|} \tag{60}$$

и $j(\lambda)$ — целое положительное число, определенное при каждом достаточно большом λ условием (40) (ясно, что $j(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to +\infty$, см. (39)).

Оценим нормы $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A$. Можем считать, что $\lambda \geq 2$.

Положим

$$S_j = \sum_{m=0}^{j} \varepsilon_m f_m, \qquad j = 0, 1, 2, \dots.$$

При любом j множество E_m, $m \leq j$, можно покрыть 2^{j-m} отрезками длины ρ_j. Поскольку B_m получено из E_m сжатием (см. (56)), видим, что множество B_m, $m \leq j$, можно покрыть 2^{j-m} отрезками, длины которых не превосходят ρ_j. Следовательно, множество

$$\bigcup_{m=0}^{j} B_m \tag{61}$$

можно покрыть

$$2^j + 2^{j-1} + 2^{j-2} + \ldots + 2^1 + 1 \leq 2^{j+1}$$

отрезками длины ρ_j. Обозначим объединение этих отрезков через F_j. Имеем

$$|F_j| \le 2^{j+1}\rho_j.$$

Положим $G_j = [0, 2\pi] \setminus F_j$. Ясно, что G_j является объединением не более чем $2^{j+1} + 1$ попарно непересекающихся интервалов. Ясно, что функция S_j линейна на каждом интервале, дополнительном к объединению (61) в $[0, 2\pi]$. Следовательно, функция λS_j линейна на интервалах, образующих G_j и, применяя лемму 7 к каждому из этих интервалов, имеем

$$\sum_{|k|\le 2\lambda} |\widehat{1_{G_j} e^{\lambda S_j}}(k)| \le c_1 2^j \log \lambda. \tag{62}$$

Вместе с тем,

$$\sum_{|k|\le 2\lambda} |\widehat{1_{F_j} e^{\lambda S_j}}(k)| \le (4\lambda+1)^{1/2} \Bigg(\sum_{|k|\le 2\lambda} |\widehat{1_{F_j} e^{\lambda S_j}}(k)|^2 \Bigg)^{1/2} \le$$

$$\le (4\lambda+1)^{1/2} \|1_{F_j} e^{\lambda S_j}\|_{L^2(\mathbb{T})} = (4\lambda+1)^{1/2} \left(\frac{|F_j|}{2\pi} \right)^{1/2} \le$$

$$\le c_2 \lambda^{1/2} (2^j \rho_j)^{1/2}. \tag{63}$$

Сложив оценки (62) и (63), получаем

$$\sum_{|k|\le 2\lambda} |\widehat{e^{\lambda S_j}}(k)| \le c_1 2^j \log\lambda + c_2 \lambda^{1/2} (2^j \rho_j)^{1/2}, \tag{64}$$

где $c_1, c_2 > 0$ не зависят от λ и j.

Заметим, что (см. (57), (58))

$$|S_j'(t)| \le \sum_{m=0}^{j} \varepsilon_m \frac{\rho_m}{|I_m|} \le 1, \qquad t \in \mathbb{T}. \tag{65}$$

Заметим также, что при каждом $j = 0, 1, 2, \dots$ отрезок $[0, 2\pi]$ является объединением трех попарно непересекающихся интервалов, на каждом из которых производная f_j' функции f_j монотонна. При этом f_j' сосредоточена на некотором интервале, на котором производная f_m' всякой функции f_m, $m < j$, постоянна. Поэтому при каждом $j = 0, 1, 2, \dots$ отрезок $[0, 2\pi]$ является объединением не более чем $4j + 3$ попарно непересекающихся интервалов, на каждом из которых функция S_j имеет монотонную производную (это легко проверить индукцией по j).

Учитывая оценку (65) и применяя лемму 9 к каждому из интервалов, на которых S'_j монотонна, получаем при $|k| > 2\lambda$

$$|\widehat{e^{i\lambda S_j}}(k)| \leq \frac{8j+6}{|k|},$$

откуда

$$\sum_{2\lambda<|k|\leq\lambda^2} |\widehat{e^{\lambda S_j}}(k)| \leq c_3\,(8j+6)\log\lambda. \tag{66}$$

Далее, поскольку $|S'_j(t)| \leq 1$ при $t \in \mathbb{T}$ (см. (65)), имеем

$$\sum_{|k|>\lambda^2} |\widehat{e^{\lambda S_j}}(k)| = \sum_{|k|>\lambda^2} \frac{1}{|k|} |\widehat{(e^{\lambda S_j})'}(k)| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{|k|>\lambda^2} \frac{1}{|k|^2} \right)^{1/2} \|(e^{\lambda S_j})'\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq c_4. \tag{67}$$

Из (64), (66), (67) получаем

$$\|e^{i\lambda S_j}\|_{A(\mathbb{T})} \leq c_5 2^j \log\lambda + c_6 \lambda^{1/2}(2^j\rho_j)^{1/2}, \tag{68}$$

где $c_5, c_6 > 0$ не зависят от λ, j.

Положим теперь

$$r_j = \sum_{m=j+1}^{\infty} \varepsilon_m f_m.$$

Очевидно, что для любой функции $g \in C^1(\mathbb{T})$ имеем

$$\|g\|_{A(\mathbb{T})} \leq c\|g\|_{C^1(\mathbb{T})}, \tag{69}$$

где

$$\|g\|_{C^1(\mathbb{T})} = \max_{t\in\mathbb{T}} |g(t)| + \max_{t\in\mathbb{T}} |g'(t)|,$$

и $c > 0$ не зависит от g. Так как

$$|r'_j(t)| \leq \delta_j, \qquad t \in \mathbb{T}$$

(см. (57), (60)), то

$$\|e^{i\lambda r_j}\|_{A(\mathbb{T})} \leq c\|e^{i\lambda r_j}\|_{C^1(\mathbb{T})} \leq c(1+\lambda\delta_j). \tag{70}$$

Заметим теперь, что выражение в правой части в (68) имеет тот же вид, что и в (38). Минимизируем его так же, как при доказательстве леммы 8, а именно, считая, что λ достаточно велико, выберем $j = j(\lambda)$ из условия

(40). Мы видим, что при этом j правая часть в (68) не превосходит $c_7\Theta(\lambda)$. Таким образом,

$$\|e^{i\lambda S_{j(\lambda)}}\|_{A(\mathbb{T})} \leq c_7\Theta(\lambda). \tag{71}$$

Вместе с тем, из неравенства (70), учитывая условие (59), получаем

$$\|e^{i\lambda r_{j(\lambda)}}\|_{A(\mathbb{T})} \leq c_8. \tag{72}$$

Поскольку $\varphi = S_j + r_j$ при любом j, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|e^{i\lambda S_j}\|_{A(\mathbb{T})}\|e^{i\lambda r_j}\|_{A(\mathbb{T})}.$$

Таким образом, из (71), (72) получаем оценку (i) теоремы 3.

Оценим нормы $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$, $p > 1$. Нам потребуются две простые леммы.

Лемма 13. *Пусть $1 < p < 2$. Пусть I, J — два интервала, содержащиеся в $[0, 2\pi]$, и U, V — две функции из $A_p(\mathbb{T})$, равные нулю на $[0, 2\pi] \setminus I$ и $[0, 2\pi] \setminus J$ соответственно. Предположим, что $U(t) = V \circ l(t)$ при $t \in I$, где l — аффинное отображение интервала I на J. Тогда $\|U\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_p|a|^{-1/q}\|V\|_{A_p(\mathbb{T})}$, где a — угловой коэффициент отображения l, $|a| = |J|/|I|$, и $1/p + 1/q = 1$. Постоянная $c_p > 0$ не зависит от U, V, l, I, J.*

Доказательство. Если $l(t) = at + b$, $t \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, то для произвольной функции $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap A_p(\mathbb{R})$ прямое вычисление дает

$$|\widehat{g \circ l}(u)| = \left|\frac{1}{a}\widehat{g}\left(\frac{u}{a}\right)\right|,$$

и, следовательно,

$$\|g \circ l\|_{A_p(\mathbb{R})} = \frac{1}{|a|^{1/q}}\|g\|_{A_p(\mathbb{R})}.$$

Остается воспользоваться принципом переноса. Лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть $1 < p < 2$ и l — вещественная 2π -периодическая функция, линейная на $(0, 2\pi)$. Тогда для любой функции $f \in A_p(\mathbb{T})$ имеем $e^{il}f \in A_p(\mathbb{T})$ и $\|e^{il}f\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_p\|f\|_{A_p(\mathbb{T})}$, где $c_p > 0$ не зависит от f и l.*

Доказательство. Для произвольной линейной функции $l(t) = at + b$ на $\mathbb{R}$ и для произвольной функции $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap A_p(\mathbb{R})$ имеем

$$|\widehat{e^{il}g}(u)| = |\widehat{g}(u - a)|, \qquad u \in \mathbb{R},$$

откуда $e^{il}g \in A_p(\mathbb{R})$ и $\|e^{il}g\|_{A_p(\mathbb{R})} = \|g\|_{A_p(\mathbb{R})}$. Остается воспользоваться принципом переноса. Лемма доказана.

Пусть $\lambda \geq 2$. При каждом $m = 0,1,2\ldots$ функция φ_m линейна на интервалах, дополнительных к E_m в $[0,2\pi]$ и, следовательно (так как $E_m \subseteq E_0 = E$), на интервалах, дополнительных к E в $[0,2\pi]$. Пользуясь леммой 12, получаем

$$\sum_{|k|\leq 2\lambda} |\widehat{e^{i\lambda\varphi_m}}(k)|^p \leq c_{p,1}(\Theta_p(\lambda))^p, \qquad \lambda \geq 2, \quad m = 0,1,2\ldots. \tag{73}$$

При любом $m = 0,1,2,\ldots$ имеем $|\varphi_m'(t)| \leq 1$, $t \in [0,2\pi]$, и отрезок $[0,2\pi]$ разбивается на три интервала, на каждом из которых производная φ_m' монотонна. Пользуясь леммой 9, получаем

$$|\widehat{e^{i\lambda\varphi_m}}(k)| \leq \frac{6}{|k|}$$

при $|k| > 2\lambda$. Поэтому

$$\sum_{|k|>2\lambda} |\widehat{e^{i\lambda\varphi_m}}(k)|^p \leq c_{p,2}, \qquad \lambda \geq 2, \quad m = 0,1,2\ldots.$$

Вместе с (73) это дает

$$\|e^{i\lambda\varphi_m}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_{p,3}\Theta_p(\lambda), \qquad \lambda \geq 2, \quad m = 0,1,2\ldots. \tag{74}$$

Пусть теперь $0 \leq \lambda < 2$. Получаем, что (см. (69))

$$\|e^{i\lambda\varphi_m}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq \|e^{i\lambda\varphi_m}\|_{A(\mathbb{T})} \leq c\|e^{i\lambda\varphi_m}\|_{C^1(\mathbb{T})} \leq$$

$$\leq c(1+\lambda) \leq 3c, \qquad 0 \leq \lambda < 2, \quad m = 0,1,2\ldots. \tag{75}$$

Всюду далее мы считаем, что $\lambda \geq 2$. Ясно, что $0 < \varepsilon_m \leq 1$ при всех m (см. (56), (58)). Применяя оценки (74), (75) в случаях $\lambda\varepsilon_m \geq 2$ и $\lambda\varepsilon_m < 2$ соответственно, имеем

$$\|e^{i\lambda\varepsilon_m\varphi_m}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_{p,4}\Theta_p(\lambda), \qquad \lambda \geq 2, \quad m = 0,1,2,\ldots, \tag{76}$$

откуда

$$\|e^{i\lambda\varepsilon_m\varphi_m} - 1\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_{p,5}\Theta_p(\lambda), \qquad \lambda \geq 2, \quad m = 0,1,2,\ldots. \tag{77}$$

При фиксированном m применим лемму 13 к отрезкам $I = I_m$, $J = [0,\rho_m]$ и функциям $U = e^{i\lambda\varepsilon_m f_m} - 1$, $V = e^{i\lambda\varepsilon_m\varphi_m} - 1$. Для соответствующего углового коэффициента a мы имеем $|a| = \rho_m/|I_m| \geq 2^m$ (см. (56)), поэтому из (77) получаем

$$\|e^{i\lambda\varepsilon_m f_m} - 1\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_{p,6} 2^{-m/q} \|e^{i\lambda\varepsilon_m\varphi_m} - 1\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq$$

$$\leq c_{p,7} 2^{-m/q} \Theta_p(\lambda), \qquad \lambda \geq 2, \quad m = 0, 1, 2, \ldots . \tag{78}$$

Заметим теперь, что при $j = 0, 1, 2, \ldots$

$$e^{i\lambda S_{j+1}} - e^{i\lambda S_j} = 1_{I_{j+1}}(e^{i\lambda S_{j+1}} - e^{i\lambda S_j}) = 1_{I_{j+1}} e^{i\lambda S_j}(e^{i\lambda\varepsilon_{j+1} f_{j+1}} - 1)$$

и функция S_j линейна на I_{j+1}. Поэтому в силу леммы 14 имеем

$$\|e^{i\lambda S_{j+1}} - e^{i\lambda S_j}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_{p,8} \|1_{I_{j+1}}(e^{i\lambda\varepsilon_{j+1} f_{j+1}} - 1)\|_{A_p(\mathbb{T})},$$

и так как $f_{j+1} = 0$ на $[0, 2\pi] \setminus I_{j+1}$, то

$$\|e^{i\lambda S_{j+1}} - e^{i\lambda S_j}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_{p,8} \|(e^{i\lambda\varepsilon_{j+1} f_{j+1}} - 1)\|_{A_p(\mathbb{T})}.$$

Следовательно (см. (78)),

$$\|e^{i\lambda S_{j+1}} - e^{i\lambda S_j}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_{p,9} 2^{-j/q} \Theta_p(\lambda), \qquad \lambda \geq 2, \quad j = 0, 1, 2, \ldots .$$

Кроме того, поскольку $S_0 = \varepsilon_0 f_0 = \varepsilon_0 \varphi_0$, имеем (см. (76))

$$\|e^{i\lambda S_0}\|_{A_p(\mathbb{T})} = \|e^{i\lambda\varepsilon_0\varphi_0}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_{p,4} \Theta_p(\lambda), \qquad \lambda \geq 2.$$

Таким образом,

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq \|e^{i\lambda S_0}\|_{A_p(\mathbb{T})} + \sum_{j=0}^{\infty} \|e^{i\lambda S_{j+1}} - e^{i\lambda S_j}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_p \Theta_p(\lambda).$$

Теорема доказана.

Замечание 8. Производная φ' функции φ, построенной в теореме 3, имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{T}$. Это ясно, поскольку выполняются соотношения (57), (58) и при каждом m отрезок $[0, 2\pi]$ разбивается на три интервала, на каждом из которых производная f'_m монотонна.

§ 4. Операторы суперпозиции в пространствах A_p

В этом параграфе мы снова рассмотрим отображения окружности $\mathbb{T}$ в себя, т.е. функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

$$\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) \pmod{2\pi}.$$

Если такая функция непрерывна или принадлежит классу $C^1(\mathbb{R})$, или классу $C^{1,\omega}(\mathbb{R})$, то φ — это непрерывное или C^1 -гладкое, или $C^{1,\omega}$ -гладкое отображение окружности в себя соответственно. Если такая функция φ непрерывна и по $\operatorname{mod} 2\pi$ взаимно однозначна, то φ — гомеоморфизм окружности. Если гомеоморфизм окружности φ и обратный к нему φ^{-1} являются C^1 -гладкими, то φ — диффеоморфизм окружности. Если диффеоморфизм φ является $C^{1,\omega}$ -гладким, то φ называется $C^{1,\omega}$ -диффеоморфизмом (как легко убедиться, в этом случае обратное отображение φ^{-1} также является $C^{1,\omega}$ -гладким).

Приведенные далее теоремы 4 и 5 немедленно вытекают из теорем 2 и 3 соответственно и являются их версиями для отображений окружности в себя и целых частот.

Теорема 4. *Пусть $1 \leq p < 2$. Пусть φ — нелинейное $C^{1,\omega}$ -гладкое отображение окружности в себя. Тогда*

$$\|e^{in\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \geq c_p|n|^{1/p}\chi^{-1}\left(\frac{1}{|n|}\right), \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0.$$

Доказательство. Имеем $\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) + 2\pi k$. Ясно, что $k \in \mathbb{Z}$ не зависит от t. Полагая

$$\varphi_0(t) = \varphi(t) - kt,$$

получаем, что $\varphi_0(t + 2\pi) = \varphi_0(t)$ и, таким образом, φ_0 — вещественная функция, принадлежащая $C^{1,\omega}(\mathbb{T})$. Функция φ_0 непостоянна. Остается заметить, что $\|e^{in\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = \|e^{in\varphi_0}\|_{A_p(\mathbb{T})}$, и применить теорему 2 к φ_0. Теорема доказана.

Положим $\Theta_1 = \Theta$, где Θ — функция, определенная в (33). При $p > 1$ функции Θ_p были определены в (46).

Теорема 5. *Пусть $\omega(2\delta) < 2\omega(\delta)$ при всех достаточно малых $\delta > 0$. Существует нигде не линейный $C^{1,\omega}$ -диффеоморфизм h окружности $\mathbb{T}$ такой, что*

$$\|e^{inh}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(\Theta_p(|n|)), \qquad |n| \to \infty, \quad n \in \mathbb{Z},$$

при всех p, $1 \leq p < 2$.

Доказательство. Взяв функцию φ из теоремы 3 и положив

$$h(t) = t + \varepsilon\varphi(t),$$

где $0 < \varepsilon \le 1$ достаточно мало, получаем нигде не линейный диффеоморфизм h окружности $\mathbb{T}$ класса $C^{1,\omega}$. Остается заметить, что

$$\|e^{inh}\|_{A_p(\mathbb{T})} = \|e^{in\varepsilon\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(\Theta_p(|n|\varepsilon)) = O(\Theta_p(|n|)).$$

Теорема доказана.

Соответствующие аналоги следствий 1–3 очевидны.

Ясно также, что верна оценка $\|e^{in\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(|n|^{1/p-1/2})$ для любого абсолютно непрерывного отображения φ с производной из $L^2(\mathbb{T})$ (см. (2)). Случай $C^{1,1}$ -гладких отображений окружности в себя исчерпывается соотношением $\|e^{in\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \simeq |n|^{1/p-1/2}$, верным для любого нелинейного $C^{1,1}$ -гладкого отображения $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ (см. замечание 6).

Напомним, что из теоремы Берлинга–Хелсона вытекает, что лишь тривиальные (линейные) замены переменной действуют в $A(\mathbb{T})$. Вместе с тем известно [46], что существуют нетривиальные замены, действующие в $A_p(\mathbb{T})$ при $1 < p < 2$ (всякое кусочно линейное отображение без интервалов постоянства обладает этим свойством). Укажем некоторые естественные и очевидные приложения теорем 4 и 5.

Пусть $1 < p < 2$ и $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ — такое непрерывное отображение, что если $f \in A(\mathbb{T})$, то $f \circ \varphi \in A_p(\mathbb{T})$. Скажем в этом случае, что φ действует из A в A_p. Стандартные соображения (теорема о замкнутом графике) показывают, что это имеет место тогда и только тогда, когда оператор суперпозиции $f \to f \circ \varphi$ является ограниченным оператором из $A(\mathbb{T})$ в $A_p(\mathbb{T})$, что, в свою очередь, равносильно условию $\|e^{in\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(1),\ n \in \mathbb{Z}$.

Пользуясь теоремой 4, получаем, что если $\omega(\delta) = o(\delta^{p-1})$, то любое $C^{1,\omega}$ -гладкое отображение φ окружности в себя, действующее из A в A_p, является линейным. Вместе с тем из теоремы 5 следует, что если $p > 1$, то при любом $\varepsilon > 0$ существует нигде не линейный $C^{1,p-1-\varepsilon}$ -диффеоморфизм h окружности $\mathbb{T}$ такой, что $\|e^{inh}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(1)$, и, следовательно, h действует из A в A_p. Можно ли здесь взять $\varepsilon = 0$, нам неизвестно (см. замечание 7).

Подобным же образом легко видеть, что нетривиальные $C^{1,\omega}$ -гладкие замены переменной, действующие из $A(\mathbb{T})$ в $\bigcap_{p>1} A_p(\mathbb{T})$, существуют тогда и только тогда, когда $\omega(\delta)$ убывает к нулю медленнее любой степени, т.е., когда

$$\lim_{\delta \to +0} \frac{\omega(\delta)}{\delta^{\varepsilon}} = \infty \quad \text{при всех } \varepsilon > 0. \tag{79}$$

Необходимость этого условия следует из теоремы 4. Достаточность — из теоремы 5 (условие (79) влечет $\Theta_p(y) = O(1),\ y \to \infty$, при всех

$p,\ 1 < p < 2$) [7]. Более того мы видим, что если условие (79) выполнено, то существует нигде не линейный $C^{1,\omega}$ -диффеоморфизм окружности h такой, что соответствующий оператор суперпозиции является ограниченным оператором из $A(\mathbb{T})$ в $A_p(\mathbb{T})$ при всех $p > 1$.

По поводу этого диффеоморфизма отметим, что порождаемый им оператор суперпозиции $f \to f \circ h$ является ограниченным оператором из $A_p(\mathbb{T})$ в $A_{p+\varepsilon}(\mathbb{T})$ при любом $p,\ 1 \le p < 2$, и любом $\varepsilon > 0$. В этом легко убедиться интерполируя l^p между l^1 и l^2 с учетом того, что указанный оператор суперпозиции является ограниченным оператором в $A_2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T})$ (всякий гомеоморфизм, обратный к которому удовлетворяет условию Липшица с показателем 1, порождает оператор суперпозиции, ограниченный в $L^2(\mathbb{T})$). Вместе с тем отметим, что, как было показано нами ранее совместно с А. М. Олевским в [46], всякое C^1 -гладкое отображение окружности в себя, порождающее ограниченный оператор суперпозиции в $A_p,\ p \ne 2$, является линейным.

§ 5. Многомерный случай

Здесь мы получим многомерные аналоги результатов, полученных в §§ 3, 4.

Для произвольной интегрируемой функции f на m -мерном торе $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m/2\pi\mathbb{Z}^m,\ m \ge 1$ (где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел) рассмотрим ее коэффициенты Фурье

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} f(t) e^{-i(k,t)} dt, \qquad k \in \mathbb{Z}^m.$$

Пусть $A_1(\mathbb{T}^m)$ — пространство непрерывных функций f на $\mathbb{T}^m$ таких, что последовательность коэффициентов Фурье $\widehat{f} = \{\widehat{f}(k),\ k \in \mathbb{Z}^m\}$ принадлежит $l^1(\mathbb{Z}^m)$. При $1 < p \le 2$ пусть $A_p(\mathbb{T}^m)$ — пространство интегрируемых функций f на $\mathbb{T}^m$ таких, что $\widehat{f} \in l^p(\mathbb{Z}^m)$. Снабженные естественными нормами

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} = \|\widehat{f}\|_{l^p(\mathbb{Z}^m)} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |\widehat{f}(k)|^p \right)^{1/p}$$

[7]Следует лишь заметить, что если указанное условие выполнено, то существует неубывающая непрерывная функция $\omega^*(\delta)$ на $[0, +\infty)$, стремящаяся к 0 медленнее любой степени, такая, что $\omega^*(2\delta) < 2\omega^*(\delta)$ при всех $\delta > 0$ и $\omega^*(\delta) = O(\omega(\delta))$ при $\delta \to +0$. Например, можно положить $\omega^*(\delta) = \delta/(1+\delta) + \delta \inf_{0 < x \le \delta} \omega(x)/x$. В том, что второе слагаемое — неубывающая функция легко убедиться, см. [75, гл. III, 3.2.5].

пространства A_p являются банаховыми ($1 \le p \le 2$). Как и ранее, мы часто используем обозначение A вместо A_1. Пространство $A(\mathbb{T}^m)$ является банаховой алгеброй (с обычным умножением функций).

Пусть $C^s(\mathbb{T}^m)$ — класс (комплекснозначных) функций на торе $\mathbb{T}^m$ таких, что все частные производные порядка s непрерывны.

Для C^1 -гладких вещественных функций φ на торе $\mathbb{T}^m$ будем изучать поведение экспонент $e^{i\lambda\varphi}$ в пространствах $A_p(\mathbb{T}^m)$

Пусть V — область (открытое связное множество) в $\mathbb{R}^m$ и g — функция на V. Модуль непрерывности $\omega(V, g, \delta)$ функции g определяется соотношением

$$\omega(V, g, \delta) = \sup_{\substack{t_1, t_2 \in V \\ |t_1 - t_2| \le \delta}} |g(t_1) - g(t_2)|, \qquad \delta \ge 0$$

(где $|x|$ — длина вектора $x \in \mathbb{R}^m$). Если $V = \mathbb{R}^m$, мы пишем просто $\omega(g, \delta)$. Пусть ω — заданная непрерывная неубывающая функция на $[0, +\infty)$, $\omega(0) = 0$. Класс $\mathrm{Lip}_\omega(V)$ состоит из функций g на V таких, что $\omega(V, g, \delta) = O(\omega(\delta))$, $\delta \to +0$. Класс $C^{1,\omega}(V)$ состоит из функций f на V таких, что все производные первого порядка $\partial f / \partial t_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, принадлежат $\mathrm{Lip}_\omega(V)$. Разумеется, для (вещественной) функции φ на V условие $\varphi \in C^{1,\omega}(V)$ равносильно условию $\omega(V, \nabla\varphi, \delta) = O(\omega(\delta))$, $\delta \to +0$, где

$$\omega(V, \nabla\varphi, \delta) = \sup_{\substack{t_1, t_2 \in V \\ |t_1 - t_2| \le \delta}} |\nabla\varphi(t_1) - \nabla\varphi(t_2)|, \qquad \delta \ge 0,$$

— модуль непрерывности градиента $\nabla\varphi$ функции φ. Класс $C^{1,\omega}(\mathbb{T}^m)$ состоит из 2π -периодических по каждой переменной функций, принадлежащих $C^{1,\omega}(\mathbb{R}^m)$. Для $0 < \alpha \le 1$ мы пишем $C^{1,\alpha}$ вместо C^{1,δ^α}. Вообще, при произвольном $s = 0, 1, 2, \ldots$ и $0 < \alpha \le 1$ пусть $C^{s,\alpha}(\mathbb{T}^m)$ — класс функций f на $\mathbb{T}^m$ таких, что f является s раз дифференцируемой и все частные производные порядка s функции f (при $s = 0$ сама функция f) удовлетворяют условию Липшица с показателем α (т.е. принадлежат $\mathrm{Lip}_{\delta^\alpha}$). Удобно считать, что $C^{s,0} = C^s$.

Для функции φ на торе $\mathbb{T}^m$ обозначим через $\Lambda(\varphi, p)$ множество всех тех $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых $e^{i\lambda\varphi} \in A_p(\mathbb{T}^m)$. Эти множества нужны нам по следующей причине. На торе размерности $m \ge 3$ условие C^1 -гладкости, вообще говоря, не гарантирует принадлежность функции классам $A_p(\mathbb{T}^m)$. В одномерном случае, разумеется, имеем $C^1(\mathbb{T}) \subseteq A(\mathbb{T}) \subseteq A_p(\mathbb{T})$, и, таким образом, в множествах $\Lambda(\varphi, p)$ нет необходимости — для всякой функции $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$ имеем $\Lambda(\varphi, p) = \mathbb{R}$. Условия гладкости, зависящие от размерности и влекущие принадлежность функций классам $A_p(\mathbb{T}^m)$, хорошо известны, мы обсудим их позже.

Скажем, что градиент функции $\varphi \in C^1(\mathbb{T}^m)$ невырожден, если образ $\nabla\varphi(\mathbb{T}^m)$ имеет положительную (лебегову) меру.

Мы покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть* $1 \leq p < 2$. *Пусть* $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T}^m)$ — *вещественная функция. Предположим, что градиент* $\nabla\varphi$ *не вырожден, т.е. множество* $\nabla\varphi(\mathbb{T}^m)$ *имеет положительную меру. Тогда*

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} \geq c\left(|\lambda|^{1/p}\chi^{-1}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right)^m, \qquad \lambda \in \Lambda(\varphi, p), \quad |\lambda| \geq 1,$$

где χ^{-1} — *функция, обратная к* $\chi(\delta) = \delta\omega(\delta)$, *и* $c = c(p, \varphi) > 0$ *не зависит от* λ.

Эта теорема является многомерным вариантом теоремы 2. (Для всякой C^1 -гладкой функции φ на $\mathbb{T}$ имеем $\Lambda(\varphi, p) = \mathbb{R}$ при всех $p \geq 1$. Невырожденность градиента в одномерном случае означает нелинейность функции φ, что ввиду периодичности равносильно условию $\varphi \neq \mathrm{const}$.)

Из теоремы 6 немедленно получаем

Следствие 4. *Пусть* $0 < \alpha \leq 1$. *Пусть* $\varphi \in C^{1,\alpha}(\mathbb{T}^m)$ — *вещественная функция с невырожденным градиентом. Тогда при всех* p, $1 \leq p < 1 + \alpha$, *имеем*

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} \geq c_p|\lambda|^{m\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{1+\alpha}\right)}, \qquad \lambda \in \Lambda(\varphi, p).$$

В частности $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^m)} \geq c|\lambda|^{\frac{m\alpha}{1+\alpha}}$, $\lambda \in \Lambda(\varphi, 1)$.

Особо отметим случай C^2 -гладкой и даже более общий случай $C^{1,1}$ -гладкой фазы.

Следствие 5. *Пусть* $\varphi \in C^{1,1}(\mathbb{T}^m)$ — *вещественная функция с невырожденным градиентом. Тогда при всех* p, $1 \leq p < 2$, *имеем*

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} \geq c_p|\lambda|^{m\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)}, \qquad \lambda \in \Lambda(\varphi, p).$$

В частности $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^m)} \geq c|\lambda|^{m/2}$, $\lambda \in \Lambda(\varphi, 1)$.

Замечание 9. Ранее Г. Хедстром [79] показал, что для всякой C^2 -гладкой фазовой функции φ на $\mathbb{T}^m$ с условием $\det(\partial^2\varphi/\partial t_i \partial t_j) \not\equiv 0$ имеем $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^m)} \geq c|\lambda|^{m/2}$. (Этот результат является многомерным аналогом оценки Лейбензона–Кахана, т.е. оценки (2) при $p = 1$.) Результат Хедстрома вытекает из следствия 5. Достаточно заметить, что для C^2 -гладких функций φ наше условие невырожденности градиента равносильно условию $\det(\partial^2\varphi/\partial t_i \partial t_j) \not\equiv 0$. Это немедленно вытекает из теоремы Сарда о критических значениях (см., например, [57, гл. 1, § 2]) и теоремы об обратном отображении, примененных к отображению $\nabla\varphi$.

Справедлив также локальный вариант теоремы 6. Пусть E — произвольное множество, содержащееся вместе со своим замыканием во внутренности куба $[0, 2\pi]^m$ или, более обще, — во внутренности какого-то куба с ребрами длины 2π, параллельными координатным осям. Скажем, что функция f, заданная на E, принадлежит $A_p(\mathbb{T}^m, E)$, если существует функция $F \in A_p(\mathbb{T}^m)$ такая, что ее сужение $F_{|E}$ на множество E совпадает с f. При этом полагаем

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T}^m,E)} = \inf_{F_{|E}=f} \|F\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}.$$

Как и в теореме 6, всюду далее χ^{-1} — функция, обратная к $\chi(\delta) = \delta\omega(\delta)$.

Скажем, что градиент функции $\varphi \in C^1(V)$, заданной в области $V \subseteq \mathbb{R}^m$ невырожден, если образ $\nabla\varphi(V)$ имеет положительную (лебегову) меру. (Очевидно, что в одномерном случае это условие равносильно условию нелинейности функции φ.)

Теорема 6$'$. *Пусть $1 \le p < 2$. Пусть V — область, содержащееся вместе со своим замыканием во внутренности куба $[0, 2\pi]^m$. Пусть $\varphi \in C^{1,\omega}(V)$ — вещественная функция на V. Предположим, что градиент $\nabla\varphi$ не вырожден на V, т.е. множество $\nabla\varphi(V)$ имеет положительную меру. Тогда*

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m,V)} \ge c\left(|\lambda|^{1/p}\chi^{-1}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right)^m$$

при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \ge 1$, для которых $e^{i\lambda\varphi} \in A_p(\mathbb{T}^m, V)$.

Локальный аналог следствия 4 (равно как и следствия 5) очевиден.

Технически нам будет удобно иметь дело с пространствами A_p в непериодическом случае. Причина этого в том, что, в отличие от одномерного случая, множество значений градиента C^1 -гладкой функции нескольких переменных может быть очень сложным[8].

---

[8]В связи с этим отметим следующий вопрос. Пусть V — область в $\mathbb{R}^m$ и $\varphi \in C^1(V)$ — вещественная функция. Предположим, что множество $\nabla\varphi(V)$ имеет положительную меру. Верно ли тогда, что это

Пусть $A_p(\mathbb{R}^m)$, где $1 \le p \le \infty$, — пространство умеренных распределений f на $\mathbb{R}^m$ таких, что преобразование Фурье $\widehat{f}$ принадлежит $L^p(\mathbb{R}^m)$. (В одномерном случае эти пространства уже использовались в § 2). Полагаем

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{R}^m)} = \|\widehat{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\widehat{f}(u)|^p du \right)^{1/p}.$$

В силу неравенства Хаусдорфа–Юнга (см. [72, гл. V, § 1]) при $1 \le p \le 2$ всякое распределение из A_p в действительности является функцией из L^q, $1/p + 1/q = 1$. При $p = 1$ мы, естественно, считаем, что f непрерывна[9].

Поясним, что нормирующий множитель преобразования Фурье мы выбираем так, что

$$\widehat{f}(u) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(t) e^{-i(u,t)} dt, \qquad u \in \mathbb{R}^m,$$

для $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$.

Определим локальные пространства A_p в непериодическом случае.

Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^m$ — произвольное множество. Скажем, что функция f, заданная на E, принадлежит $A_p(\mathbb{R}^m, E)$, если существует функция $F \in A_p(\mathbb{R}^m)$ такая, что ее сужение $F_{|E}$ на множество E совпадает с f. Норма в $A_p(\mathbb{R}^m, E)$ определяется естественным образом:

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{R}^m, E)} = \inf_{F_{|E} = f} \|F\|_{A_p(\mathbb{R}^m)}.$$

Теорема $6''$. *Пусть $1 \le p < 2$. Пусть V — область в $\mathbb{R}^m$. Пусть $\varphi \in C^{1,\omega}(V)$ — вещественная функция на V. Предположим, что градиент $\nabla\varphi$ не выpost вырожден на V, т.е. множество $\nabla\varphi(V)$ имеет положительную меру. Тогда*

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{R}^m, V)} \ge c \left(|\lambda|^{1/p} \chi^{-1}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right)^m$$

при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \ge 1$, для которых $e^{i\lambda\varphi} \in A_p(\mathbb{R}^m, V)$.

Основной результат настоящего параграфа — теорема 6 — немедленно вытекает из теоремы $6'$. Покажем, что в свою очередь теорема $6'$ вытекает из теоремы $6''$ после чего докажем саму теорему $6''$.

множество имеет непустую внутренность? При $m = 2$ ответ на этот вопрос положительный [32]. При $m \ge 3$ ответ неизвестен.

[9]Отметим, что в [6] через A обозначено пространство (обратных) преобразований Фурье мер на $\mathbb{R}$. Мы следуем ныне общепринятым обозначениям (см., например [27]).

Фиксируем p, $1 \le p < 2$. При каждом λ таком, что $e^{i\lambda\varphi} \in A_p(\mathbb{T}^m, V)$, рассмотрим какое-нибудь 2π -периодическое (по каждой переменной) продолжение $F_\lambda \in A_p(\mathbb{T}^m)$ функции $e^{i\lambda\varphi}$ с V на $\mathbb{R}^m$.

В предположениях теоремы $6'$ мы можем найти куб $I \subseteq V$ со сторонами, параллельными координатным осям, содержащийся вместе со своим замыканием во внутренности куба $[0, 2\pi]^m$, такой, что градиент $\nabla\varphi$ не вырожден на I. Пусть ψ — бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^m$, равная 1 на I и равная 0 на дополнении $\mathbb{R}^m \setminus [0, 2\pi]^m$. Имеем $\psi \in A(\mathbb{R}^m)$. Положим $c_0 = \|\psi\|_{A(\mathbb{R}^m)}$. При всяком $u \in \mathbb{R}^m$ определим функцию e_u на $\mathbb{R}^m$, полагая $e_u(t) = e^{i(u,t)}$, $t \in \mathbb{R}^m$. Имеем $\|e_u\psi\|_{A(\mathbb{R}^m)} = c_0$.

Пусть $h \in A(\mathbb{R}^m)$ — произвольная функция, аннулирующаяся вне куба $[0, 2\pi]^m$. Пусть $\widetilde{h}$ — есть ее 2π -периодическое по каждой переменной продолжение с куба $[0, 2\pi]^m$ на $\mathbb{R}^m$. Хорошо известно (это теорема Планшереля–Пойа для $p = 1$ в многомерном случая, см. [64, § 50]), что тогда $\widetilde{h} \in A(\mathbb{T}^m)$, причем $\|\widetilde{h}\|_{A(\mathbb{T}^m)} \le c\|h\|_{A(\mathbb{R}^m)}$.

Положим $g_u = \widetilde{e_u\psi}$. При всяком $u \in \mathbb{R}^m$ имеем $\|g_u\|_{A(\mathbb{T}^m)} \le c_1$, откуда

$$\|g_u F_\lambda\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} \le c_1 \|F_\lambda\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}.$$

Ясно также, что $\|g_u F_\lambda\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}$ — измеримая функция от u.

Функция ψF_λ совпадает с $e^{i\lambda\varphi}$ на I. Таким образом,

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|^p_{A_p(\mathbb{R}^m, I)} \le \|\psi F_\lambda\|^p_{A_p(\mathbb{R})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \int_{[0,1]^m} |\widehat{\psi F_\lambda}(u + k)|^p du =$$

$$= \int_{[0,1]^m} \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} |\widehat{e_{-u}\psi F_\lambda}(k)|^p du = \int_{[0,1]^m} \|g_{-u} F_\lambda\|^p_{A_p(\mathbb{T}^m)} du \le c_1 \|F_\lambda\|^p_{A_p(\mathbb{T}^m)}.$$

Остается воспользоваться теоремой $6''$.

Доказательство теоремы $6''$. Мы можем найти замкнутый куб $I \subseteq V$ с ребрами, параллельными координатным осям, такой, что его образ $W = \nabla\varphi(I)$ имеет положительную меру. Множество W ограничено.

Фиксируем $c > 0$ так, что

$$\omega(I, \nabla\varphi, \delta) \le c\omega(\delta), \qquad \delta \ge 0.$$

При всяком $\lambda > 0$ выберем $\delta_\lambda > 0$ так, что

$$\chi(m^{1/2} 2\delta_\lambda) = \frac{1}{2c\lambda}. \tag{80}$$

При $\varepsilon > 0$ пусть Δ_ε — "треугольная"функция, сосредоточенная на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, т.е. функция на $\mathbb{R}$, заданная следующим образом:

$$\Delta_\varepsilon(t) = \max\Big(1 - \frac{|t|}{\varepsilon},\ 0\Big), \quad t \in \mathbb{R},$$

и для произвольного интервала $J \subseteq \mathbb{R}$ пусть Δ_J — треугольная функция, сосредоточенная на J, т.е. $\Delta_J(t) = \Delta_{|J|/2}(t - c_J)$, где c_J — центр интервала J (и $|J|$ — его длина). Пусть далее J — куб в $\mathbb{R}^m$ с ребрами, параллельными координатным осям, $J = J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_m$. Определим треугольную функцию Δ_J, сосредоточенную на J, полагая

$$\Delta_J(t) = \Delta_{J_1}(t_1)\Delta_{J_2}(t_2)\ldots\Delta_{J_m}(t_m), \qquad t = (t_1, t_2, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m.$$

При $\lambda \in \mathbb{R}$ определим множество λW, полагая

$$\lambda W = \{\lambda u,\ u \in W\}.$$

Нам потребуется следующая

Лемма 15. *Пусть $\lambda > 0$ достаточно велико. Пусть F_λ — произвольная функция на $\mathbb{R}^m$, совпадающая с $e^{i\lambda\varphi}$ на V. Тогда для любого $u \in \lambda W$ существует куб $I_{\lambda,u} \subseteq I$ с ребрами длины $2\delta_\lambda$, параллельными координатным осям, такой, что*

$$\big|(\Delta_{I_{\lambda,u}} F_\lambda)^\wedge(u)\big| \geq c_m \delta_\lambda^m,$$

где $c_m > 0$ зависит лишь от размерности m.

Доказательство. Обозначим через a длину ребра куба I. Будем считать, что $\lambda > 0$ столь велико, что

$$2\delta_\lambda < a. \tag{81}$$

Возьмем произвольное $u \in \lambda W$. Мы можем найти точку $t_{\lambda,u} \in I$ такую, что $\nabla\varphi(t_{\lambda,u}) = \lambda^{-1}u$. Пусть $I_{\lambda,u} \subseteq I$ — куб (при необходимости замкнутый) с ребрами длины $2\delta_\lambda$, параллельными координатным осям, содержащий точку $t_{\lambda,u}$ (см. (81)). Рассмотрим следующую линейную функцию:

$$\varphi_{\lambda,u}(t) = \varphi(t_{\lambda,u}) + (\lambda^{-1}u,\ t - t_{\lambda,u}), \qquad t \in \mathbb{R}^m.$$

Если $t \in I_{\lambda,u}$, то для некоторой точки $\theta \in I_{\lambda,u}$ имеем

$$\varphi(t) - \varphi(t_{\lambda,u}) = (\nabla\varphi(\theta),\ t - t_{\lambda,u})$$

(θ лежит на отрезке, соединяющем t и $t_{\lambda,u}$), и, следовательно,

$$|\varphi(t)-\varphi_{\lambda,u}(t)| = |\varphi(t)-\varphi(t_{\lambda,u})-(\nabla\varphi(t_{\lambda,u}),\ t-t_{\lambda,u})| =$$
$$= |(\nabla\varphi(\theta)-\nabla\varphi(t_{\lambda,u}),\ t-t_{\lambda,u})| \le |\nabla\varphi(\theta)-\nabla\varphi(t_{\lambda,u})||t-t_{\lambda,u}| \le$$
$$\le \omega(I,\nabla\varphi,m^{1/2}2\delta_\lambda)m^{1/2}2\delta_\lambda \le c\chi(m^{1/2}2\delta_\lambda).$$

Отсюда, учитывая (80), видим, что

$$|e^{i\lambda\varphi(t)}-e^{i\lambda\varphi_{\lambda,u}(t)}| \le |\lambda\varphi(t)-\lambda\varphi_{\lambda,u}(t)| \le \lambda c\chi(m^{1/2}2\delta_\lambda) = \frac{1}{2}, \qquad t\in I_{\lambda,u}.$$

Пользуясь этой оценкой, получаем

$$|(\Delta_{I_{\lambda,u}}F_\lambda)^\wedge(u) - (\Delta_{I_{\lambda,u}}e^{i\lambda\varphi_{\lambda,u}})^\wedge(u)| \le$$
$$\le \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{I_{\lambda,u}}\Delta_{I_{\lambda,u}}(t)|e^{i\lambda\varphi(t)}-e^{i\lambda\varphi_{\lambda,u}(t)}|dt \le$$
$$\le \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{R}^m}\Delta_{I_{\lambda,u}}(t)dt = \frac{1}{2}\widehat{\Delta_{I_{\lambda,u}}}(0).$$

Вместе с тем

$$|(\Delta_{I_{\lambda,u}}e^{i\lambda\varphi_{\lambda,u}})^\wedge(u)| = \left|\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{R}^m}\Delta_{I_{\lambda,u}}(t)e^{i(\lambda\varphi_{\lambda,u}(t)-(u,t))}dt\right| = \widehat{\Delta_{I_{\lambda,u}}}(0).$$

Таким образом,

$$|(\Delta_{I_{\lambda,u}}F_\lambda)^\wedge(u)| \ge \frac{1}{2}\widehat{\Delta_{I_{\lambda,u}}}(0) = c_m\delta_\lambda^m.$$

Лемма доказана.

Фиксируем p, $1\le p<2$. Всюду далее мы считаем, что частоты λ таковы, что $e^{i\lambda\varphi}\in A_p(\mathbb{R}^m,V)$. Мы можем считать, что множество таких λ неограничено, иначе доказывать нечего. Мы также можем считать, что эти частоты λ положительны (комплексное сопряжение не меняет норму функции в A_p). При каждом таком λ пусть F_λ — продолжение функции $e^{i\lambda\varphi}$ с V на $\mathbb{R}^m$ такое, что

$$\|F_\lambda\|_{A_p(\mathbb{R}^m)} \le 2\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{R}^m,V)}. \tag{82}$$

Пусть $I_{\lambda,u}$ — соответствующие кубы, существование которых (при достаточно больших λ) установлено в лемме 15.

Определим функции g_λ, полагая

$$g_\lambda = (|(F_\lambda)^\wedge|)^\vee,$$

где ${}^{\vee}$ обозначает обратное преобразование Фурье. Имеем $g_\lambda \in A_p(\mathbb{R}^m)$.

Хорошо известно, что функция Δ_ε принадлежит $A(\mathbb{R})$ и имеет неотрицательное преобразование Фурье. Отсюда $\widehat{\Delta_{(-\varepsilon,\varepsilon)^m}} \geq 0$ и, поскольку для произвольного куба $J \subseteq \mathbb{R}^m$ с ребрами длины 2ε, параллельными координатным осям, функция Δ_J получена из $\Delta_{(-\varepsilon,\varepsilon)^m}$ сдвигом, имеем $|\widehat{\Delta_J}| = \widehat{\Delta_{(-\varepsilon,\varepsilon)^m}}$. Следовательно ($*$ означает свертку),

$$|(\Delta_{I_{\lambda,u}} F_\lambda)^\wedge(u)| = |(\Delta_{I_{\lambda,u}})^\wedge * (F_\lambda)^\wedge(u)| \leq |(\Delta_{I_{\lambda,u}})^\wedge| * |(F_\lambda)^\wedge|(u) =$$

$$= (\Delta_{(-\delta_\lambda,\ \delta_\lambda)^m})^\wedge * \widehat{g_\lambda}(u) = (\Delta_{(-\delta_\lambda,\ \delta_\lambda)^m}\ g_\lambda)^\wedge(u)$$

для почти всех $u \in \mathbb{R}^m$. (Мы воспользовались стандартными фактами о свертке функций из L^1 с функциями из L^p, см., например, [72, гл. I, § 2].)

Таким образом, в соответствии с леммой 15, видим, что если $\lambda > 0$ достаточно велико, то для почти всех $u \in \lambda W$ имеем

$$c_m \delta_\lambda^m \leq (\Delta_{(-\delta_\lambda,\ \delta_\lambda)^m}\ g_\lambda)^\wedge(u). \tag{83}$$

Так как $\|\Delta_{(-\varepsilon,\varepsilon)^m}\|_{A(\mathbb{R}^m)} = \Delta_{(-\varepsilon,\varepsilon)^m}(0) = 1$, то для любой функции $f \in A_p(\mathbb{R}^m)$ и любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\|\Delta_{(-\epsilon,\epsilon)^m} f\|_{A_p(\mathbb{R}^m)} \leq \|f\|_{A_p(\mathbb{R}^m)}.$$

Поэтому, возводя в степень p неравенство (83) и интегрируя по $u \in \lambda W$, видим, что

$$(c_m^p \delta_\lambda^{mp} |\lambda W|)^{1/p} \leq \left(\int_{\lambda W} |(\Delta_{(-\delta_\lambda,\ \delta_\lambda)^m} g_\lambda)^\wedge(u)|^p du \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \|\Delta_{(-\delta_\lambda,\ \delta_\lambda)^m}\ g_\lambda\|_{A_p(\mathbb{R}^m)} \leq \|g_\lambda\|_{A_p(\mathbb{R}^m)} = \|F_\lambda\|_{A_p(\mathbb{R}^m)}$$

при всех достаточно больших λ.

Отсюда с учетом (82) получаем

$$c_m \delta_\lambda^m \lambda^{m/p} |W|^{1/p} \leq 2\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{R}^m, V)}.$$

Остается лишь заметить, что условие (80) влечет $\delta_\lambda \geq c\chi^{-1}(1/\lambda)$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о медленном росте норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}$.

Положим (как и выше χ^{-1} — функция, обратная к $\chi(\delta) = \delta\omega(\delta)$)

$$\Theta_1(y) = \frac{y}{\log y} \chi^{-1}\left(\frac{(\log y)^2}{y} \right)$$

и при $1 < p < 2$ положим

$$\Theta_p(y) = \left(\int_1^y \left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right) \right)^p d\tau \right)^{1/p}.$$

Пусть ω удовлетворяет условию $\omega(2\delta) < 2\omega(\delta)$ при всех достаточно малых $\delta > 0$. Тогда, по теореме 3, существует вещественная нигде не линейная, т.е. не являющаяся линейной ни на каком интервале, функция $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ такая, что при всех p, $1 \le p < 2$, имеем $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(\Theta_p(|\lambda|))$, $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Этот результат о медленном росте легко переносится на случай тора произвольной размерности. Скажем, что градиент функции φ нигде не вырожден, если он не вырожден ни на каком открытом множестве, т.е., если для любого открытого множества $V \subseteq \mathbb{R}^m$ имеем $|\nabla\varphi(V)| > 0$.

Теорема 7. *Пусть $\omega(2\delta) < 2\omega(\delta)$ при всех достаточно малых $\delta > 0$. Существует вещественная функция $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T}^m)$ с нигде не вырожденным градиентом такая, что при всех p, $1 \le p < 2$, имеем*

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} = O((\Theta_p(|\lambda|))^m), \qquad |\lambda| \to \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Многомерный вариант вытекает из одномерного. Действительно, если $\varphi_0 \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ — вещественная нигде не линейная функция, то, полагая

$$\varphi(t) = \varphi_0(t_1) + \varphi_0(t_2) + \ldots + \varphi_0(t_m), \qquad t = (t_1, t_2, \ldots, t_m) \in \mathbb{T}^m,$$

имеем функцию $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T}^m)$ с нигде не вырожденным градиентом, и остается лишь заметить, что $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} = (\|e^{i\lambda\varphi_0}\|_{A_p(\mathbb{T})})^m$.

Таким же образом (или непосредственно из теоремы 7 с учетом следствия 4), получаем многомерные аналоги следствий 2, 3, а именно, приведенные ниже следствия 6 и 7.

Следствие 6. *Пусть $0 < \alpha < 1$. Существует вещественная функция $\varphi \in C^{1,\alpha}(\mathbb{T}^m)$ с нигде не вырожденным градиентом такая, что*

(i)
$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^m)} = O(|\lambda|^{\frac{m\alpha}{1+\alpha}}(\log|\lambda|)^{\frac{m(1-\alpha)}{1+\alpha}}),$$

(ii)
$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} \simeq |\lambda|^{m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{1+\alpha}\right)} \qquad \text{при} \quad 1 < p < 1+\alpha;$$

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} \simeq 1 \qquad \text{при} \quad 1+\alpha < p < 2;$$

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} = O((\log|\lambda|)^{m/p}) \qquad \text{\textit{при}} \quad p = 1+\alpha.$$

В частности видим, что оценка следствия 4 при $1 < p < 1+\alpha$ является окончательной.

Следствие 7. *Пусть $\gamma(\lambda) \geq 0$ и $\gamma(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$. Существует вещественная функция $\varphi \in C^1(\mathbb{T}^m)$ с нигде не вырожденным градиентом такая, что*

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^m)} = O(\gamma(|\lambda|)(\log|\lambda|)^m).$$

В заключение рассмотрим вопрос об оценках сверху.

Пусть $1 \leq p < 2$. Напомним, что если φ — вещественная функция на окружности $\mathbb{T}$, удовлетворяющая условию Липшица с показателем 1, то (см. (2)) $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(|\lambda|^{1/p-1/2})$, и в силу оценки Лейбензона–Кахана–Алпара (3) имеем $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \simeq |\lambda|^{1/p-1/2}$ для любой нелинейной вещественной функции $\varphi \in C^2(\mathbb{T})$ (в действительности это верно даже в предположении $\varphi \in C^{1,1}(\mathbb{T})$, см. следствие 5 при $m=1$). Здесь мы получим аналогичные результаты в случае тора произвольной размерности.

Напомним известное условие гладкости, обеспечивающее принадлежность функций классам $A_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \leq p < 2$, а именно: если $f \in C^{s,\alpha}(\mathbb{T}^m)$ и $s+\alpha > m(1/p-1/2)$, то $f \in A_p(\mathbb{T}^m)$. Известно, что это условие неулучшаемо в том смысле, что при $s+\alpha = m(1/p-1/2)$ включение $C^{s,\alpha}(\mathbb{T}^m) \subseteq A_p(\mathbb{T}^m)$ неверно [10].

Мы покажем, что справедлива

Теорема 8. *Пусть $1 \leq p < 2$ и $0 \leq \alpha \leq 1$. Пусть $\varphi \in C^{s,\alpha}(\mathbb{T}^m)$ — вещественная функция. Предположим, что $s+\alpha \geq 1$, $s+\alpha > m(1/p-1/2)$. Тогда*

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} = O(|\lambda|^{m(1/p-1/2)}), \qquad |\lambda| \to \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что при $s+\alpha \geq 2$ имеем $C^{s,\alpha} \subseteq C^{1,1}$, поэтому из следствия 5 и теоремы 8 немедленно вытекает

[10] В одномерном случае при $p=1$ соответствующие результаты принадлежат С. Н. Бернштейну (см. [24, гл. VI, теорема 3.1]), обобщение на случай $1<p<2$ получил О. Сас (см. [24, гл. VI, теорема 3.10]), в многомерном случае достаточность указанного условия получили С. Минакшисундарам и О. Сас [54] (см. также замечание С. Бохнера [9]). Неулучшаемость указанного условия гладкости в многомерном случае установил С. Вейнгер [11].

Теорема 9. *Пусть* $1 \le p < 2$ *и* $0 \le \alpha \le 1$. *Пусть* $\varphi \in C^{s,\alpha}(\mathbb{T}^m)$ *— вещественная функция с невырожденным градиентом. Предположим, что* $s+\alpha \ge 2$, $s+\alpha > m(1/p-1/2)$. *Тогда*

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} \simeq |\lambda|^{m(1/p-1/2)}, \qquad |\lambda| \to \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

В частности, если $s+\alpha \ge 2$, $s+\alpha > m/2$, *то* $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^m)} \simeq |\lambda|^{m/2}$.

Доказательство теоремы 8. Обычным образом мы определяем норму в пространстве $L^2(\mathbb{T}^m)$ и норму в пространстве $C(\mathbb{T}^m)$ непрерывных функций на $\mathbb{T}^m$:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^m)} = \left(\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{T}^m} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}, \qquad \|g\|_{C(\mathbb{T}^m)} = \sup_{t\in\mathbb{T}^m} |g(t)|.$$

Определим норму в $C^{s,\alpha}(\mathbb{T}^m)$, полагая

$$\|f\|_{C^{s,\alpha}(\mathbb{T}^m)} = \max_{0\le\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_m\le s} \|D_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m} f\|_{C(\mathbb{T}^m)} +$$

$$+ \max_{\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_m = s} \sup_{\delta>0} \frac{1}{\delta^\alpha}\omega(D_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m} f, \delta),$$

где

$$D_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m} f(t) = \frac{\partial^{\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_m} f(t)}{\partial t_1^{\gamma_1}\partial t_2^{\gamma_2}\ldots\partial t_m^{\gamma_m}}, \qquad t = (t_1, t_2, \ldots, t_m).$$

Легко увидеть, что при $s = 0, 1, 2, \ldots$ и $0 \le \alpha \le 1$ имеем

$$\|fg\|_{C^{s,\alpha}(\mathbb{T}^m)} \le c\|f\|_{C^{s,\alpha}(\mathbb{T}^m)}\|g\|_{C^{s,\alpha}(\mathbb{T}^m)},$$

где $c = c(m, s, \alpha) > 0$ не зависит от f и g.

Пользуясь этим соотношением, легко проверить, что если $s+\alpha \ge 1$, то для всякой вещественной функции $\varphi \in C^{s,\alpha}(\mathbb{T}^m)$ справедлива оценка

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{C^{s,\alpha}(\mathbb{T}^m)} \le c|\lambda|^{s+\alpha}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| \ge 1,$$

с константой $c = c(s, \alpha, \varphi)$, не зависящей от λ. При $s = 1, 2, \ldots$ это проверяется индукцией по s при фиксированном α. Если же $s = 0$, то из условия $s+\alpha \ge 1$ имеем $\alpha = 1$, и указанная оценка также верна.

Таким образом, ясно, что утверждение теоремы немедленно вытекает из следующей простой леммы.

Лемма 16. *Пусть* $f \in C^{s,\alpha}(\mathbb{T}^m)$ *и* $s+\alpha > m(1/p-1/2)$, $1 \le p < 2$. *Тогда*

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} \le c\|f\|^{\tau}_{C^{s,\alpha}(\mathbb{T}^m)}\|f\|^{1-\tau}_{L^2(\mathbb{T}^m)},$$

где

$$\tau = \frac{m(1/p - 1/2)}{s+\alpha}.$$

Доказательство. Пусть S^{m-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^m$ с центром в 0. Пусть $\delta > 0$ и $\xi \in S^{m-1}$. При каждом $j = 1, 2, \ldots, m$ рассмотрим функцию

$$\frac{\partial^s f}{\partial t_j^s}(t+\delta\xi) - \frac{\partial^s f}{\partial t_j^s}(t-\delta\xi), \qquad t = (t_1, t_2, \ldots, t_m) \in \mathbb{T}^m.$$

Записывая для этой функции равенство Парсеваля, получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{T}^m}\left|\frac{\partial^s f}{\partial t_j^s}(t+\delta\xi) - \frac{\partial^s f}{\partial t_j^s}(t-\delta\xi)\right|^2 dt = \sum_{k=(k_1,k_2,\ldots,k_m)\in\mathbb{Z}^m} k_j^{2s}|\widehat{f}(k)|^2 4\sin^2(\delta k, \xi).$$

Таким образом,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} k_j^{2s}|\widehat{f}(k)|^2 \sin^2(\delta k, \xi) \le \|f\|^2_{C^{s,\alpha}}\delta^{2\alpha}.$$

Складывая по $j = 1, 2, \ldots, m$, имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} |k|^{2s}|\widehat{f}(k)|^2 \sin^2(\delta k, \xi) \le c\|f\|^2_{C^{s,\alpha}}\delta^{2\alpha},$$

где $c = c(s, m) > 0$.

Пусть $|k| \le 1/\delta$, тогда $|(\delta k, \xi)| \le 1$, откуда $|\sin(\delta k, \xi)| \ge |(\delta k, \xi)|/2$, и мы видим, что

$$\sum_{|k|\le 1/\delta} |k|^{2s}|\widehat{f}(k)|^2 (\delta k, \xi)^2 \le c\|f\|^2_{C^{s,\alpha}}\delta^{2\alpha}.$$

Интегрируя это неравенство по $\xi \in S^{m-1}$ (при $m = 1$ просто полагая $\xi = 1$) и учитывая, что для любого вектора $v \in \mathbb{R}^m$

$$\int_{S^{m-1}} (v, \xi)^2 d\xi = c_m|v|^2,$$

получаем

$$\sum_{|k|\le 1/\delta} |k|^{2s}|\widehat{f}(k)|^2 \delta^2|k|^2 \le c\|f\|^2_{C^{s,\alpha}}\delta^{2\alpha}.$$

Полагая $\delta = 2^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$, видим, что

$$\sum_{2^{n-1}\le|k|<2^n} |\widehat{f}(k)|^2 \le c\|f\|^2_{C^{s,\alpha}}2^{-2n(s+\alpha)}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{84}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от n и f.

Пользуясь неравенством Гельдера с $p^* = 2/p, 1/p^* + 1/q^* = 1$, из соотношения (84) получаем

$$\sum_{2^{n-1}\le|k|<2^n} |\widehat{f}(k)|^p \le \left(\sum_{2^{n-1}\le|k|<2^n} |\widehat{f}(k)|^{pp^*} \right)^{1/p^*} \left(\sum_{2^{n-1}\le|k|<2^n} 1 \right)^{1/q^*} \le$$

$$\le c\|f\|^p_{C^{s,\alpha}} 2^{-pn(s+\alpha)} (2^{nm})^{1-p/2} = c\|f\|^p_{C^{s,\alpha}} 2^{-np(s+\alpha)(1-\tau)}.$$

Отсюда ясно, что для произвольного $B \ge 1$ имеем

$$\sum_{|k|\ge B} |\widehat{f}(k)|^p \le c\|f\|^p_{C^{s,\alpha}} B^{-p(s+\alpha)(1-\tau)}. \tag{85}$$

Вместе с тем, очевидно, что при $B \ge 1$

$$\sum_{|k|<B} |\widehat{f}(k)|^p \le \left(\sum_{|k|<B} |\widehat{f}(k)|^{pp^*} \right)^{1/p^*} \left(\sum_{|k|<B} 1 \right)^{1/q^*} \le$$

$$\le \|f\|^p_{L^2} c B^{m(1-p/2)} = c\|f\|^p_{L^2} B^{p(s+\alpha)\tau}. \tag{86}$$

Остается сложить соотношения (85), (86), положив в них

$$B = \left(\frac{\|f\|_{C^{s,\alpha}}}{\|f\|_{L^2}} \right)^{\frac{1}{s+\alpha}}.$$

Лемма доказана. Теорема 8, а с ней и теорема 9 доказаны.

Глава 2

Преобразование Фурье характеристических функций областей с C^1 -гладкой границей

Пусть D — ограниченная область (открытое связное множество) в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Рассмотрим ее характеристическую функцию 1_D, т.е. функцию на $\mathbb{R}^n$, принимающую значение $1_D(t) = 1$ при $t \in D$ и значение $1_D(t) = 0$ при $t \notin D$. Рассмотрим преобразование Фурье $\widehat{1_D}$ этой функции. Нас интересует следующий вопрос: для каких областей D мы имеем $\widehat{1_D} \in L^p(\mathbb{R}^n)$? Нетривиален лишь случай $1 < p < 2$.

Удобно иметь дело с пространствами $A_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, умеренных распределений f на $\mathbb{R}^n$ таких, что преобразование Фурье $\widehat{f}$ принадлежит $L^p(\mathbb{R}^n)$. Эти пространства уже встречались в предыдущей главе. Напомним, что норма в $A_p(\mathbb{R}^n)$ определяется естественным образом:

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Напомним также, что при $1 \leq p \leq 2$ всякое распределение из $A_p(\mathbb{R}^n)$ является функцией из $L^q(\mathbb{R}^n)$, $1/p + 1/q = 1$.

Прямое вычисление показывает, что если D — куб в $\mathbb{R}^n$, то $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$ при всех $p > 1$. То же верно в случае, когда D — многогранник (т.е. конечное объединение симплексов). С другой стороны, для всякой ограниченной области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ с C^2 -гладкой границей имеем $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$ при $p > 2n/(n+1)$ и $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^n)$ при $p \leq 2n/(n+1)$. (Это вытекает из теорем 1, 2 настоящей главы, см. следствие 2.) Таким образом, для (ограниченных) областей с C^2 -гладкой границей $2n/(n+1)$ является критическим значением показателя интегрируемости преобразования Фурье характеристической функции.

В этой главе изучаются области с C^1 -гладкой границей. Как мы увидим, — этот случай, вообще говоря, существенно отличается от дважды гладкого, что показывает (см. § 3) пример области $D \subseteq \mathbb{R}^2$, граница которой C^1 -гладкая, и вместе с тем $1_D \in A_p(\mathbb{R}^2)$ при всех $p > 1$. (Критическое значение для плоских областей с дважды гладкой границей равно $4/3$.)

Будем обозначать границу области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ через ∂D. Говоря, что граница области D является C^1 -гладкой или C^2 -гладкой, мы имеем ввиду, что в окрестности каждой своей точки граница ∂D является графиком некоторой (вещественной) функции класса C^1 или C^2 соответственно (т.е. функции, у которой все частные производные первого или второго порядка соответственно — непрерывны).

Для всякой области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ с C^1 -гладкой границей пусть $\nu_D(x)$ — единичная внешняя нормаль к ∂D в точке $x \in \partial D$. Возникающее таким образом отображение $\nu_D : \partial D \to S^{n-1}$ границы области D в единичную сферу S^{n-1} с центром в начале координат мы называем нормальным отображением. Через $\omega(\nu_D, \delta)$ обозначим модуль непрерывности отображения ν_D:

$$\omega(\nu_D, \delta) = \sup_{x,y\ \in \partial D;\ |x-y| \leq \delta} |\nu_D(x) - \nu_D(y)|, \qquad \delta \geq 0,$$

где $|u|$ — длина вектора $u \in \mathbb{R}^n$. Пусть далее $\omega(\delta)$ — произвольная неубывающая непрерывная функция на $[0, \infty)$ такая, что $\omega(0) = 0$. В случае, когда $\omega(\nu_D, \delta) = O(\omega(\delta)),\ \delta \to +0$, мы говорим, что граница ∂D является $C^{1,\omega}$ -гладкой. Для ограниченных областей это условие эквивалентно тому, что в окрестности каждой своей точки граница области D является графиком некоторой функции класса $C^{1,\omega}$. Другими словами — для каждой точки $x \in \partial D$ можно найти окрестность B, содержащую x, и область $V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ такую, что $B \cap \partial D$ является графиком некоторой (вещественной) функции $\varphi \in C^{1,\omega}(V)$, т.е. функции с условием $\omega(V, \nabla\varphi, \delta) = O(\omega(\delta)),\ \delta \to +0$, где

$$\omega(V, \nabla\varphi, \delta) = \sup_{x,y \in V;\ |x-y| \leq \delta} |\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y)|, \qquad \delta \geq 0,$$

— модуль непрерывности градиента $\nabla\varphi$ функции φ.

Если граница ∂D области D является C^1 -гладкой, C^2 -гладкой или $C^{1,\omega}$ -гладкой, то мы пишем $\partial D \in C^1,\ \partial D \in C^2,\ \partial D \in C^{1,\omega}$, соответственно.

Если $\omega(\delta) = \delta^\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$, то мы пишем просто $C^{1,\alpha}$ вместо C^{1,δ^α}.

Результаты этой главы существенным образом опираются на результаты главы 1. Простые соображения (лемма 1 настоящей главы) позволяют свести изучение характеристических функций к изучению поведения экспонент.

§ 1. Общий случай. Области с C^1 -гладкой границей

Теорема 1. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, такая, что $\partial D \in C^1$. Тогда $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$ при всех $p > 2n/(n+1)$.*

Доказательство. При $s > 0$ рассмотрим пространства Соболева $W_2^s(\mathbb{R}^n)$ функций $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$\|f\|_{W_2^s(\mathbb{R}^n)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 (|\xi|^{2s} + 1) d\xi \Big)^{1/2} < \infty.$$

Легко убедиться, что

$$W_2^s(\mathbb{R}^n) \subseteq A_p(\mathbb{R}^n)$$

при $2n/(n+2s) < p < 2$. В самом деле, положим $p^* = 2/p,\ 1/p^* + 1/q^* = 1$. Мы имеем $spq^* > n$ и, пользуясь неравенством Гельдера, получаем

$$\|f\|^p_{A_p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^p d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(|\widehat{f}(\xi)|\,(|\xi|^s+1)\Big)^p \frac{1}{(|\xi|^s+1)^p} d\xi \leq$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|\widehat{f}(\xi)|\,(|\xi|^s+1)\Big)^{pp^*} d\xi \right)^{1/p^*} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(|\xi|^s+1)^{pq^*}} d\xi \right)^{1/q^*} \leq c_{p,s}\|f\|^p_{W_2^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Для доказательства теоремы остается воспользоваться тем, что для любой ограниченной области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ с C^1 -гладкой границей мы имеем $1_D \in W_2^s(\mathbb{R}^n)$ при всех $s < 1/2$. Последний факт является тривиальным следствием теоремы о (поточечных) мультипликаторах в пространствах Соболева [77, § 5].

Мы приведем независимое простое и короткое доказательство включения $1_D \in W_2^s,\ s < 1/2$. Хорошо известно, что при $0 < s < 1$ норма $\|\cdot\|_{W_2^s(\mathbb{R}^n)}$ и норма

$$\|f\| = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|t|^{n+2s}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+t) - f(x)|^2 dx \right) dt \right)^{1/2} \tag{1}$$

эквивалентны (см., например, [69, гл. V, § 3.5]). Для произвольного множества $E \subseteq \mathbb{R}^n$ и вектора $t \in \mathbb{R}^n$ положим $E + t = \{x + t : x \in E\}$. Заметим, что при любом $t \in \mathbb{R}^n$ симметрическая разность

$$((D-t) \setminus D) \cup (D \setminus (D-t))$$

множеств $D-t$ и D содержится в (замкнутой) $|t|$ -окрестности границы ∂D области D и поэтому имеет (лебегову) меру, не превосходящую $c|t|$. Ясно также, что эта симметрическая разность имеет меру, не превосходящую $2|D|$. Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |1_D(x+t) - 1_D(x)|^2 dx \leq \min(c|t|, 2|D|), \qquad t \in \mathbb{R}^n,$$

и остается воспользоваться эквивалентностью нормы $\|\cdot\|_{W_2^s(\mathbb{R}^n)}$ и нормы (1). Теорема доказана [1].

---

[1] Отметим, что [31, следствие 2.2] если $E \subseteq \mathbb{R}^n,\ n \geq 1,$ — множество положительной меры, то $1_E \notin W_2^{1/2}(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 1. Метод доказательства теоремы 1 позволяет рассматривать произвольные множества (не обязательно области). Напомним [53], что верхняя размерность Минковского $\overline{\dim}_M F$ произвольного ограниченного множества $F \subseteq \mathbb{R}^n$ определяется следующим образом:

$$\overline{\dim}_M F = \inf\{0 \le \gamma \le n : |(F)_\delta| = O(\delta^{n-\gamma}),\ \delta \to +0\},$$

где $(F)_\delta$ есть δ -окрестность множества F. Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, — ограниченное множество положительной меры. Пусть a — верхняя размерность Минковского его границы ∂E. Предположим, что $a < n$. Повторяя с очевидными изменениями рассуждения, использованные выше, видим, что тогда $1_E \in W_2^s(\mathbb{R}^n)$ при всех $s < (n-a)/2$. Отсюда в свою очередь получаем $1_E \in A_p(\mathbb{R}^n)$ при всех $p > 2n/(2n-a)$. Отметим, что при $s < (n-a)/2$ использование нормы (1) правомерно, поскольку $a \ge n-1$. В самом деле, убедимся, что если множество $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ограничено и имеет положительную меру, то $\overline{\dim}_M \partial E \ge n-1$. Считая, что $E \setminus \partial E \ne \varnothing$ (иначе доказывать нечего), фиксируем точку $x_0 \in E \setminus \partial E$. Существует открытый шар B с центром в x_0, который не содержит точек границы ∂E и, более того, находится на положительном расстоянии от ∂E. Обозначим через S граничную сферу шара B. Определим отображение $\theta : \mathbb{R}^n \setminus B \to S$ следующим образом. Возьмем точку $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$ и проведем через точку x луч с началом в x_0. Обозначим через $\theta(x)$ точку пересечения этого луча со сферой S. Ясно, что отображение θ — липшицево (более того оно нерастягивающее, т.е. $|\theta(x_1) - \theta(x_2)| \le |x_1 - x_2|$ при всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \setminus B$). Легко увидеть, что образом границы множества E при отображении θ является вся сфера S. Вместе с тем, как известно [53, гл. 7], при липшицевых отображениях размерность множества не может увеличиться. Таким образом,

$$n - 1 = \overline{\dim}_M S = \overline{\dim}_M \theta(\partial E) \le \overline{\dim}_M \partial E.$$

§ 2. Области с $C^{1,\omega}$ -гладкой границей

Теорема 2. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, такая, что $\partial D \in C^{1,\omega}$. Если*

$$\int_0^1 \frac{\delta^{n(p-1)-1}}{(\omega(\delta))^{n-p}}\, d\delta = \infty,$$

то $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^n)$.

Из теоремы 2 немедленно получаем

Следствие 1. *Пусть* $0 < \alpha \leq 1$. *Пусть* D *— ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *такая, что* $\partial D \in C^{1,\alpha}$. *Если*

$$p \leq 1 + \frac{(n-1)\alpha}{n+\alpha},$$

то $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^n)$.

Отметим случай областей с дважды гладкой границей и даже более общий $C^{1,1}$ случай, а именно, пользуясь следствием 1 и теоремой 1, получаем

Следствие 2. *Пусть* D *— ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *такая, что* $\partial D \in C^{1,1}$. *Тогда* $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$ *при* $p > 2n/(n+1)$ *и* $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^n)$ *при* $p \leq 2n/(n+1)$. *В частности, это так для ограниченных областей с дважды гладкой границей.*

Прежде чем доказывать теорему изложим некоторые предварительные сведения и докажем одну лемму.

Напомним (см., например, [69, гл. IV, § 3.1]), что функция $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ называется L^p -мультипликатором Фурье ($1 \leq p \leq \infty$), если оператор Q, заданный соотношением

$$\widehat{Qf} = m\widehat{f}, \qquad f \in L^p \cap L^2(\mathbb{R}^n),$$

является ограниченным оператором в $L^p(\mathbb{R}^n)$. Пространство $M_p(\mathbb{R}^n)$ всех таких мультипликаторов, снабженное нормой

$$\|m\|_{M_p(\mathbb{R}^n)} = \|Q\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)},$$

является банаховой алгеброй (относительно обычного умножения функций). Хорошо известно, что характеристическая функция произвольного параллелепипеда является мультипликатором при всех $p, 1 < p < \infty$, (см., например, [69, гл. IV, § 4.1], а также [80, гл. I, § 1.3]).

Заметим, что в интересующем нас случае $1 < p < 2$ каждый L^p -мультипликатор Фурье является поточечным мультипликатором в A_p, т.е., если $m \in M_p(\mathbb{R}^n)$, то для любой функции $f \in A_p(\mathbb{R}^n)$ имеем $mf \in A_p(\mathbb{R}^n)$, причем

$$\|mf\|_{A_p} \leq \|m\|_{M_p} \|f\|_{A_p}. \tag{2}$$

В этом легко убедиться следующим образом. Оценка (2) верна для любой функции $f \in A_p \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ (это очевидно, поскольку преобразование Фурье и его обратное отличаются лишь знаком переменной и нормирующим множителем). Ясно, что множество $A_p \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ всюду плотно в $A_p(\mathbb{R}^n)$. Пусть $f \in A_p(\mathbb{R}^n)$ — произвольная функция. Пусть $f_k \in A_p \cap L^2(\mathbb{R}^n),\ k = 1, 2, \dots,$ — последовательность функций сходящаяся к f в $A_p(\mathbb{R}^n)$. Имеем

$$\|mf_j - mf_k\|_{A_p} = \|m \cdot (f_j - f_k)\|_{A_p} \le \|m\|_{M_p} \|f_j - f_k\|_{A_p} \to 0.$$

Очевидно, что пространства $A_p(\mathbb{R}^n)$ — банаховы, поэтому последовательность $mf_k,\ k = 1, 2, \dots,$ сходится в $A_p(\mathbb{R}^n)$ к некоторой функции $g \in A_p(\mathbb{R}^n)$. В силу неравенства Хаусдорфа–Юнга [72, гл. V, § 1], которое в наших обозначениях имеет вид $\|\cdot\|_{L^q} \le \|\cdot\|_{A_p},\ 1/p + 1/q = 1,\ 1 \le p \le 2$, видим, что последовательности $\{f_k\}$ и $\{mf_k\}$ сходятся в $L^q(\mathbb{R}^n)$ к f и g соответственно. Таким образом, $mf = g$, и остается перейти к пределу в неравенстве $\|mf_k\|_{A_p} \le \|m\|_{M_p} \|f_k\|_{A_p}$.

Пусть D_1 — область в $\mathbb{R}^n$ и $D_2 = l(D_1)$ — ее образ при невырожденном аффинном отображении $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Легко увидеть, что $1_{D_1} \in A_p(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $1_{D_2} \in A_p(\mathbb{R}^n)$. Достаточно заметить, что если $l(x) = Qx + b$, то для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ имеем $|\widehat{f \circ l}(u)| = |\det Q|^{-1} |\widehat{f}((Q^{-1})^* u)|$, где Q^{-1} — матрица, обратная к Q и $(Q^{-1})^*$ — матрица, сопряженная к Q^{-1}.

Напомним определение локальных пространств A_p (эти пространства использовались в гл. 1, § 5). Пусть E — произвольное множество в $\mathbb{R}^m$, $m \ge 1$. Скажем, что функция f, заданная на E, принадлежит пространству $A_p(\mathbb{R}^m, E)$, если существует функция $F \in A_p(\mathbb{R}^m)$ такая, что ее сужение $F_{|E}$ на множество E совпадает с f. Норма в $A_p(\mathbb{R}^m, E)$ определяется следующим образом:

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{R}^m, E)} = \inf_{F_{|E} = f} \|F\|_{A_p(\mathbb{R}^m)}.$$

Заметим, что если I — параллелепипед в $\mathbb{R}^m$ и f — функция на I, то, полагая

$$\|f\|^{\circ}_{A_p(\mathbb{R}^m, I)} = \|F\|_{A_p(\mathbb{R}^m)}, \tag{3}$$

где F — это функция f, продолженная нулем на дополнение $\mathbb{R}^m \setminus I$ (т.е. $F = f$ на I и $F = 0$ на $\mathbb{R}^m \setminus I$), мы получаем норму $\|\cdot\|^{\circ}_{A_p(\mathbb{R}^m, I)}$, эквивалентную норме $\|\cdot\|_{A_p(\mathbb{R}^m, I)}$ при $1 < p < 2$. Это следует из того, что при $1 < p < \infty$ характеристическая функция всякого параллелепипеда является L^p - мультипликатором Фурье.

Основой доказательства теоремы 2 является, полученная в гл. 1 § 5 теорема 6″. Напомним эту теорему. Пусть $1 \le p < 2$. Пусть V — область в $\mathbb{R}^m$ и $\varphi \in C^{1,\omega}(V)$ — вещественная функция. Предположим, что градиент $\nabla \varphi$

функции φ не вырожден на V, т.е. множество $\nabla\varphi(V)$ имеет положительную меру. Тогда для всех тех $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \geq 1$, для которых $e^{i\lambda\varphi} \in A_p(\mathbb{R}^m, V)$, имеем

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{R}^m,V)} \geq c\left(|\lambda|^{1/p}\chi^{-1}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right)^m, \tag{4}$$

где χ^{-1} — функция, обратная к $\chi(\delta) = \delta\omega(\delta)$, и $c = c(p,\varphi) > 0$ не зависит от λ.

Следующая далее простая лемма 1 (которая будет также использована в § 3) позволяет свести вопрос о включении $1_D \in A_p$ к вопросу о поведении экспонент $e^{i\lambda\varphi}$ в A_p.

Для вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ и числа $a \in \mathbb{R}$ пусть (x, a) обозначает вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_m, a) \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Пусть I — открытый параллелепипед в $\mathbb{R}^m$ с ребрами, параллельными координатным осям. Пусть φ — непрерывная ограниченная функция на I, причем $\varphi(t) > 0$ при всех $t \in I$. Рассмотрим следующую область G в $\mathbb{R}^{m+1}$

$$G = \{(t, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : t \in I,\ 0 < y < \varphi(t)\}.$$

Всякую область такого вида мы называем правильной областью, порожденной парой (I, φ).

Лемма 1. *Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ — правильная область, порожденная парой (I, φ). Пусть $1 < p < 2$. Включение $1_G \in A_p(\mathbb{R}^{m+1})$ имеет место тогда и только тогда, когда $e^{i\lambda\varphi} \in A_p(\mathbb{R}^m, I)$ для почти всех $\lambda \in \mathbb{R}$, и*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\lambda|^p} \|e^{i\lambda\varphi} - 1\|^p_{A_p(\mathbb{R}^m,I)}\, d\lambda < \infty.$$

Доказательство. Для $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ определим функцию F_λ на $\mathbb{R}^m$, полагая

$$F_\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{-i\lambda}(e^{-i\lambda\varphi(t)} - 1), & \text{если } t \in I, \\ 0, & \text{если } t \in \mathbb{R}^m \setminus I. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\widehat{1_G}(u, \lambda) = \widehat{F_\lambda}(u), \qquad (u, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0.$$

Действительно, прямое вычисление дает

$$\widehat{1_G}(u, \lambda) = \int\limits_{t\in I}\int\limits_{0<y<\varphi(t)} e^{-i(u,t)}e^{-i\lambda y}dtdy = \int_I \left(\int_0^{\varphi(t)} e^{-i\lambda y}dy\right)e^{-i(u,t)}dt =$$

$$= \int_I \frac{1}{-i\lambda}(e^{-i\lambda\varphi(t)} - 1)e^{-i(u,t)}dt = \widehat{F_\lambda}(u).$$

Таким образом, $1_G \in A_p(\mathbb{R}^{m+1})$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbb{R}} \|F_\lambda\|^p_{A_p(\mathbb{R}^m)} d\lambda < \infty.$$

Остается лишь учесть, что

$$\|F_\lambda\|_{A_p(\mathbb{R}^m)} = \frac{1}{|\lambda|}\|e^{i\lambda\varphi} - 1\|^\circ_{A_p(\mathbb{R}^m,I)},$$

где $\|\cdot\|^\circ_{A_p(\mathbb{R}^m,I)}$ — эквивалентная норма в $A_p(\mathbb{R}^m, I)$, определенная выше (см. (3)). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что вопреки утверждению теоремы $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$.

Мы можем окружить каждую точку x границы ∂D открытым параллелепипедом $\Pi_x \ni x$ столь малым, что пересечение $D \cap \Pi_x$ является правильной областью после подходящего вращения и сдвига. Извлечем из покрытия $\{\Pi_x,\ x \in \partial D\}$ границы ∂D конечное подпокрытие. Заметим, что образом $\nu_D(\partial D)$ границы ∂D при нормальном отображении ν_D является вся единичная сфера

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\},$$

поэтому, по крайней мере, для одного из параллелепипедов Π_x, который мы обозначим через Π, имеем

$$|\nu_D(\partial D \cap \Pi)|_{S^{n-1}} > 0, \tag{5}$$

где $|E|_{S^{n-1}}$ — обозначает сферическую меру множества $E \subseteq S^{n-1}$. Рассмотрим область $G = D \cap \Pi$. Поскольку характеристическая функция любого параллелепипеда является L^p -мультипликатором, имеем $1_G = 1_\Pi \cdot 1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$. Заменяя, если нужно, область G ее копией, полученной вращением и сдвигом, можем считать, что G— правильная область. Эта область порождена парой (I, φ), где I — некоторый параллелепипед в $\mathbb{R}^m$, $m+1 = n$, с ребрами, параллельными координатным осям, и φ — некоторая функция из $C^{1,\omega}(I)$.

Легко увидеть, что условие (5) влечет невырожденность градиента функции φ на I, т.е. условие $|\nabla\varphi(I)| > 0$. В самом деле (напомним, что если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ и $a \in \mathbb{R}$, то (x, a) обозначает вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_m, a) \in \mathbb{R}^{m+1}$), рассмотрим отображение

$$\beta(t) = (t, \varphi(t)), \qquad t \in I,$$

(β отображает I на график функции φ). Нормаль ν_D и градиент $\nabla\varphi$ функции φ связаны соотношением

$$\nu_D \circ \beta(t) = \frac{1}{\sqrt{|\nabla\varphi(t)|^2 + 1}}(-\nabla\varphi(t), 1), \qquad t \in I.$$

Таким образом, полагая

$$\gamma(\xi) = \frac{1}{\sqrt{|\xi|^2 + 1}}(-\xi, 1), \qquad \xi \in \mathbb{R}^m,$$

имеем $\nu_D \circ \beta = \gamma \circ \nabla\varphi$. Поэтому для множества $W = \triangledown\varphi(I)$ получаем

$$\gamma(W) = \gamma(\nabla\varphi(I)) = \nu_D \circ \beta(I) = \nu_D(\partial D \cap \Pi),$$

и соотношение (5) влечет $|\gamma(W)|_{S^{n-1}} > 0$. Поскольку γ — это диффеоморфизм $\mathbb{R}^m$ на верхнюю полусферу

$$S^m_+ = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : |x| = 1,\ x_{m+1} > 0\}$$

(где $m + 1 = n$), видим, что $|W| > 0$.

Мы видим, таким образом, что правильная область G порождена парой (I, φ), где $\varphi \in C^{1,\omega}(I)$ — функция с невырожденным градиентом, и вместе с тем, $1_G \in A_p(\mathbb{R}^{m+1})$.

По лемме 1 имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\lambda|^p} \|e^{i\lambda\varphi} - 1\|^p_{A_p(\mathbb{R}^m, I)}\, d\lambda < \infty,$$

откуда

$$\int_{\lambda\geq 1} \frac{1}{\lambda^p} \|e^{i\lambda\varphi} - 1\|^p_{A_p(\mathbb{R}^m, I)} d\lambda < \infty,$$

и, поскольку $1 \in A_p(\mathbb{R}^m, I),\ p > 1$, мы видим, что

$$\int_1^\infty \frac{1}{\lambda^p} \|e^{i\lambda\varphi}\|^p_{A_p(\mathbb{R}^m, I)} d\lambda < \infty.$$

Отсюда, полагая $V = I$ в оценке (4), получаем

$$\int_1^\infty \lambda^{m-p} \Big(\chi^{-1}\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)\Big)^{mp} d\lambda < \infty,$$

т.е. (напомним, что $m = n - 1$)

$$\int_1^\infty \lambda^{n-1-p} \Big(\chi^{-1}\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)\Big)^{(n-1)p} d\lambda < \infty.$$

Следующая лемма, имеющая чисто технический характер, завершает доказательство теоремы.

Лемма 2. *Пусть $n \geq 2,\ 1 < p < 2$. Следующие условия эквивалентны:*

1)
$$\int_1^\infty \lambda^{n-1-p}\left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{(n-1)p} d\lambda < \infty;$$

2)
$$\int_0^1 \frac{\delta^{n(p-1)-1}}{(\omega(\delta))^{n-p}} d\delta < \infty.$$

Разумеется, чтобы завершить доказательство теоремы достаточно убедиться, что 1) $\Rightarrow$ 2). Обратная импликация при $n = 2$ потребуется ниже, в § 3.

Доказательство леммы 2. При $0 < \varepsilon < 1$ положим

$$I(\varepsilon) = \int_{1/\chi(1)}^{1/\chi(\varepsilon)} \lambda^{n-1-p}\left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{(n-1)p} d\lambda, \qquad J(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{\delta^{n(p-1)-1}}{(\omega(\delta))^{n-p}} d\delta.$$

Имеем
$$I(\varepsilon) = \frac{1}{n-p}\int_{1/\chi(1)}^{1/\chi(\varepsilon)} \left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{(n-1)p} d\lambda^{n-p}.$$
После замены переменной $\lambda = 1/\chi(\delta)$ и интегрирования по частям получаем
$$I(\varepsilon) = \frac{1}{n-p}\left(\frac{\varepsilon^{n(p-1)}}{(\omega(\varepsilon))^{n-p}} - \frac{1}{(\omega(1))^{n-p}}\right) + \frac{(n-1)p}{n-p} J(\varepsilon). \tag{6}$$

Пользуясь этим соотношением, видим, что

$$I(\varepsilon) \geq \frac{-1}{(n-p)(\omega(1))^{n-p}} + \frac{(n-1)p}{n-p} J(\varepsilon),$$

поэтому 1) $\Rightarrow$ 2).

Обратно, пусть выполнено условие 2). Тогда, поскольку

$$\int_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} \frac{\delta^{n(p-1)-1}}{(\omega(\delta))^{n-p}} d\delta \geq \frac{1}{(\omega(\varepsilon))^{n-p}} \int_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} \delta^{n(p-1)-1} d\delta \geq c_{n,p} \frac{\varepsilon^{n(p-1)}}{(\omega(\varepsilon))^{n-p}},$$

имеем
$$\frac{\varepsilon^{n(p-1)}}{(\omega(\varepsilon))^{n-p}} \to 0, \quad \varepsilon \to +0,$$

и в силу соотношения (6) получаем условие 1). Лемма, а с ней и теорема доказаны.

Замечание 2. Теорема 2 (и вытекающее из нее следствие 1) имеет локальный характер. Эта теорема остается в силе, если предполагать, что лишь часть границы области D, т.е. пересечение $B \cap \partial D$, где B — некоторая окрестность в $\mathbb{R}^n$, является $C^{1,\omega}$ -гладкой и нормальное отображение ν, определенное на $B \cap \partial D$, невырождено, т.е. $|\nu(B \cap \partial D)|_{S^{n-1}} > 0$. При этом условие ограниченности области D можно заменить более слабым условием $|D| < \infty$. (Модификация доказательства очевидна.)

При $n = 2$ условие невырожденности нормального отображения на $B \cap \ \partial D$ означает, что $B \cap \partial D$ не является прямолинейным интервалом.

§ 3. Области в $\mathbb{R}^2$

Здесь для каждого класса $C^{1,\omega}$ (при некотором простом условии, наложенном на ω) мы построим ограниченную область $D \subseteq \mathbb{R}^2$ с $C^{1,\omega}$ -гладкой границей, такую, что характеристическая функция 1_D принадлежит A_p при p настолько близких к 1, насколько позволяет теорема 2. При этом можно добиться, чтобы граница области D не содержала прямолинейных отрезков (таким образом, эта область существенно отличается от многоугольников).

В соответствии с теоремой 2, если D — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial D \in C^{1,\omega}$ и

$$\int_0^1 \frac{\delta^{2p-3}}{\omega(\delta)^{2-p}} d\delta = \infty,$$

то $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^2)$. В частности, это так, если $\partial D \in C^{1,\alpha}$ и $p \leq 1 + \alpha/(2+\alpha)$. Следующая теорема показывает, что этот результат является точным.

Теорема 3. *Пусть $\omega(2\delta) < 2\omega(\delta)$ при всех достаточно малых $\delta > 0$. Существует ограниченная область $D \subseteq \mathbb{R}^2$ с $C^{1,\omega}$ -гладкой границей такая, что $1_D \in A_p(\mathbb{R}^2)$ при всех p, $1 < p < 2$, для которых*

$$\int_0^1 \frac{\delta^{2p-3}}{\omega(\delta)^{2-p}} d\delta < \infty. \tag{7}$$

Кроме того, граница области D не содержит отрезков.

Из этой теоремы немедленно вытекают приведенные ниже следствия.

Следствие 3. *Для любого* α, $0<\alpha<1$, *существует ограниченная область* $D\subseteq\mathbb{R}^2$ *с* $C^{1,\alpha}$ *-гладкой границей такая, что* $1_D\in A_p(\mathbb{R}^2)$ *при всех* $p>1+\alpha/(2+\alpha)$. *Граница области* D *не содержит отрезков.*

Следствие 4. *Существует ограниченная область* $D\subseteq\mathbb{R}^2$ *с* C^1 *-гладкой границей такая, что* $1_D\in\bigcap_{p>1}A_p(\mathbb{R}^2)$. *Граница области* D *не содержит отрезков.*

Последнее следствие, в частности, показывает, что случай C^1 -гладкой границы принципиально отличен от C^2 -гладкого случая. Как мы видели в § 2, характеристическая функция ограниченной области с C^2 -гладкой границей не может принадлежать всем A_p, $p>1$. Критическое значение показателя интегрируемости в плоском случае равно $4/3$.

Отметим еще, что из теорем 2, 3 следует, что область $D\subseteq\mathbb{R}^2$ со свойствами $\partial D\in C^{1,\omega}$ и $1_D\in\bigcap_{p>1}A_p(\mathbb{R}^2)$ существует тогда и только тогда, когда $\omega(\delta)$ стремится к 0 медленнее любой степени, т.е., когда $\lim_{\delta\to+0}\omega(\delta)/\delta^\varepsilon=\infty$ при всех $\varepsilon>0$. Теорема 2 влечет необходимость этого условия, теорема 3 — его достаточность [2].

Автору неизвестно верны ли аналогичные результаты для областей в $\mathbb{R}^n$ при $n\geq 3$.

Доказательство теоремы 3. Доказательство опирается на теорему 3 главы 1 (см. § 3) о медленном росте норм экспонент $e^{i\lambda\varphi(t)}$ в пространствах $A_p(\mathbb{T})$. Напомним, что $\|f\|_{A_p(\mathbb{T})}=\|\widehat{f}\|_{l^p(\mathbb{Z})}$.

При $p>1$ положим

$$\Theta_p(y)=\left(\int_1^y\left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)^p d\tau\right)^{1/p},\qquad y>1,$$

где как и выше χ^{-1} — функция, обратная к $\chi(\delta)=\delta\omega(\delta)$.

Согласно теореме 3 главы 1, в предположении, что при всех достаточно малых $\delta>0$ выполняется условие $\omega(2\delta)<2\omega(\delta)$, существует нигде не линейная (т.е. не являющаяся линейной ни на каком интервале) вещественная функция φ на окружности $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ такая, что $\varphi\in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ (т.е. φ есть 2π -периодическая функция класса $C^{1,\omega}(\mathbb{R})$), и при всех p, $1<p<2$, мы имеем

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})}\leq c_p\Theta_p(|\lambda|),\qquad \lambda\in\mathbb{R},\quad |\lambda|\geq 2. \tag{8}$$

[2] См. подстрочное примечание на стр. 73.

Ясно, что из оценки (8) мы имеем

$$\|e^{i\lambda\varphi}-1\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_p\Theta_p(|\lambda|), \qquad \lambda\in\mathbb{R}, \quad |\lambda|\geq 2. \tag{9}$$

Ясно также, что для любой непрерывно дифференцируемой функции f на $\mathbb{T}$ мы имеем $f\in A_1(\mathbb{T})$ и

$$\|f\|_{A_1(\mathbb{T})} \leq c\|f\|_{C^1(\mathbb{T})},$$

где

$$\|f\|_{C^1(\mathbb{T})} = \max_{t\in\mathbb{T}}|f(t)| + \max_{t\in\mathbb{T}}|f'(t)|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\|e^{i\lambda\varphi}-1\|_{A_p(\mathbb{T})} &\leq \|e^{i\lambda\varphi}-1\|_{A_1(\mathbb{T})} \leq \\ &\leq c\|e^{i\lambda\varphi}-1\|_{C^1(\mathbb{T})} \leq c_\varphi|\lambda|, \qquad \lambda\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{10}$$

Рассмотрим следующее множество Q на прямой $\mathbb{R}$:

$$Q=\{t\in(0,2\pi):\varphi'(t)>0\}.$$

Поскольку $\varphi\neq\mathrm{const}$ и $\varphi(0)=\varphi(2\pi)$, ясно, что $Q\neq\varnothing$ и $Q\neq(0,2\pi)$. Рассмотрим какой-то интервал (a,b), являющийся компонентой связности множества Q. По крайней мере в одном конце этого интервала производная φ' равна нулю. Мы можем считать, что в правом, т.е. $\varphi'(b)=0$, в противном случае вместо $\varphi(t)$ и интервала (a,b) рассмотрим функцию $-\varphi(-t)$ и интервал $(-b,-a)$. Выберем теперь произвольно точку c, $a<c<b$. Заменяя функцию $\varphi(t)$ на $\varphi(t)-\varphi(c)$, мы можем считать, что $\varphi(c)=0$. Положим $I=(c,b)$.

Таким образом, получаем нигде не линейную функцию $\varphi\in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$, удовлетворяющую условиям (9), (10), и интервал $I=(c,b)\subseteq[0,2\pi]$ такой, что $\varphi(c)=0$, функция φ строго возрастает на I и, кроме того, $\varphi'(c)>0$, $\varphi'(b)=0$.

Напомним принцип переноса (теорему Планшереля–Пойа [64, § 44]), уже использованный нами ранее в главе 1. Если f есть 2π -периодическая функция и f^* — ее сужение на $[0,2\pi]$, продолженное нулем на $\mathbb{R}$, т.е. $f^*=f$ на $[0,2\pi]$, $f^*=0$ на $\mathbb{R}\setminus[0,2\pi]$, то $f\in A_p(\mathbb{T})$ тогда и только тогда, когда $f^*\in A_p(\mathbb{R})$, причем

$$c_1(p)\|f^*\|_{A_p(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_2(p)\|f^*\|_{A_p(\mathbb{R})}.$$

Таким образом, из оценок (9) и (10) получаем при всех p, $1<p<2$,

$$\|e^{i\lambda\varphi}-1\|_{A_p(\mathbb{R},I)} \leq c_p\Theta_p(|\lambda|), \qquad \lambda\in\mathbb{R}, \quad |\lambda|\geq 2, \tag{11}$$

и, соответственно,

$$\|e^{i\lambda\varphi}-1\|_{A_p(\mathbb{R},I)} \le c|\lambda|, \qquad \lambda\in\mathbb{R}. \tag{12}$$

Рассмотрим правильную область $G\subseteq\mathbb{R}^2$, порожденную парой (I,φ).

Лемма 3. *При всех p, $1<p<2$, для которых выполнено условие* (7), *имеем* $1_G\in A_p(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Легко убедиться, что условие (7) влечет

$$\int_1^\infty \frac{1}{\lambda^p}(\Theta_p(\lambda))^p d\lambda<\infty. \tag{13}$$

Действительно, при любом $a>1$, интегрируя по частям, получаем

$$\int_1^a \frac{1}{\lambda^p}(\Theta_p(\lambda))^p d\lambda = \frac{1}{-p+1}\int_1^a (\Theta_p(\lambda))^p d\lambda^{-p+1} =$$

$$= \frac{1}{-p+1}\left((\Theta_p(a))^p a^{-p+1} - \int_1^a \lambda^{-p+1}\left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^p d\lambda\right) \le$$

$$\le \frac{1}{p-1}\int_1^a \lambda^{-p+1}\left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^p d\lambda,$$

и, пользуясь леммой 2 при $n=2$, получаем (13).

Следовательно (см. (11), (13)),

$$\int_{|\lambda|\ge 2}\frac{1}{|\lambda|^p}\|e^{i\lambda\varphi}-1\|^p_{A_p(\mathbb{R},I)}d\lambda<\infty.$$

Вместе с тем (см. (12))

$$\int_{|\lambda|<2}\frac{1}{|\lambda|^p}\|e^{i\lambda\varphi}-1\|^p_{A_p(\mathbb{R},I)}d\lambda<\infty.$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{|\lambda|^p}\|e^{i\lambda\varphi}-1\|^p_{A_p(\mathbb{R},I)}d\lambda<\infty.$$

Остается воспользоваться леммой 1. Лемма 3 доказана.

Завершим доказательство теоремы 3. Построенная нами область $G\subseteq\mathbb{R}^2$ имеет вид

$$G=\{(t,y): c<t<b,\ 0<y<\varphi(t)\},$$

где $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{R})$ — нигде не линейная функция. Напомним, что в соответствии с нашим построением $\varphi(c) = 0$ и функция φ строго возрастает на интервале (c, b). Кроме того, $\varphi'(c) > 0$, $\varphi'(b) = 0$. По лемме 3 при всех p, для которых выполнено условие (7), имеем $1_G \in A_p(\mathbb{R}^2)$. Растягивая (или сжимая) область G по вертикали при помощи аффинного преобразования плоскости, мы можем считать, что $\varphi'(c) = 1$. Пусть G^* — область, симметричная области G относительно прямой $t = b$. Положим $W = G \cup G^* \cup \xi$, где ξ — интервал с концами в точках $(b, 0)$ и $(b, \varphi(b))$. Возьмем теперь квадрат $\Pi \subseteq \mathbb{R}^2$ со стороной, равной $2(b - c)$. Искомую область D получим беря четыре жесткие копии области W (т.е. копии, полученные вращением и сдвигом) и приклеивая их к сторонам квадрата Π с его внешней стороны. Теорема доказана.

Замечание 3. Теорема 3 допускает следующую модификацию. Утверждение о том, что граница области D не содержит отрезков можно заменить на утверждение, что область D является выпуклой. Можно ли добиться выполнения этих условий одновременно автору не известно. Указанная модификация следует из того, что оценка (8) верна для некоторой (вещественной) непостоянной функции $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ такой, что интервал $(0, 2\pi)$ является объединением трех интервалов, на каждом из которых производная φ' монотонна. Функция с этими свойствами была построена нами в главе 1 (см. построения, непосредственно предшествующие доказательству теоремы 3 главы 1).

Сказанное, разумеется, относится и к следствиям из теоремы 3 (следствия 3, 4). В частности, неясно существует ли строго выпуклая область $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с C^1 -гладкой границей, такая, что $1_D \in \bigcap_{p>1} A_p(\mathbb{R}^n)$. (Мы называем область строго выпуклой, если она является выпуклой и ее граница не содержит отрезков.)

Глава 3

Устойчивость непрерывных функций в некоторых пространствах, связанных с рядами Фурье

В этой главе мы вновь рассматриваем функции на окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ и их ряды Фурье

$$f(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{ikt}. \qquad (1)$$

Пусть $C(\mathbb{T})$ — класс непрерывных (комплекснозначных) функций на $\mathbb{T}$. Будем рассматривать некоторые пространства $\mathbb{X}$ функций на $\mathbb{T}$, естественным образом связанные с разложением (1), и изучать следующий вопрос об устойчивости непрерывных функций в этих пространствах: какие функции $f \in C(\mathbb{T})$ обладают тем свойством, что для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя суперпозиция $f \circ h$ принадлежит $\mathbb{X}$?

В качестве пространств $\mathbb{X}$ будут рассматриваться уже встречавшиеся нам пространства $A_p(\mathbb{T}),\ 1 \le p < 2$, пространства Соболева $W_2^\lambda(\mathbb{T}),\ \lambda > 0$, функций $f \in L^1(\mathbb{T})$ таких, что

$$\|f\|_{W_2^\lambda} = |\widehat{f}(0)| + \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2|k|^{2\lambda}\right)^{1/2} < \infty,$$

а также пространства функций с заданным распределением коэффициентов Фурье и некоторые другие пространства.

Существенную роль в вопросах об устойчивости играют инварианты такие, как вариация, модуль вариации, квадратичная вариация и модуль квадратичной вариации.

Пусть f — функция на окружности $\mathbb{T}$. Через $V(f)$ обозначим ее вариацию:

$$V(f) = \sup \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)|,$$

где верхняя грань берется по всем n и всевозможным наборам попарно непересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subset \mathbb{T},\ j = 1, 2, \ldots, n$. Модуль вариации $V(f, n)$ функции f определяется следующим образом[1]:

$$V(f, n) = \sup \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)|,$$

[1] Модуль вариации введен Чантурией [82] и независимо Севастьяновым [68].

где n фиксировано и верхняя грань берется по всевозможным наборам попарно непересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subset \mathbb{T},\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Квадратичная вариация $V_2(f)$ определяется соотношением

$$V_2(f) = \sup \Big(\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)|^2 \Big)^{1/2},$$

где верхняя грань берется по всем n и всем наборам попарно непересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subset \mathbb{T},\ j = 1, 2, \ldots, n$. Определим модуль квадратичной вариации $V_2(f, n),\ n = 1, 2, \ldots$, функции f, полагая

$$V_2(f, n) = \sup \Big(\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)|^2 \Big)^{1/2},$$

где n фиксировано и верхняя грань берется по всевозможным наборам из n попарно непересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subset \mathbb{T},\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Стандартным образом будем отождествлять интегрируемые функции на $\mathbb{T}$ с функциями на интервале $[-\pi, \pi]$.

§ 1. Необходимое условие устойчивости

Здесь, мы получим две общие теоремы об устойчивости. Первая — основная — дает необходимое инвариантное условие устойчивости для достаточно широкого класса пространств функций на окружности $\mathbb{T}$. Во второй указаны условия, выполнение которых для пространства функций на $\mathbb{T}$ означает, что в нем нет нетривиальных устойчивых функций, т.е. устойчивыми являются лишь постоянные. В дальнейшем, в §§ 2, 3, мы дадим приложения этих общих теорем к конкретным пространствам.

Пусть $\mathbb{X}$ — линейное нормированное пространство функций на окружности $\mathbb{T}$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$. Будем рассматривать пространства, обладающие следующими свойствами:

(a) $\mathbb{X} \subseteq L^1(\mathbb{T})$ (как обычно, мы отождествляем функции, совпадающие почти всюду);

(b) если $g \in \mathbb{X},\ f \in L^1(\mathbb{T})$ и $|\widehat{f}(k)| \leq |\widehat{g}(k)|$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, то $f \in \mathbb{X}$ и $\|f\|_{\mathbb{X}} \leq \|g\|_{\mathbb{X}}$;

(c) если последовательность функций $f_n \in \mathbb{X},\ n = 1, 2, \ldots$, сходится в $L^1(\mathbb{T})$ к функции f и $\|f_n\|_{\mathbb{X}} \leq c,\ n = 1, 2, \ldots$, то $f \in \mathbb{X}$ и $\|f\|_{\mathbb{X}} \leq c$;

(d) при любом $n \in \mathbb{Z}$ оператор $Q_n : f \to e_n f$ умножения на экспоненту $e_n(t) = e^{int},\ t \in \mathbb{T}$, является ограниченным оператором в $\mathbb{X}$, и существует $\sigma \geq 0$ такое, что $\|Q_n\| = O(|n|^\sigma),\ |n| \to \infty$;

(e) характеристическая функция 1_I любого интервала $I \subseteq \mathbb{T}$ принадлежит $\mathbb{X}$.

Простыми примерами таких пространств являются пространства $A_p,\ 1 < p < 2$, и пространства Соболева $W_2^\lambda,\ 0 < \lambda < 1/2$.

Для произвольного пространства $\mathbb{X}$ со свойствами (a)–(e) положим

$$\alpha_{\mathbb{X}}(\delta) = \|1_{(-\delta,\ \delta)}\|_{\mathbb{X}}\ , \quad 0 < \delta \le \pi.$$

Теорема 1. *Пусть линейное нормированное пространство $\mathbb{X}$ функций на окружности $\mathbb{T}$ обладает свойствами* (a)–(e). *Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. Предположим, что для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя суперпозиция $f \circ h$ принадлежит $\mathbb{X}$. Тогда*

$$V_2(f, n) = O\biggl(\frac{1}{\alpha_{\mathbb{X}}(1/n)}\biggr), \qquad n \to \infty.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть I — произвольный (невырожденный) интервал (неважно — открытый, замкнутый или полуоткрытый), содержащийся в $(-\pi, \pi)$, и I^0 — интервал длины $|I|/2$ с тем же центром, что и I. Пусть χ_I — некоторая функция на $\mathbb{T}$, равная 1 на I^0 и равная 0 на $[-\pi, \pi] \setminus I$, такая, что $0 \le \chi_I(t) \le 1$ при всех t, и оператор умножения на χ_I является ограниченным оператором в $\mathbb{X}$. Всякую такую функцию χ_I назовем срезающей функцией интервала I. Нам потребуется следующая

Лемма 1. *Пусть линейное нормированное пространство $\mathbb{X}$ функций на $\mathbb{T}$ обладает свойствами* (a), (c), (d). *Тогда для любого интервала $I \subseteq (-\pi, \pi)$ существует срезающая функция χ_I такая, что для любой функции $g \in \mathbb{X}$ имеем $\|\chi_I g\|_{\mathbb{X}} \le c(|I|)\|g\|_{\mathbb{X}}$, где $c(|I|)$ зависит только от длины $|I|$ интервала I.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon = |I|/2$, и γ — центр интервала I. Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию χ_ε на $\mathbb{T}$, равную 1 на $[-\varepsilon/2,\ \varepsilon/2]$, равную 0 на $[-\pi, \pi] \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$ и такую, что $0 \le \chi_\varepsilon(t) \le 1$ при всех t. Положим $\chi_I(t) = \chi_\varepsilon(t - \gamma)$. Тогда $|\widehat{\chi_I}(k)| = |\widehat{\chi_\varepsilon}(k)|,\ k \in \mathbb{Z}$. Через $S_N(\chi_I)$ обозначим N -ую частичную сумму ряда Фурье функции χ_I. Пусть $g \in \mathbb{X}$. По свойству (d) имеем $e_n g \in \mathbb{X}$ и

$$\|e_n g\|_{\mathbb{X}} \le (c|n|^\sigma + 1)\|g\|_{\mathbb{X}}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

где $c > 0$ не зависит от n и g. Поэтому $S_N(\chi_I)g \in \mathbb{X}$ и

$$\|S_N(\chi_I)g\|_{\mathbb{X}} = \Big\| \sum_{|n|\le N} \widehat{\chi_I}(n) e_n g \Big\|_{\mathbb{X}} \le \sum_{|n|\le N} |\widehat{\chi_I}(n)| \; \|e_n g\|_{\mathbb{X}} \le$$

$$\le \sum_{|n|\le N} |\widehat{\chi_\varepsilon}(n)| (c|n|^\sigma + 1)\|g\|_{\mathbb{X}} \le \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\chi_\varepsilon}(n)|(c|n|^\sigma + 1) \right) \|g\|_{\mathbb{X}} = c(\varepsilon)\|g\|_{\mathbb{X}}.$$

Вместе с тем, поскольку $g \in L^1(\mathbb{T})$ (см. свойство (a)) и последовательность $S_N(\chi_I)$, $N = 1, 2, \ldots$, сходится к χ_I в пространстве $L^\infty(\mathbb{T})$, видим, что последовательность $S_N(\chi_I)g$ сходится к $\chi_I g$ в $L^1(\mathbb{T})$. Учитывая свойство (c), получаем $\chi_I g \in \mathbb{X}$ и $\|\chi_I g\|_{\mathbb{X}} \le c(\varepsilon)\|g\|_{\mathbb{X}}$. Лемма доказана.

Пусть I и Δ — два произвольных отрезка, содержащихся в $(-\pi, \pi)$. Пусть φ — возрастающий гомеоморфизм отрезка I на отрезок Δ. Тогда φ может быть продолжен до гомеоморфизма окружности на себя. (Например мы можем продолжить φ до гомеоморфизма отрезка $[-\pi, \pi]$ на себя. Всякий такой гомеоморфизм, в свою очередь, порождает гомеоморфизм окружности.) В предположениях теоремы относительно f положим

$$\rho(I, \Delta) = \sup_{\varphi : I \to \Delta} \inf_{h|_I = \varphi} \|f \circ h\|_{\mathbb{X}}, \tag{2}$$

где верхняя грань берется по всем возрастающим гомеоморфизмам φ отрезка I на отрезок Δ, а нижняя грань берется по всем гомеоморфизмам h окружности $\mathbb{T}$ на себя, совпадающим с φ на I.

Как и выше, через I^0 мы обозначаем интервал длины $|I|/2$ с тем же центром, что и I. Через $\{-1; 1\}^n$ мы обозначаем множество всевозможных последовательностей $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_j = \pm 1$.

Лемма 2. *Предположим, что линейное нормированное пространство $\mathbb{X}$ функций на $\mathbb{T}$ обладает свойствами* (a), (c), (d), *и $f \in C(\mathbb{T})$ — функция такая, что $f \circ h \in \mathbb{X}$ для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$. Пусть I и Δ — отрезки, содержащиеся в $(-\pi, \pi)$ такие, что $\rho(I, \Delta) < \infty$. Пусть $I_1, I_2, \ldots, I_n$ — попарно непересекающиеся интервалы, содержащиеся в I^0, занумерованные в порядке следования на $(-\pi, \pi)$ слева направо. Пусть a_j, b_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, — точки из Δ, такие, что $a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \ldots \le a_n < b_n$. Положим $\omega_j = f(b_j) - f(a_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для любой последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n$ функция*

$$g_\varepsilon = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \omega_j 1_{I_j}$$

принадлежит $\mathbb{X}$ *и* $\|g_\varepsilon\|_{\mathbb{X}} \le c(|I|)\rho(I,\Delta)$, *где* $c(|I|)$ *зависит только от длины* $|I|$ *отрезка* I.

Доказательство. Считая, что $I=[A,B]$, рассмотрим точки $t_j,\ j=0,1,\dots,N$, с условием

$$A=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_N=B$$

и точки $\theta_j,\ j=1,2,\dots,N$, из Δ такие, что

$$\theta_1\le\theta_2\le\ldots\le\theta_N.$$

Определим кусочно постоянную функцию G на $\mathbb{T}$, полагая $G(t)=f(\theta_j)$ при $t_{j-1}\le t<t_j,\ j=1,2,\dots,N$, и $G(t)=0$ при $-\pi\le t<A$ и $B\le t<\pi$. Класс всех функций G такого вида, соответствующих различным N и различным наборам точек $\{t_j\},\ \{\theta_j\}$, обозначим через Ω.

Заметим сначала, что если $G\in\Omega$, то

$$\chi_I G\in\mathbb{X},\qquad \|\chi_I G\|_{\mathbb{X}}\le 2c(|I|)\rho(I,\Delta), \tag{3}$$

где χ_I — срезающая функция из леммы 1. Действительно, определим функцию φ на интервале $[A,B)$, полагая $\varphi(t)=\theta_j$ при $t_{j-1}\le t<t_j,\quad j=1,2,\dots,N$. Тогда на $[A,B)$ имеем $G=f\circ\varphi$. Ясно, что существует последовательность $\varphi_\nu,\ \nu=1,2,\dots$, возрастающих гомеоморфизмов отрезка I на отрезок Δ, сходящаяся к φ поточечно во внутренности (A,B) отрезка I. Каждый гомеоморфизм φ_ν можно продолжить до гомеоморфизма h_ν окружности так, что $\|f\circ h_\nu\|_{\mathbb{X}}\le 2\rho(I,\Delta)$ и, следовательно,

$$\|\chi_I\cdot(f\circ h_\nu)\|_{\mathbb{X}}\le 2c(|I|)\rho(I,\Delta). \tag{4}$$

Поскольку последовательность функций $f\circ\varphi_\nu,\ \nu=1,2,\dots$, ограничена в $L^\infty(I)$ и на (A,B) сходится поточечно к $f\circ\varphi=G$, мы имеем

$$\|f\circ\varphi_\nu-G\|_{L^1(I)}\to 0,\qquad \nu\to\infty,$$

следовательно,

$$\|\chi_I\cdot(f\circ h_\nu)-\chi_I G\|_{L^1(\mathbb{T})}=\|\chi_I\cdot(f\circ h_\nu-G)\|_{L^1(\mathbb{T})}\le$$

$$\le\|f\circ h_\nu-G\|_{L^1(I)}=\|f\circ\varphi_\nu-G\|_{L^1(I)}\to 0.$$

С учетом оценки (4) в соответствии со свойством (c) получаем соотношения (3).

Заметим далее, что для доказательства леммы достаточно рассмотреть случай, когда при всех j мы имеем $\varepsilon_j = +1$, поскольку в общем случае мы можем записать $g_\varepsilon = g_\varepsilon^+ - g_\varepsilon^-$, где

$$g_\varepsilon^+ = \sum_{j:\ \varepsilon_j=+1} \omega_j 1_{I_j}, \qquad g_\varepsilon^- = \sum_{j:\ \varepsilon_j=-1} \omega_j 1_{I_j}.$$

Заметим также, что ввиду свойства (c) мы можем считать, что интервалы I_j имеют вид $I_j = [A_j,\ B_j),\ A_1 < B_1 < A_2 < B_2 < \ldots < A_n < B_n$.

Пусть $x_0 = A,\ x_n = B$, и при $j = 1, 2, \ldots, n-1$, пусть x_j — какая-то точка, лежащая строго между I_j и I_{j+1}, например, положим $x_j = (B_j +\ A_{j+1})/2,\ j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Рассмотрим две функции $G_1,\ G_2$ на $\mathbb{T}$, заданные на $[-\pi, \pi)$ следующим образом:

$$G_1(t) = \begin{cases} f(a_j), & \text{если } x_{j-1} \le t < A_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ f(b_j), & \text{если } A_j \le t < x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ 0, & \text{если } -\pi \le t < A \text{ или } B \le t < \pi, \end{cases}$$

$$G_2(t) = \begin{cases} f(a_j), & \text{если } x_{j-1} \le t < B_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ f(b_j), & \text{если } B_j \le t < x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ 0, & \text{если } -\pi \le t < A \text{ или } B \le t < \pi. \end{cases}$$

Ясно, что функции $G_1,\ G_2$ принадлежат Ω, поэтому (см. (3)) $\chi_I G_1,\ \chi_I G_2 \in \mathbb{X}$, и $\|\chi_I G_1\|_{\mathbb{X}} \le 2c(|I|)\rho(I, \Delta),\ \|\chi_I G_2\|_{\mathbb{X}} \le 2c(|I|)\rho(I, \Delta)$.

Легко увидеть, что

$$G_1 - G_2 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j 1_{I_j} = g_\varepsilon.$$

Поскольку функция g_ε равна 0 на $[-\pi, \pi] \setminus I^0$, получаем

$$g_\varepsilon = \chi_I g_\varepsilon = \chi_I(G_1 - G_2) = \chi_I G_1 - \chi_I G_2 \in \mathbb{X},$$

и $\|g_\varepsilon\|_{\mathbb{X}} = \|\chi_I G_1 - \chi_I G_2\|_{\mathbb{X}} \le 4c(|I|)\rho(I, \Delta)$. Лемма доказана.

Через $V_2(f, \Delta, n)$ обозначим модуль квадратичной вариации функции f на отрезке $\Delta \subseteq [-\pi, \pi]$, а именно:

$$V_2(f, \Delta, n) = \sup \left(\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)|^2 \right)^{1/2},$$

где n фиксировано и верхняя грань берется по всем наборам попарно не пересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subseteq \Delta,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

Лемма 3. *В предположениях теоремы 1 относительно пространства $\mathbb{X}$ и функции f, для любых двух отрезков I и Δ, содержащихся в $(-\pi, \pi)$, при всех $n = 1, 2, \dots$ имеем*

$$V_2(f, \Delta, n)\alpha_{\mathbb{X}}\left(\frac{1}{n}\right) \le c(|I|)\rho(I, \Delta),$$

где $c(|I|)$ зависит только от длины $|I|$ отрезка I.

Доказательство. Мы можем считать, что $\rho(I, \Delta) < \infty$, иначе доказывать нечего. Фиксируем n. Выберем произвольным образом точки $a_j,\ b_j \in \Delta,\ j = 1, 2, \dots, n,\ a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \dots \le a_n < b_n$, и, как и выше, положим $\omega_j = f(b_j) - f(a_j)$. Пусть $I_1, I_2, \dots, I_n$ — занумерованные слева направо попарно непересекающиеся интервалы, содержащиеся в интервале I^0 длины $|I|/2$, концентрическом с I. Пусть все интервалы $I_1, I_2, \dots, I_n$ имеют одинаковую длину равную $2\delta_n$, которую мы выберем позже так, что

$$0 < 2\delta_n n < \frac{|I|}{2} \tag{5}$$

(это условие гарантирует существование интервалов I_j с указанным свойством).

Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n$. По лемме 2 для функции

$$g_\varepsilon = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \omega_j 1_{I_j}$$

имеем $g_\varepsilon \in \mathbb{X}$ и $\|g_\varepsilon\|_{\mathbb{X}} \le c(|I|)\rho(I, \Delta)$. Определим функцию G_ε ее разложением Фурье:

$$G_\varepsilon(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{g_\varepsilon}(k)| e^{ikt}.$$

Ясно, что для любой последовательности $\varepsilon \in \{-1; 1\}^n$ функция G_ε принадлежит $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$. Учитывая свойство (b) пространства $\mathbb{X}$, видим, что $G_\varepsilon \in \mathbb{X}$ и

$$\|G_\varepsilon\|_{\mathbb{X}} \le \|g_\varepsilon\|_{\mathbb{X}} \le c(|I|)\rho(I, \Delta).$$

Рассмотрим функцию G, получающуюся усреднением функций G_ε по всем наборам знаков $\varepsilon \in \{-1;\ 1\}^n$, а именно

$$G = \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \{-1; 1\}^n} G_\varepsilon.$$

Мы имеем

$$\|G\|_{\mathbb{X}} \le c(|I|)\rho(I,\Delta). \tag{6}$$

При $j = 1, 2, \ldots, n$ пусть γ_j — центр интервала I_j; тогда

$$\widehat{1_{I_j}}(k) = e^{-i\gamma_j k}\left(1_{(-\delta_n,\ \delta_n)}\right)^{\wedge}(k), \qquad k \in \mathbb{Z},$$

и, следовательно,

$$\widehat{g_\varepsilon}(k) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \omega_j e^{-i\gamma_j k}\left(1_{(-\delta_n,\ \delta_n)}\right)^{\wedge}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом,

$$\widehat{G_\varepsilon}(k) = \left|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \omega_j e^{-i\gamma_j k}\right| \left|\left(1_{(-\delta_n,\ \delta_n)}\right)^{\wedge}(k)\right|, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Перейдем в этом соотношении к среднему по расстановкам знаков $\varepsilon_j = \pm 1$, воспользовавшись неравенством Хинчина [81] (см. также [24, гл. 5, § 8])

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\right)^{1/2} \le c_1 \int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{n} a_j r_j(\theta)\right| d\theta,$$

где $r_j(\theta) = \operatorname{sign}(\sin(2^j \pi\theta)),\ j = 1, 2, \ldots,$ — функции Радемахера (константа $c_1 > 0$ не зависит ни от n ни от коэффициентов $\{a_j\}$). Мы получаем

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |\omega_j|^2\right)^{1/2} \left|\left(1_{(-\delta_n,\ \delta_n)}\right)^{\wedge}(k)\right| \le c_1 \widehat{G}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда, учитывая свойство (b), видим, что

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |\omega_j|^2\right)^{1/2} \|1_{(-\delta_n,\ \delta_n)}\|_{\mathbb{X}} \le c_1 \|G\|_{\mathbb{X}}.$$

Вместе с оценкой (6) это влечет

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |\omega_j|^2\right)^{1/2} \alpha_{\mathbb{X}}(\delta_n) \le c_1 c(|I|)\rho(I,\Delta). \tag{7}$$

Выберем теперь δ_n, полагая $\delta_n = 1/(mn)$, где m — целое число такое, что

$$\frac{6}{|I|} \le m < \frac{6}{|I|} + 1. \tag{8}$$

Ясно, что условие (5) выполнено. Разобьем интервал $(-1/n, 1/n)$ на m интервалов длины $2\delta_n$. Каждый из этих интервалов получается сдвигом интервала $(-\delta_n, \delta_n)$, и поскольку из свойства (b) следует, что норма в $\mathbb{X}$ инвариантна относительно сдвига, мы имеем (см. (8))

$$\alpha_{\mathbb{X}}\left(\frac{1}{n}\right) = \|1_{(-1/n,\ 1/n)}\|_{\mathbb{X}} \leq m\|1_{(-\delta_n,\ \delta_n)}\|_{\mathbb{X}} = m\alpha_{\mathbb{X}}(\delta_n) \leq \left(\frac{6}{|I|} + 1\right)\alpha_{\mathbb{X}}(\delta_n).$$

Таким образом, из оценки (7) получаем

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |\omega_j|^2\right)^{1/2} \alpha_{\mathbb{X}}\left(\frac{1}{n}\right) \leq \left(\frac{6}{|I|} + 1\right) c_1 c(|I|)\rho(I, \Delta).$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть f — непрерывная функция на $[-\pi, \pi]$ и $\tau(n)$, $n = 1, 2, \ldots,$ — последовательность положительных чисел. Предположим, что*

$$V_2(f, [-\pi, \pi], n) \neq O(\tau(n)).$$

Тогда для произвольной последовательности положительных чисел d_ν, $\nu = 1, 2, \ldots,$ найдутся последовательность отрезков $\Delta_\nu \subseteq (-\pi, \pi)$, $\nu = 1, 2, \ldots,$ вида $\Delta_\nu = [a_\nu, a_{\nu+1}]$ или вида $\Delta_\nu = [a_{\nu+1}, a_\nu]$ и последовательность целых положительных чисел n_ν, $\nu = 1, 2, \ldots,$ такие, что $V_2(f, \Delta_\nu, n_\nu) > d_\nu \tau(n_\nu)$ при всех $\nu = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Для произвольного отрезка $\Delta \subseteq [-\pi, \pi]$ пусть

$$Q(\Delta, n) = \frac{V_2(f, \Delta, n)}{\tau(n)}.$$

Заметим, что если $-\pi \leq a < b < c \leq \pi$, то

$$V_2(f, [a, c], n) \leq V_2(f, [a, b], n) + V_2(f, [b, c], n),$$

поэтому

$$Q([a, c], n) \leq Q([a, b], n) + Q([b, c], n).$$

Построим по индукции последовательность отрезков I_j, $j = 0, 1, 2, \ldots,$ следующим образом. Положим $I_0 = [-\pi, \pi]$. Мы имеем

$$\sup_n Q(I_0, n) = \infty.$$

Пусть отрезок I_j такой, что

$$\sup_n Q(I_j, n) = \infty \tag{9}$$

уже определен. Определим отрезок I_{j+1}. Пусть $I_j = [l_j,\ r_j]$, и пусть c_j — центр отрезка I_j. Рассмотрим левую и правую половины отрезка I_j, т.е. отрезки $I_j^- = [l_j, c_j]$, $I_j^+ = [c_j, r_j]$. Выполняется по крайней мере одно из соотношений

$$\sup_n Q(I_j^-, n) = \infty, \qquad \sup_n Q(I_j^+, n) = \infty.$$

Если выполнено первое соотношение, то обозначим через I_{j+1} отрезок I_j^-. Если первое соотношение не выполнено, то выполнено второе, и тогда мы полагаем $I_{j+1} = I_j^+$.

По построению мы получаем последовательность вложенных отрезков $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, содержащихся в $[-\pi, \pi]$, такую, что $|I_j| \to 0,\ j \to \infty$, и соотношение (9) выполнено при всех $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Ясно, что пересечение $\bigcap_{j=0}^{\infty} I_j$ содержит единственную точку t_0 и либо для любого отрезка вида $[t_0, a],\ t_0 < a < \pi$, мы имеем

$$\sup_n Q([t_0, a], n) = \infty, \tag{10}$$

либо для любого отрезка $[a, t_0],\ -\pi < a < t_0$, выполняется аналогичное соотношение. Рассмотрим первый случай (второй случай аналогичен).

Выберем $a_1,\ t_0 < a_1 < \pi$, произвольно. Из (10) следует, что можно найти n_1 такое, что

$$Q([t_0, a_1], n_1) > d_1.$$

Поскольку функция f непрерывна, существует $a_2,\ t_0 < a_2 < a_1$, такое, что

$$Q([a_2, a_1], n_1) > d_1.$$

Снова пользуясь (10), найдем n_2 такое, что

$$Q([t_0, a_2], n_2) > d_2.$$

Существует $a_3,\ t_0 < a_3 < a_2$, такое, что

$$Q([a_3, a_2], n_2) > d_2.$$

Продолжая по индукции, получаем требуемую последовательность чисел $\{n_\nu\}$ и отрезков $\{\Delta_\nu\}$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Легко увидеть, что

$$V_2(f, n) \le 2V_2(f, [-\pi, \pi], n)$$

для любой 2π -периодической функции f. Поэтому, допустив, что заключение теоремы не верно, мы будем иметь

$$V_2(f,[-\pi,\pi],n) \neq O\left(\frac{1}{\alpha_{\mathbb{X}}(1/n)}\right), \qquad n \to \infty.$$

Положим

$$\tau(n) = \frac{1}{\alpha_{\mathbb{X}}(1/n)}, \qquad d_\nu = \nu c(2^{-\nu}),$$

где $c(y),\ 0 < y < 2\pi$, та же функция, что в лемме 3. Пользуясь леммой 4, найдем отрезки $\Delta_\nu \subset (-\pi,\pi),\ \nu = 1,2,\dots$, вида $\Delta_\nu = [a_{\nu+1},\ a_\nu]$ (накапливающиеся влево) или вида $\Delta_\nu = [a_\nu,\ a_{\nu+1}]$ (накапливающиеся вправо) и последовательность чисел $n_\nu,\ \nu = 1,2,\dots$, с условием

$$V_2(f,\Delta_\nu,n_\nu) \geq \nu c(2^{-\nu})\frac{1}{\alpha_{\mathbb{X}}(1/n_\nu)}, \qquad \nu = 1,2,\dots. \tag{11}$$

Определим отрезки $I_\nu,\ \nu = 1,2,\dots$, следующим образом. В зависимости от того, накапливаются ли отрезки Δ_ν влево или вправо, полагаем соответственно $I_\nu = [2^{-\nu},\ 2^{-\nu+1}]$ или $I_\nu = [-2^{-\nu+1},\ -2^{-\nu}],\ \nu = 1,2,\dots$. Пользуясь леммой 3, получаем

$$V_2(f,\Delta_\nu,n_\nu) \leq c(2^{-\nu})\rho(I_\nu,\Delta_\nu)\frac{1}{\alpha_{\mathbb{X}}(1/n_\nu)}, \qquad \nu = 1,2,\dots.$$

Вместе с оценкой (11) это влечет $\rho(I_\nu,\Delta_\nu) \geq \nu$ при всех ν. Следовательно (см. (2)), при каждом $\nu = 1,2,\dots$ существует возрастающий гомеоморфизм φ_ν отрезка I_ν на отрезок Δ_ν такой, что если h это гомеоморфизм окружности, совпадающий с φ_ν на I_ν, то $\|f\circ h\|_{\mathbb{X}} \geq \nu/2$. Ясно, что существует гомеоморфизм h отрезка $[-\pi,\pi]$ на себя и, следовательно, гомеоморфизм h окружности $\mathbb{T}$, совпадающий с φ_ν на I_ν при всех $\nu = 1,2,\dots$. Для этого гомеоморфизма соотношение $\|f\circ h\|_{\mathbb{X}} \geq \nu/2$ выполняется при всех $\nu = 1,2,\dots$, что невозможно. Теорема доказана.

Отметим теперь особую роль свойства (e). А именно, покажем, что если пространство $\mathbb{X}$ обладает свойствами (a)–(d), но не обладает свойством (e), то всякая непрерывная функция, остающаяся в $\mathbb{X}$ после любой замены переменной, постоянна. При этом вместо свойства (b) достаточно потребовать, чтобы $\mathbb{X}$ обладало следующим более слабым свойством:

(b$'$) если $f \in \mathbb{X}$, то при любом $\theta \in \mathbb{T}$ функция $f_\theta(t) = f(t+\theta)$ принадлежит $\mathbb{X}$.

Теорема 2. *Пусть линейное нормированное пространство* $\mathbb{X}$ *функций на* $\mathbb{T}$ *обладает свойствами* (a), (b′), (c), (d), *но не обладает свойством* (e). *Пусть* $f \in C(\mathbb{T})$. *Предположим, что для любого гомеоморфизма* h *окружности* $\mathbb{T}$ *на себя суперпозиция* $f \circ h$ *принадлежит* $\mathbb{X}$. *Тогда* $f =$ const.

Как легко увидеть, из этой теоремы немедленно следует, что в пространстве $A(\mathbb{T}) = \{f \in C(\mathbb{T}) : \widehat{f} \in l^1\}$ нет нетривиальных устойчивых функций[2]. Другие приложения теоремы 2 будут получены позже, в § 3.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что вопреки утверждению теоремы функция f не постоянна. Тогда, поскольку f непрерывна, мы можем найти бесконечно много (попарно различных) точек $\theta_j \in (-\pi, \pi)$, $j = 1, 2, \ldots$, таких, что в любой окрестности каждой точки θ_j функция f не постоянна. Переходя, при необходимости, к подпоследовательности, мы можем считать, что последовательность θ_j, $j = 1, 2, \ldots$, сходится. При каждом $j = 1, 2, \ldots$, выбирая достаточно малую окрестность точки θ_j, мы получим последовательность попарно непересекающихся отрезков $I_j \subset (-\pi, \pi)$, $j = 1, 2, \ldots$, таких, что последовательность их центров сходится и ни на каком из них функция f не является постоянной. Если мы предположим, что $\rho(I_j, I_j) = \infty$ при всех $j = 1, 2, \ldots$, то при каждом j найдется возрастающий гомеоморфизм φ_j отрезка I_j на себя такой, что если гомеоморфизм h окружности совпадает с φ_j на I_j, то $\|f \circ h\|_{\mathbb{X}} \geq j$. Определим тогда отображение $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, полагая его равным φ_j на I_j, $j = 1, 2, \ldots$, и равным тождественному на $[-\pi, \pi] \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Мы получим гомеоморфизм h окружности такой, что $\|f \circ h\|_{\mathbb{X}} \geq j$ при всех $j = 1, 2, \ldots$, что невозможно. Таким образом, существует отрезок $I = I_{j_0}$, содержащийся в $(-\pi, \pi)$, такой, что f не постоянна на I и $\rho(I, I) < \infty$. Фиксируем этот отрезок I.

Пусть U — произвольный интервал, $U \subset I^0$ (как и выше I^0 — интервал длины $|I|/2$ концентрический с I). Выберем в I точки a_1, b_1 такие, что $f(a_1) \neq f(b_1)$, и положим $\omega = f(b_1) - f(a_1)$. Пользуясь леммой 2 при $n = 1$, $\Delta = I$ и $I_1 = U$, мы получаем $\omega 1_U \in \mathbb{X}$ и, следовательно, $1_U \in \mathbb{X}$.

Пусть теперь F — произвольный интервал, содержащийся в $(-\pi, \pi)$. Рассмотрим разбиение $F = \bigcup_{k=1}^{N} U_k$ интервала F попарно непересекающимися интервалами U_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, длины меньшей, чем $|I^0|$. Каждый такой интервал U_k получается сдвигом некоторого интервала, содержаще-

[2] Отсутствие нетривиальных устойчивых функций в $A(\mathbb{T})$ было впервые отмечено А. М. Олевским в [58], [59].

гося в I^0, поэтому с учетом свойства (b′) имеем $1_{U_k} \in \mathbb{X}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, и, следовательно, $1_F \in \mathbb{X}$. Отсюда $1_E \in \mathbb{X}$ для любого интервала $E \subseteq \mathbb{T}$, что противоречит предположению теоремы. Теорема доказана.

§ 2. Устойчивое распределение коэффициентов Фурье

Напомним, что слабое пространство l^p, $1 \le p < \infty$, — это пространство последовательностей комплексных чисел $x = \{x_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ таких, что $\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : |x_k| > \lambda\} = O(1/\lambda^p)$, $\lambda \to +0$, где $\operatorname{card} E$ — число элементов (конечного) множества E. Класс функций с последовательностью коэффициентов Фурье из слабого l^p уместно называть слабым A_p.

В этом параграфе мы, в частности, получим критерий устойчивости в слабых пространствах $A_p(\mathbb{T})$.

Будем рассматривать общий случай пространств функций с заданной оценкой распределения коэффициентов Фурье, а именно пространства функций f на окружности $\mathbb{T}$ с условием

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} :\ |\widehat{f}(k)| > \lambda\} = O\left(\frac{1}{\varphi(\lambda)}\right), \qquad \lambda \to +0,$$

где φ — заданная функция.

Потребуем, чтобы функция φ обладала следующими свойствами:

(I) φ строго возрастает и непрерывна на некотором отрезке $[0, \lambda_0]$, $\varphi(0) = 0$ $(\lambda_0 > 0)$;

(II) функция $\varphi(\lambda)/\lambda$ — неубывающая на $(0, \lambda_0]$;

(III) функция

$$G_\varphi(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda} \int_\lambda^{\lambda_0} \frac{dt}{\varphi(t)}$$

почти убывает на $(0, \lambda_0]$, т.е.[3] $G_\varphi(y) \le c G_\varphi(x)$ при $0 < x \le y \le \lambda_0$, где константа $c > 0$ не зависит от x и y.

Через φ^{-1} обозначаем функцию, обратную к φ.

Теорема 3. *Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. В предположении, что φ обладает свойствами* (I)–(III), *следующие условия эквивалентны:*

(i) *для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя имеем*

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} :\ |\widehat{f \circ h}(k)| > \lambda\} = O\left(\frac{1}{\varphi(\lambda)}\right), \qquad \lambda \to +0;$$

[3] Определение почти монотонной функции заимствовано нами из книги [8].

(ii) $V_2(f,n)=O(n\varphi^{-1}(1/n)), \quad n\to\infty.$

Из теоремы 3 немедленно получаем следующие ниже теоремы 4, 5.

Теорема 4. *Пусть $f\in C(\mathbb{T})$. Следующие условия эквивалентны:*
(i) *для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя имеем*

$$\operatorname{card}\{k\in\mathbb{Z}:\ |\widehat{f\circ h}(k)|>\lambda\}=O\biggl(\frac{1}{\lambda}\biggr), \qquad \lambda\to+0;$$

(ii) *функция f имеет ограниченную квадратичную вариацию.*

Теорема 5. *Пусть $1<p<2$. Пусть $f\in C(\mathbb{T})$. Следующие условия эквивалентны:*
(i) *для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя имеем*

$$\operatorname{card}\{k\in\mathbb{Z}:\ |\widehat{f\circ h}(k)|>\lambda\}=O\biggl(\frac{1}{\lambda^p}\biggr), \qquad \lambda\to+0;$$

(ii) $V_2(f,n)=O(n^{1/q})$, $n\to\infty$, *где* $1/p+1/q=1$.

Доказательство теоремы 3. Начнем с "легкой" части доказательства, а именно с импликации (ii)⇒(i). Для этого потребуется следующая далее простая лемма 5, которая будет также использована в § 3 при выводе достаточных условий устойчивости в некоторых других пространствах.

Для произвольной функции $f\in L^2(\mathbb{T})$ положим

$$\Omega_n(f)=\biggl(\sum_{|k|\ge n}|\widehat{f}(k)|^2\biggr)^{1/2}, \qquad n=0,1,2,\dots. \tag{12}$$

Лемма 5. *Пусть f — ограниченная измеримая функция на $\mathbb{T}$. Тогда при всех $n=1,2,\dots$*

$$\Omega_n(f)\le\frac{c}{\sqrt{n}}V_2(f,n),$$

где константа $c>0$ не зависит от n и f.

Доказательство. Для произвольной функции $f\in L^2(\mathbb{T})$ через $\omega_2(f,\delta)$ обозначим ее L^2 -модуль непрерывности:

$$\omega_2(f,\delta)=\sup_{0\le\theta\le\delta}\biggl(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t+\theta)-f(t)|^2dt\biggr)^{1/2}, \qquad \delta>0.$$

Если $0 < \theta \le 1/n$, то при любом $x \in \mathbb{T}$ интервалы

$$\Big(x + \frac{2\pi(k-1)}{n},\ x + \frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta\Big), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

попарно не пересекаются. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t+\theta) - f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{2\pi(k-1)}{n}}^{\frac{2\pi k}{n}} |f(t+\theta) - f(t)|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \Big|f\Big(x + \frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta\Big) - f\Big(x + \frac{2\pi(k-1)}{n}\Big)\Big|^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \sum_{k=1}^{n} \Big|f\Big(x + \frac{2\pi(k-1)}{n} + \theta\Big) - f\Big(x + \frac{2\pi(k-1)}{n}\Big)\Big|^2 dx \le \frac{1}{n}(V_2(f,n))^2.$$

Таким образом,

$$\omega_2\Big(f, \frac{1}{n}\Big) \le \frac{1}{\sqrt{n}} V_2(f,n),$$

и остается воспользоваться хорошо известной оценкой $\Omega_n(f) \le c\omega_2(f, 1/n)$ (см., например, [5, гл. IX, § 2]). Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть f — ограниченная измеримая функция на $\mathbb{T}$. Пусть $V_2(f,n) = O(n\varphi^{-1}(1/n))$, $n \to \infty$, где φ — строго возрастающая непрерывная функция на $[0, \lambda_0]$, $\varphi(0) = 0$ $(\lambda_0 > 0)$. Тогда*

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : |\widehat{f}(k)| > \lambda\} = O\Big(\frac{1}{\varphi(\lambda)}\Big), \qquad \lambda \to +0.$$

Доказательство. Рассмотрим следующие множества в $\mathbb{Z}$:

$$E(f,\lambda) = \{k \in \mathbb{Z} : |\widehat{f}(k)| > \lambda\}, \qquad \lambda > 0,$$

$$I_n = \{k \in \mathbb{Z} :\ |k| \ge n\}, \quad J_n = \{k \in \mathbb{Z} :\ |k| < n\}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Пользуясь леммой 5, видим, что при любых $\lambda > 0$ и $n = 1, 2, \ldots$

$$\operatorname{card}(E(f,\lambda) \cap I_n) \le \frac{1}{\lambda^2}\sum_{k \in E(f,\lambda)\cap I_n} |\widehat{f}(k)|^2 \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda^2}(\Omega_n(f))^2 \le \frac{c^2}{\lambda^2 n}(V_2(f,n))^2. \tag{13}$$

Вместе с тем,

$$\operatorname{card}(E(f,\lambda) \cap J_n) \le \operatorname{card} J_n \le 2n. \tag{14}$$

Складывая оценки (13) и (14), получаем

$$\operatorname{card} E(f,\lambda) \le 2n + \frac{c^2}{\lambda^2 n}(V_2(f,n))^2, \qquad \lambda>0, \quad n=1,2,\dots.$$

По условию $V_2(f,n) \le c_1 n\varphi^{-1}(1/n)$ при всех достаточно больших n, скажем при $n>n_0$. Следовательно,

$$\operatorname{card} E(f,\lambda) \le 2n + \frac{c_2}{\lambda^2} n\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2, \qquad \lambda>0, \quad n>n_0.$$

Отсюда, считая, что $\lambda>0$ достаточно мало, и выбирая целое $n>n_0$ так, что

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)} \le n < \frac{2}{\varphi(\lambda)},$$

получаем $\operatorname{card} E(f,\lambda) \le c_3/\varphi(\lambda)$. Лемма доказана.

Импликация (ii)⇒(i) в теореме 3 немедленно вытекает из леммы 6 (условие (ii) инвариантно относительно гомеоморфизмов окружности).

Покажем, что (i)⇒(ii). Из условия (II) ясно, что функция $\varphi^{-1}(t)/t$ невозрастающая, поэтому, если $c>0$, то для всех достаточно малых $t>0$ мы имеем

$$\frac{\varphi^{-1}(ct)}{(c+1)t} \le \frac{\varphi^{-1}((c+1)t)}{(c+1)t} \le \frac{\varphi^{-1}(t)}{t},$$

откуда

$$\varphi^{-1}(ct) = O(\varphi^{-1}(t)), \qquad t\to+0, \tag{15}$$

(при любом $c>0$). Таким образом, умножая при необходимости функцию φ на константу, мы, не ограничивая общности, можем считать, что $\varphi(\lambda_0)=1$ и, следовательно, функция φ^{-1} определена на $[0,1]$.

Положим

$$\xi(y) = \sum_{1\le k\le y} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{k}\right), \qquad y\in[1,+\infty),$$

и рассмотрим пространство Марцинкевича $\mathcal{X}$ последовательностей $x=\{x_k,\ k\in\mathbb{Z}\}$ комплексных чисел таких, что

$$\|x\|_{\mathcal{X}} = \sup_{E\subset\mathbb{Z}} \frac{1}{\xi(\operatorname{card} E)} \sum_{k\in E} |x_k| < \infty,$$

где верхняя грань берется по всем конечным непустым множествам E в $\mathbb{Z}$.

Напомним, что (см., например, [24, гл. XII], [72, гл. V]) если $x=\{x_k,\ k\in\mathbb{Z}\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел,

$x_k \to 0,\ |k| \to \infty$, то последовательность $x^* = \{x_k^*,\ k = 1, 2, \ldots\}$, полученная перестановкой в невозрастающем порядке членов последовательности $\{|x_k|,\ k \in \mathbb{Z}\}$, называется невозрастающей перестановкой последовательности x, т.е. мы полагаем

$$x_k^* = \inf\{\lambda : m(\lambda) \le k\}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

где

$$m(\lambda) = \operatorname{card}\{n \in \mathbb{Z} : |x_n| > \lambda\}.$$

Последовательность x^* имеет ту же функцию распределения, что и x:

$$\operatorname{card}\{k :\ x_k^* > \lambda\} = \operatorname{card}\{k :\ |x_k| > \lambda\}, \qquad \lambda > 0, \tag{16}$$

и, если множество $E \subset \mathbb{Z}$ конечно, то

$$\sum_{k \in E} |x_k| \le \sum_{k=1}^{\operatorname{card} E} x_k^*. \tag{17}$$

Заметим теперь, что если

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : |x_k| > \lambda\} = O\left(\frac{1}{\varphi(\lambda)}\right), \quad \lambda \to +0, \tag{18}$$

то $x \in \mathcal{X}$. В самом деле, рассмотрим невозрастающую перестановку x^* последовательности x (условие (18) влечет $x_k \to 0,\ |k| \to \infty$). Поскольку последовательности x и x^* имеют одинаковую функцию распределения (см. (16)) и последовательность x^* невозрастающая, мы получаем для всех достаточно больших номеров k

$$x_k^* \le \varphi^{-1}\left(\frac{c}{k}\right),$$

где $c > 0$ не зависит от k. Отсюда (см. (15))

$$x_k^* = O\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)\right), \qquad k \to +\infty.$$

Таким образом, для любого конечного (непустого) множества $E \subset \mathbb{Z}$ имеем (см. (17))

$$\sum_{k \in E} |x_k| \le \sum_{k=1}^{\operatorname{card} E} x_k^* \le c_1 \sum_{k=1}^{\operatorname{card} E} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) = c_1 \xi(\operatorname{card} E),$$

и, следовательно, $x \in \mathcal{X}$.

Пусть $\mathbb{X}$ — пространство всех функций $f \in L^1(\mathbb{T})$ таких, что $\widehat{f} \in \mathcal{X}$. Положим $\|f\|_{\mathbb{X}} = \|\widehat{f}\|_{\mathcal{X}}$.

Пусть $f \in C(\mathbb{T})$ и выполнено условие (i). Мы видим, что тогда для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ суперпозиция $f \circ h$ принадлежит $\mathbb{X}$.

Мы воспользуемся теоремой 1 в применении к пространству $\mathbb{X}$.

Очевидно, что пространство $\mathbb{X}$ обладает свойствами (a)–(d) (оператору Q_n в $\mathbb{X}$ соответствует оператор сдвига в $\mathcal{X}$, являющийся изометрией, поэтому $\mathbb{X}$ обладает свойством (d) с показателем $\sigma = 0$). Мы также можем считать, что $\mathbb{X}$ обладает свойством (e), поскольку в противном случае по теореме 2 получаем $f = \mathrm{const}$, и оценка (ii) очевидна.

Оценим $\alpha_{\mathbb{X}}(\delta)$. Прямое вычисление дает

$$\widehat{1_{(-\delta,\,\delta)}}(k) = \frac{\sin k\delta}{\pi k}, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad 0 < \delta < \pi. \tag{19}$$

Пусть

$$0 < \delta < \frac{1}{2}. \tag{20}$$

Рассмотрим следующие промежутки в $\mathbb{Z}$:

$$I_m(\delta) = \left\{ k \in \mathbb{Z} : \ \frac{1}{\delta}\Big(\frac{\pi}{6} + 2\pi m\Big) \le k < \frac{1}{\delta}\Big(\frac{\pi}{2} + 2\pi m\Big) \right\}, \qquad m = 1, 2, \dots .$$

Очевидно, что эти промежутки попарно не пересекаются. Пусть $N \geq 1$ целое. Рассмотрим множество

$$E(\delta, N) = \bigcup_{m=1}^{N} I_m(\delta).$$

При $k \in I_m(\delta)$ имеем $\sin k\delta \geq 1/2$ и $0 < k < 10m/\delta$, поэтому (см. (19))

$$|\widehat{1_{(-\delta,\,\delta)}}(k)| = \left| \frac{\sin k\delta}{\pi k} \right| \geq \frac{\delta}{80m}, \qquad k \in I_m(\delta), \quad m = 1, 2, \dots .$$

Отсюда, поскольку

$$\frac{1}{2\delta} \le \operatorname{card} I_m(\delta) \le \frac{2}{\delta} \tag{21}$$

(см. (20)), видим, что

$$\sum_{k \in I_m(\delta)} |\widehat{1_{(-\delta,\,\delta)}}(k)| \geq \frac{1}{160m}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k \in E(\delta,N)} |\widehat{1_{(-\delta,\,\delta)}}(k)| = \sum_{m=1}^{N} \sum_{k \in I_m(\delta)} |\widehat{1_{(-\delta,\,\delta)}}(k)| \geq \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{160m} \geq \frac{1}{160} \log(N+1).$$

Вместе с тем (см. (20), (21)),

$$1 \leq \frac{N}{2\delta} \leq \operatorname{card} E(\delta, N) \leq \frac{2N}{\delta}.$$

Таким образом, при всех $0 < \delta < 1/2$ и $N = 1, 2, \ldots$ получаем

$$\alpha_{\mathbb{X}}(\delta) = \|\widehat{1_{(-\delta,\ \delta)}}\|_{\mathcal{X}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\xi(\operatorname{card} E(\delta, N))} \sum_{k \in E(\delta, N)} |\widehat{1_{(-\delta,\ \delta)}}(k)| \geq \frac{1}{\xi(2N/\delta)} \frac{\log(N+1)}{160}.$$

Покажем, что

$$\inf_{N=1,2,3,\ldots} \frac{\xi(2Nn)}{\log(N+1)} \leq cn\varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{22}$$

(где $c > 0$ не зависит от n), тем самым, в силу теоремы 1 оценка (ii) теоремы 3 будет доказана[4].

Рассмотрим функцию J, являющуюся непрерывным аналогом функции ξ:

$$J(x) = \int_1^x \varphi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) dt, \qquad x \in [1, +\infty).$$

Положим

$$F(x) = \frac{J(x)}{x\varphi^{-1}(1/x)}, \qquad x \in [1, +\infty).$$

После замены переменной $t = 1/\varphi(\theta)$ и интегрирования по частям получаем

$$J(x) = \int_{\lambda_0}^{\varphi^{-1}(1/x)} \theta d\left(\frac{1}{\varphi(\theta)}\right) = x\varphi^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \lambda_0 + \int_{\varphi^{-1}(1/x)}^{\lambda_0} \frac{d\theta}{\varphi(\theta)},$$

откуда имеем

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda_0}{x\varphi^{-1}(1/x)} + G_\varphi\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

и в силу условий (I)–(III) ясно, что функция F почти возрастает на $[1, +\infty)$, т.е., если $x \geq y \geq 1$, то $F(x) \geq cF(y)$, где константа $c > 0$ не зависит от x и y. Кроме того, так как $\varphi(\lambda_0) = 1$, то F неотрицательна.

Положим

$$\gamma(x) = e^{F(x)}.$$

[4]Легко увидеть, что оценка (22) верна в случае $\varphi(\lambda) = \lambda^p$. Достаточно взять $N = 1$ при $p > 1$ и $N = n$ при $p = 1$.

Мы имеем
$$(\log J(x))' = \frac{J'(x)}{J(x)} = \frac{1}{xF(x)}, \qquad x > 1,$$
и, поскольку F почти возрастает, при всех $y > 1$ получаем
$$\log \frac{J(\gamma(y)y)}{J(y)} = \int_y^{\gamma(y)y} \frac{dx}{xF(x)} \le \frac{1}{cF(y)} \int_y^{\gamma(y)y} \frac{dx}{x} = \frac{1}{cF(y)} \log \gamma(y) = \frac{1}{c}.$$
Отсюда имеем
$$\frac{J(\gamma(y)y)}{J(y)} \le c_1, \qquad y > 1.$$
Следовательно,
$$\frac{J(\gamma(y)y)}{\log \gamma(y)} \le \frac{c_1 J(y)}{\log \gamma(y)} = \frac{c_1 J(y)}{F(y)} = c_1 y \varphi^{-1}\left(\frac{1}{y}\right), \qquad y > 1 \tag{23}$$
(константа $c_1 > 0$ не зависит от y).

Заметим, далее, что
$$\varphi^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) \le \int_{k-1}^{k} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) dt, \qquad k = 1, 2, \dots,$$
поэтому при $\nu = 2, 3, \dots$
$$\sum_{k=2}^{\nu} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) \le J(\nu),$$
и, таким образом,
$$\xi(\nu) \le c_2 J(\nu), \qquad \nu = 2, 3, \dots, \tag{24}$$
где $c_2 > 0$ не зависит от ν.

Фиксируем целое положительное n и положим $N = [\gamma(2n)]$, где $[a]$ означает целую часть числа a. Тогда (см. (24), (23))
$$\frac{\xi(2Nn)}{\log(N+1)} \le \frac{c_2 J(2Nn)}{\log \gamma(2n)} \le \frac{c_2 J(\gamma(2n)2n)}{\log \gamma(2n)} \le$$
$$\le c_2 c_1 2n \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \le c_2 c_1 2n \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right),$$
и мы получаем оценку (22). Теорема 3, а с ней и теоремы 4, 5 доказаны.

Замечание 1. Неясно, существуют ли непостоянные функции $f \in C(\mathbb{T})$ такие, что $\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : |\widehat{f \circ h}(k)| > \lambda\} = o(1/\lambda)$, $\lambda \to +0$, для любого гомеоморфизма $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$. Естественно предположить, что ответ на этот вопрос отрицательный. Вообще, представляется естественным предположить, что $\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : |\widehat{f \circ h}(k)| > \lambda\} = o(1/\varphi(\lambda))$ для любого гомеоморфизма h тогда и только тогда, когда $V_2(f,n) = o(n\varphi^{-1}(1/n))$.

В заключение этого параграфа обсудим связь между модулем вариации и модулем квадратичной вариации. Мы увидим, что условие $V_2(f,n) = O(n^{1/q})$ в теореме 5 (условие (ii)) можно заменить эквивалентным условием $V(f,n) = O(n^{1/2+1/q})$ (см. ниже, следствие 1).

Мы получим несколько более общий результат. Напомним, что при $\alpha \geq 1$ (только этот случай нетривиален) α -вариация $V_\alpha(f)$ функции f на $\mathbb{T}$ определяется следующим образом:

$$V_\alpha(f) = \sup\Big(\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)|^\alpha\Big)^{1/\alpha},$$

где верхняя грань берется по всем n и всем наборам попарно непересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subset \mathbb{T},\ j = 1, 2, \ldots, n$. Определим модуль α -вариации $V_\alpha(f,n)$, полагая

$$V_\alpha(f,n) = \sup\Big(\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)|^\alpha\Big)^{1/\alpha},$$

где n фиксировано. Мы будем считать, что $\alpha > 0$.

Лемма 7. *Пусть f — функция на $\mathbb{T}$. Тогда*
1) *если $\alpha > \beta > 0$, то $V_\beta(f,n) \leq n^{1/\beta - 1/\alpha} V_\alpha(f,n),\ n = 1, 2, \ldots$;*
2) *при всех $\alpha > 0,\ \beta > 0$ имеем*

$$V_\alpha(f,n) \leq \Bigg(\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{V_\beta(f,k)}{k^{1/\beta}}\Big)^\alpha\Bigg)^{1/\alpha}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. При $\alpha > \beta > 0$, полагая $p = \alpha/\beta,\ 1/p + 1/q = 1$ и пользуясь неравенством Гельдера, для любых попарно непересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subset \mathbb{T},\ j = 1, 2, \ldots, n$, имеем

$$\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)|^\beta \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)|^{\beta p}\Big)^{1/p} n^{1/q} =$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)|^\alpha\Big)^{\beta/\alpha} n^{1-\beta/\alpha},$$

откуда получаем утверждение 1).

Докажем утверждение 2). Выберем произвольным образом попарно непересекающиеся интервалы $(a_j, b_j) \subset \mathbb{T}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и положим $\omega_j = f(b_j) - f(a_j)$. Пусть W_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — перенумерованные в невозрастающем порядке величины $|\omega_j|$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Имеем $kW_k^\beta \le W_1^\beta + W_2^\beta + \ldots + W_k^\beta \le (V_\beta(f, k))^\beta$, откуда $W_k \le V_\beta(f, k)/k^{1/\beta}$. Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{n} |\omega_j|^\alpha = \sum_{k=1}^{n} W_k^\alpha \le \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{V_\beta(f, k)}{k^{1/\beta}}\right)^\alpha.$$

Лемма доказана.

Из леммы 7 получаем

Следствие 1. *Пусть $\alpha > \beta > 0$. Пусть $\Psi(n)$, $n = 1, 2, \ldots,$ — положительная неубывающая последовательность такая, что*

$$\inf_{n=1,2,\ldots} \frac{\Psi(2n)}{\Psi(n)} > 1. \qquad (25)$$

Тогда условия $V_\alpha(f, n) = O(\Psi(n))$ и $V_\beta(f, n) = O(n^{1/\beta - 1/\alpha}\Psi(n))$ эквивалентны. В частности, при $\gamma > 0$ эквивалентны условия $V_2(f, n) = O(n^\gamma)$ и $V(f, n) = O(n^{\gamma + 1/2})$.

Доказательство. Из утверждения 1) леммы 7 очевидно, что если выполнено условие $V_\alpha(f, n) = O(\Psi(n))$, то $V_\beta(f, n) = O(n^{1/\beta - 1/\alpha}\Psi(n))$.

Обратно, пусть $V_\beta(f, n) = O(n^{1/\beta - 1/\alpha}\Psi(n))$. Пользуясь утверждением 2) леммы 7, при $m = 1, 2, \ldots$ имеем

$$(V_\alpha(f, 2^m - 1))^\alpha \le \sum_{k=1}^{2^m - 1} \left(\frac{V_\beta(f, k)}{k^{1/\beta}}\right)^\alpha \le c \sum_{k=1}^{2^m - 1} \frac{(\Psi(k))^\alpha}{k} =$$

$$= c \sum_{j=1}^{m} \sum_{2^{j-1} \le k < 2^j} \frac{(\Psi(k))^\alpha}{k} \le c \sum_{j=1}^{m} (\Psi(2^j))^\alpha.$$

В силу условия (25) последняя сумма оценивается своим старшим слагаемым:

$$\sum_{j=1}^{m} (\Psi(2^j))^\alpha \le c_1 (\Psi(2^m))^\alpha,$$

поэтому

$$V_\alpha(f, 2^m - 1) \le c_2 \Psi(2^m).$$

Для произвольного целого $n \geq 2$, выбирая $m = 1, 2, \dots$ так, что $2^m \leq n < 2^{m+1}$, и пользуясь очевидным соотношением $(V_\alpha(f, 2\nu))^\alpha \leq 2(V_\alpha(f, \nu))^\alpha$, получаем

$$V_\alpha(f, n) \leq V_\alpha(f, 2^{m+1}) \leq 4^{1/\alpha} V_\alpha(f, 2^{m-1}) \leq 4^{1/\alpha} V_\alpha(f, 2^m - 1) \leq$$
$$\leq 4^{1/\alpha} c_2 \Psi(2^m) \leq 4^{1/\alpha} c_2 \Psi(n).$$

Следствие доказано.

§ 3. Устойчивость в пространствах $A_p(\mathbb{T})$, $W_2^\lambda(\mathbb{T})$ и некоторых других пространствах

Рассмотрим пространства $A_p(\mathbb{T})$, $1 < p < 2$ (интегрируемых) функций f на $\mathbb{T}$ таких, что $\widehat{f} \in l^p$, т.е. таких, что

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T})} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Теорема 6. *Пусть* $1 < p < 2$ *и* $f \in C(\mathbb{T})$. *Тогда:*
1) *если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{V_2(f, n)}{n} \right)^p < \infty, \tag{26}$$

то $f \circ h \in A_p(\mathbb{T})$ *для любого гомеоморфизма* $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$; *в частности это так, если* $V_2(f, n) = O(n^{1/q - \varepsilon})$ *при некотором* $\varepsilon > 0$ $(1/p + 1/q = 1)$;
2) *если* $f \circ h \in A_p(\mathbb{T})$ *для любого гомеоморфизма* $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, *то* $V_2(f, n) = O(n^{1/q})$.

Доказательство. Пусть $p^* = 2/p$, $1/p^* + 1/q^* = 1$. Пользуясь неравенством Гельдера и леммой 5, получаем (см. (12))

$$\sum_{2^j \leq |k| < 2^{j+1}} |\widehat{f}(k)|^p \leq \left(\sum_{2^j \leq |k| < 2^{j+1}} |\widehat{f}(k)|^{pp^*} \right)^{1/p^*} \left(\sum_{2^j \leq |k| < 2^{j+1}} 1 \right)^{1/q^*} \leq$$
$$\leq c 2^{j/q^*} (\Omega_{2^j}(f))^p \leq c_1 2^{-j(p-1)} (V_2(f, 2^j))^p.$$

Ряд в (26) и ряд $\sum_{j \geq 0} 2^{-j(p-1)} (V_2(f, 2^j))^p$ сходятся одновременно, таким образом, (26) влечет $f \in A_p$. Поскольку условие (26) инвариантно относительно (гомеоморфных) замен переменной, получаем утверждение 1).

Утверждение 2) немедленно следует из теоремы 5. Его можно также вывести непосредственно из теоремы 1. Очевидно, что пространство

A_p обладает свойствами (a)–(e). Остается лишь заметить, что поскольку $\sin\alpha \ge \alpha/2$ при $0 \le \alpha \le 1$, то (см. (19))

$$|\widehat{1_{(-\delta,\ \delta)}}(k)| = \left|\frac{\sin k\delta}{\pi k}\right| \ge \frac{\delta}{8}, \qquad 1 \le k \le \frac{1}{\delta}, \tag{27}$$

откуда, если $\delta > 0$ достаточно мало, получаем

$$\alpha_{A_p}(\delta) = \|1_{(-\delta,\ \delta)}\|_{A_p(\mathbb{T})} \ge \left(\sum_{1\le k\le 1/\delta} (c\delta)^p\right)^{1/p} \ge c_1\delta^{1/q}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 6 немедленно вытекает

Следствие 2. *Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. Следующие условия эквивалентны:*
(i) *$f \circ h \in \bigcap_{p>1} A_p(\mathbb{T})$ для любого гомеоморфизма $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$;*
(ii) при любом $\varepsilon > 0$ имеем $V_2(f, n) = O(n^\varepsilon),\ n \to \infty$.

Отметим, что условие (ii) в следствии 2 выполнено тогда и только тогда, когда функция f имеет ограниченную α -вариацию при всех $\alpha > 2$. Это легко увидеть, воспользовавшись леммой 7.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости в пространствах Соболева $W_2^\lambda(\mathbb{T}),\ \lambda > 0$. Пространство $W_2^\lambda(\mathbb{T})$ состоит из функций $f \in L^1(\mathbb{T})$ для которых

$$\|f\|_{W_2^\lambda(\mathbb{T})} = |\widehat{f}(0)| + \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2|k|^{2\lambda}\right)^{1/2} < \infty.$$

Теорема 7. *Пусть $0 < \lambda < 1/2$ и $f \in C(\mathbb{T})$. Тогда:*
1) *если*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{V_2(f,n)}{n^{1-\lambda}}\right)^2 < \infty, \tag{28}$$

то $f \circ h \in W_2^\lambda(\mathbb{T})$ для любого гомеоморфизма $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$; в частности это так, если $V_2(f, n) = O(n^{1/2-\lambda-\varepsilon})$ при некотором $\varepsilon > 0$;
2) *если $f \circ h \in W_2^\lambda(\mathbb{T})$ для любого гомеоморфизма $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, то $V_2(f, n) = O(n^{1/2-\lambda})$.*

Доказательство. Пользуясь леммой 5, имеем (см. (12))

$$\sum_{2^j\le|k|<2^{j+1}} |\widehat{f}(k)|^2|k|^{2\lambda} \le 2^{(j+1)2\lambda}(\Omega_{2^j}(f))^2 \le c2^{-j(1-2\lambda)}(V_2(f, 2^j))^2.$$

Ряд в (28) и ряд $\sum_{j\geq 0} 2^{-j(1-2\lambda)}(V_2(f, 2^j))^2$ сходятся одновременно, поэтому (28) влечет $f \in W_2^\lambda$. Поскольку условие (28) инвариантно относительно замен переменной, получаем утверждение 1).

Для доказательства утверждения 2) заметим, что при $0 < \lambda < 1/2$ пространство W_2^λ обладает свойствами (a)–(e). (Свойство (d) выполнено с константой σ равной λ.) Оценим $\alpha_{W_2^\lambda}(\delta) = \|1_{(-\delta,\ \delta)}\|_{W_2^\lambda}$. Как и выше (см. (27)), имеем $|\widehat{1_{(-\delta,\ \delta)}}(k)| \geq c\delta$ при $1 \leq k \leq 1/\delta$, откуда

$$\alpha_{W_2^\lambda}(\delta) \geq \Bigg(\sum_{1\leq k\leq 1/\delta} (c\delta)^2 k^{2\lambda}\Bigg)^{1/2} \geq c_1\delta^{1/2-\lambda}.$$

Остается воспользоваться теоремой 1. Теорема 7 доказана.

Ясно, что пространства $A(\mathbb{T})$ и $W_2^\lambda(\mathbb{T}),\ \lambda \geq 1/2$, не содержат характеристических функций интервалов, таким образом, по теореме 2 в этих пространствах устойчивыми непрерывными функциями являются лишь постоянные.

Дадим еще одно приложение теоремы 2. Напомним, что (см. [5], [24], [29]) если $f \in L^1(\mathbb{T})$, то функцией, сопряженной к f, называется функция

$$\widetilde{f}(t) = \lim_{\varepsilon\to+0} H_\varepsilon(f)(t),$$

где

$$H_\varepsilon(f)(t) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|t-\theta|\leq\pi} \frac{f(\theta)}{2\ \mathrm{tg}\frac{t-\theta}{2}} d\theta, \qquad \varepsilon > 0,$$

(предел существует и конечен для почти всех $t \in \mathbb{T}$). Для $f \in L^2(\mathbb{T})$ имеем $\widetilde{f} \in L^2(\mathbb{T})$ и

$$\widetilde{f}(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-i\ \mathrm{sign}\ k)\widehat{f}(k)e^{ikt}.$$

Хорошо известно, что если $f \in L^p(\mathbb{T})$, то $\widetilde{f} \in L^p(\mathbb{T}),\ 1 < p < \infty$. Вместе с тем существуют непрерывные функции, сопряженные к которым не принадлежат L^∞. Усилением этого утверждения является следующая

Теорема 8. *Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. Предположим, что для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ мы имеем $\widetilde{f\circ h} \in L^\infty(\mathbb{T})$. Тогда $f = \mathrm{const}$.*

Доказательство. Рассмотрим пространство $\mathbb{X}$ всех функций $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ таких, что $\widetilde{f} \in L^\infty(\mathbb{T})$. Определим норму в $\mathbb{X}$, полагая $\|f\|_{\mathbb{X}} = \|f\|_{L^\infty} + \|\widetilde{f}\|_{L^\infty}$.

В предположениях теоремы имеем $f\circ h\in\mathbb{X}$ для любого гомеоморфизма $h:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$. Ясно, что пространство $\mathbb{X}$ обладает свойствами (a) и (b′). Убедимся, что $\mathbb{X}$ обладает свойствами (c) и (d).

Пусть последовательность функций $f_n\in\mathbb{X}$, $n=1,2,\dots$, сходится в $L^1(\mathbb{T})$ к функции f и $\|f_n\|_{\mathbb{X}}\le 1$. Как известно, оператор $f\to\widetilde{f}$ имеет слабый тип $(1-1)$, поэтому при любом $\delta>0$ мера множества $\{t\in\mathbb{T}:|(\widetilde{f_n-f})(t)|>\delta\}$ не превосходит $c\|f_n-f\|_{L^1}/\delta$, и мы видим, что последовательность $\widetilde{f}_n$ сходится к $\widetilde{f}$ по мере. Поскольку при этом, $\|f_n\|_{L^\infty}+\|\widetilde{f}_n\|_{L^\infty}\le 1$, то $f,\ \widetilde{f}\in L^\infty$ и $\|f\|_{L^\infty}+\|\widetilde{f}\|_{L^\infty}\le 1$. Таким образом, $\mathbb{X}$ обладает свойством (c).

Пусть $f\in\mathbb{X}$. Заметим, что

$$\left|\frac{e^{in\theta}-e^{int}}{2\operatorname{tg}\frac{t-\theta}{2}}\right|\le|n|,\qquad 0<|t-\theta|\le\pi,\quad n\in\mathbb{Z},$$

поэтому

$$|H_\varepsilon(e_nf)(t)-e_n(t)H_\varepsilon(f)(t)|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|t-\theta|\le\pi}\frac{e^{in\theta}-e^{int}}{2\operatorname{tg}\frac{t-\theta}{2}}f(\theta)d\theta\right|\le$$

$$\le 2|n|\|f\|_{L^\infty},\qquad t\in\mathbb{T},\quad\varepsilon>0.$$

Отсюда

$$|(\widetilde{e_nf})(t)-e_n(t)\widetilde{f}(t)|\le 2|n|\|f\|_{L^\infty}$$

для почти всех $t\in\mathbb{T}$, и мы получаем

$$\|\widetilde{e_nf}\|_{L^\infty}\le\|\widetilde{f}\|_{L^\infty}+2|n|\|f\|_{L^\infty}\le(1+2|n|)\|f\|_{\mathbb{X}}.$$

Следовательно,

$$\|e_nf\|_{\mathbb{X}}\le(2+2|n|)\|f\|_{\mathbb{X}}.$$

Таким образом, $\|Q_n\|=O(|n|)$, и мы видим, что пространство $\mathbb{X}$ обладает свойством (d).

Вместе с тем легко проверить [5], что функция, сопряженная к характеристической функции произвольного интервала $I\subset\mathbb{T}$, не принадлежит $L^\infty(\mathbb{T})$. Таким образом, пространство $\mathbb{X}$ не обладает свойством (e). Остается воспользоваться теоремой 2. Теорема 8 доказана.

Рассмотрим теперь пространства мультипликаторов Фурье. Напомним, что если G — локально компактная абелева группа и Γ — группа двойственная к G, то функция $m\in L^\infty(\Gamma)$ называется L^p -мультипликатором в случае, когда оператор Q, задаваемый соотношением $\widehat{Qg}=m\widehat{g}$, $g\in L^p\cap L^2(G)$,

[5]Имеем $\widetilde{1_{(a,b)}}(t)=\frac{1}{\pi}\log\left|\frac{\sin(t-a)/2}{\sin(t-b)/2}\right|$.

является ограниченным оператором в $L^p(G)$. Здесь $1 \leq p \leq \infty$ и через $\widehat{\ }$ обозначено преобразование Фурье. Пространство всех таких мультипликаторов обозначается через $M_p(\Gamma)$. Основные свойства мультипликаторов изложены в работах [69], [86]. Мы рассмотрим пространства $M_p(\mathbb{T})$ при $1 < p < \infty$.

Теорема 9. *Для $1 < p < \infty$ положим $\tau_p = \max\{p, q\}$, $1/p + 1/q = 1$. Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, и $f \in C(\mathbb{T})$. Тогда:*

1) *если $V_2(f, n) = O(n^{1/\tau_p - \varepsilon})$ при некотором $\varepsilon > 0$, то $f \circ h \in M_p(\mathbb{T})$ для любого гомеоморфизма $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$;*

2) *если $f \circ h \in M_p(\mathbb{T})$ для любого гомеоморфизма $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, то $V_2(f, n) = O(n^{1/\tau_p})$.*

Доказательство. Положим

$$\alpha_p = \frac{1}{|1/p - 1/2|}, \qquad p \neq 2.$$

Из результата, полученного Р. Койфманом, Х. Л. Рубио де Франсиа и С. Семмесом [30, лемма 3], следует, что [6] если f — функция на $\mathbb{T}$ такая, что $V_{\alpha_p - \varepsilon}(f) < \infty$ при некотором $\varepsilon > 0$, то $f \in M_p(\mathbb{T})$. (Позже этот результат был независимо получен В. А. Олевским [60], [61].)

Покажем, что если f — произвольная функция такая, что $V_2(f, n) = O(n^{1/\tau_p - \varepsilon})$ при некотором $\varepsilon > 0$, то выполнено условие Койфмана–Рубио де Франсиа–Семмеса. Тем самым утверждение 1) будет доказано.

Пусть $V_2(f, n) \leq c n^{1/\tau_p - \varepsilon}$. Мы имеем

$$\frac{1}{\alpha_p} + \frac{1}{\tau_p} = \frac{1}{2}.$$

Выберем α так, что

$$\frac{\alpha_p}{1 + \alpha_p \varepsilon} < \alpha < \alpha_p.$$

Воспользуемся утверждением 2) леммы 7, положив $\beta = 2$. При всех $n = 1, 2, \ldots$ получаем

$$(V_\alpha(f, n))^\alpha \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{c k^{1/\tau_p - \varepsilon}}{k^{1/2}} \right)^\alpha \leq c^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{(1/\alpha_p + \varepsilon)\alpha}}.$$

Таким образом, $V_\alpha(f) < \infty$.

[6] В указанной работе рассматриваются мультипликаторы на прямой; перенос на окружность немедленно получается применением теоремы Джодета [23]: если m есть 2π -периодическая функция на $\mathbb{R}$ и ее сужение на $[-\pi, \pi]$, продолженное нулем на $\mathbb{R}$, принадлежит $M_p(\mathbb{R})$, то $m \in M_p(\mathbb{T})$.

Докажем утверждение 2). Ввиду известного соотношения двойственности: $M_p = M_q$ при $1/p + 1/q = 1$, мы можем считать, что $1 < p < 2$. Остается воспользоваться очевидным включением $M_p(\mathbb{T}) \subseteq A_p(\mathbb{T})$ и теоремой 6. Теорема доказана.

Замечание 2. Ранее В. А. Олевский [62] показал[7], что если $f \circ h \in M_p(\mathbb{T})$ для любого гомеоморфизма h, то $V_{\alpha_p+\varepsilon}(f) < \infty$ при любом $\varepsilon > 0$. Этот результат следует из утверждения 2) теоремы 9. В самом деле, применяя утверждение 2) леммы 7 при $\alpha = \alpha_p + \varepsilon$ и $\beta = 2$, легко увидеть, что условие $V_2(f, n) = O(n^{1/\tau_p})$ влечет $V_{\alpha_p+\varepsilon}(f) < \infty$ при всех $\varepsilon > 0$. Отметим, что обратное неверно. Для функции

$$f(t) = |t|^{1/\alpha_p}\bigg(\log\frac{1}{|t|}\bigg)\sin\frac{1}{|t|}, \quad 0 < |t| \le \pi, \qquad f(0) = 0,$$

имеем $V_{\alpha_p+\varepsilon}(f) < \infty$ при всех $\varepsilon > 0$, но $V_2(f, n) \ge c n^{1/\tau_p} \log n$.

Отметим также, что, как мы видели, из условия, наложенного на функцию f в утверждении 1) теоремы 9, следует условие Койфмана–Рубио де Франсиа–Семмеса. Легко увидеть, что на самом деле эти условия эквивалентны. Действительно, $V_2(f, n) \le V_\alpha(f, n) n^{1/2-1/\alpha}$ при $\alpha > 2$ (см. утверждение 1) леммы 7), и, таким образом, если $V_\alpha(f) < \infty$ при некотором $\alpha < \alpha_p$, то $V_2(f, n) = O(n^\gamma)$ при некотором $\gamma < 1/\tau_p$.

Автору неизвестно существуют ли функции, устойчивые в A_p и при этом не являющиеся устойчивыми в M_p, $1 < p < 2$.

В заключение этого параграфа обсудим следующую теорему Ватермана [10] об устойчивом убывании коэффициентов Фурье [8]. Пусть $\gamma(y)$ — положительная неубывающая функция на $[1, +\infty)$ такая, что функция $\gamma(y)/y$ невозрастающая. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. Следующие условия эквивалентны:

(i) для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя имеем

$$\widehat{f \circ h}(n) = O\bigg(\frac{\gamma(|n|)}{|n|}\bigg), \qquad |n| \to \infty;$$

(ii) $V(f, n) = O(\gamma(n))$.

Отметим, что нетривиальная часть теоремы Ватермана — это утверждение (i)$\Rightarrow$(ii). Утверждение (ii)$\Rightarrow$(i) доказывается следующим образом.

[7] Мы формулируем теорему 2 из работы [62] в несколько иной, чем в оригинале, но эквивалентной форме.

[8] В работе [10] рассмотрен случай произвольной функции f на $\mathbb{T}$. Мы рассматриваем только непрерывные функции.

Пользуясь хорошо известной оценкой $|\widehat{g}(n)| \le c\omega_1(g, 1/|n|)$ коэффициентов Фурье через L^1 -модуль непрерывности (см. [5]) и оценкой $\omega_1(g, 1/n) \le cV(g,n)/n$, полученной в [83], мы имеем $|\widehat{g}(n)| \le cV(g,|n|)/|n|$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \ne 0$, и остается лишь воспользоваться инвариантностью модуля вариации.

Дадим простое доказательство нетривиальной части теоремы, т.е. импликации (i)$\Rightarrow$(ii). Наше доказательство основано на лемме 2.

Пусть $\mathbb{X}$ — пространство функций $f \in L^1(\mathbb{T})$, таких, что

$$\|f\|_{\mathbb{X}} = |\widehat{f}(0)| + \sup_{k\ne 0} \frac{|k||\widehat{f}(k)|}{\gamma(|k|)} < \infty.$$

Очевидно, что, определенное таким образом пространство $\mathbb{X}$ обладает свойствами (a) и (c). Убедимся, что $\mathbb{X}$ обладает свойством (d). Для этого рассмотрим пространство $\mathcal{X}$ последовательностей $x = \{x_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ комплексных чисел, для которых

$$\|x\|_{\mathcal{X}} = |x_0| + \sup_{k\ne 0} \frac{|k||x_k|}{\gamma(|k|)} < \infty,$$

и оценим норму $\|S_n\|$ оператора сдвига $S_n : x \to S_n x$, $(S_n x)_k = x_{k+n}$, $k \in \mathbb{Z}$, в пространстве $\mathcal{X}$. Ясно, что $\|Q_n\| = \|S_{-n}\|$, $n \in \mathbb{Z}$.

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\gamma(1) = 1$. Пусть $n \ne 0$ и $\|x\|_{\mathcal{X}} = 1$. Пусть $k \ne 0$. Рассмотрим два случая: $|n+k| > |k|/2$ и $|n+k| \le |k|/2$. В первом случае, поскольку функция $\gamma(y)/y$ невозрастающая, а $\gamma(y)$ неубывающая, имеем

$$|x_{k+n}| \le \frac{\gamma(|k+n|)}{|k+n|} \le \frac{\gamma(|k|/2)}{|k|/2} \le 2\frac{\gamma(|k|)}{|k|}. \tag{29}$$

Во втором случае имеем $|k| \le 2|n|$ и, если $k \ne -n$, то

$$|x_{k+n}| \le \frac{\gamma(|k+n|)}{|k+n|} \le \gamma(|k+n|) \le \gamma\left(\frac{|k|}{2}\right) \le \gamma(|k|) \le 2|n|\frac{\gamma(|k|)}{|k|}, \tag{30}$$

а, если $k = -n$, то

$$|x_{k+n}| = |x_0| \le 1 \le |n|\frac{\gamma(|k|)}{|k|}. \tag{31}$$

Из оценок (29)–(31) получаем

$$|x_{k+n}| \le 2|n|\frac{\gamma(|k|)}{|k|}, \qquad k \ne 0.$$

Вместе с тем $|x_n| \le \gamma(|n|)/|n| \le \gamma(1) = 1$. Таким образом, имеем

$$\|S_n x\|_{\mathcal{X}} = |x_n| + \sup_{k\ne 0} \frac{|k||x_{k+n}|}{\gamma(|k|)} \le 1 + 2|n|.$$

Следовательно, $\|S_n\| \le 1 + 2|n|$, и мы видим, что пространство $\mathbb{X}$ обладает свойством (d).

Завершим доказательство. Через $V(f, \Delta, n)$ обозначим модуль вариации функции f на отрезке $\Delta \subseteq [-\pi, \pi]$, т.е.

$$V(f, \Delta, n) = \sup \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)|,$$

где n фиксировано и верхняя грань берется по всем наборам попарно непересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subseteq \Delta,\ j = 1, 2, \dots, n$. Пусть I и Δ — два произвольных отрезка, содержащиеся в $(-\pi, \pi)$. Пусть выполнено условие (i) и, следовательно, $f \circ h \in \mathbb{X}$ для любого гомеоморфизма h. Покажем, что тогда

$$V(f, \Delta, n) \le c(|I|)\rho(I, \Delta)\gamma(n), \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{32}$$

где $c(|I|)$ зависит только от длины $|I|$ отрезка I и $\rho(I, \Delta)$ определено соотношением (2). Будем считать, что $\rho(I, \Delta) < \infty$, иначе доказывать нечего. Фиксируем n. Пусть I^0 — интервал длины $|I|/2$, концентрический с I. Пусть a — левый конец интервала I^0. Выберем целое m так, что

$$\frac{8\pi}{|I|} \le m < \frac{8\pi}{|I|} + 1, \tag{33}$$

и рассмотрим интервалы I_j длины $\pi/(mn)$ с центрами $a + 2\pi j/(mn),\ j = 1, 2, \dots n$. Ясно, что эти интервалы содержатся в I^0 и попарно не пересекаются. По лемме 2, сохраняя ее обозначения, имеем

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \omega_j 1_{I_j} \right\|_{\mathbb{X}} \le c(|I|)\rho(I, \Delta)$$

для произвольных чисел $\varepsilon_j = \pm 1,\ j = 1, 2, \dots, n$. Отсюда, вычисляя коэффициенты Фурье, получаем

$$\left| \left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \omega_j e^{-i\left(a + \frac{2\pi j}{mn}\right)k} \right) \frac{\sin(\pi k/(2mn))}{\pi k} \right| \le c(|I|)\rho(I, \Delta)\frac{\gamma(|k|)}{|k|}, \qquad k \ne 0.$$

Полагая в этом соотношении $k = mn$, имеем

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \omega_j \right| \le \pi c(|I|)\rho(I, \Delta)\gamma(mn)$$

и, таким образом, поскольку числа $\varepsilon_j = \pm 1$ произвольны, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} |\omega_j| \le 2\pi c(|I|)\rho(I, \Delta)\gamma(mn). \tag{34}$$

Заметим далее, что $\gamma(mn)/(mn) \le \gamma(n)/n$, поэтому (см. (33))

$$\gamma(mn) \le m\gamma(n) \le \left(\frac{8\pi}{|I|} + 1\right)\gamma(n),$$

и из (34) следует оценка (32) (с другой константой $c(|I|)$).

Легко увидеть, что справедливо утверждение, аналогичное лемме 4 для модуля вариации вместо модуля квадратичной вариации (чтобы убедиться в этом достаточно всюду в доказательстве леммы 4 заменить $V_2(\ldots)$ на $V(\ldots)$). Пользуясь этим вариантом леммы 4 и оценкой (32), завершаем доказательство импликации (i)$\Rightarrow$(ii), повторяя с очевидными изменениями рассуждения, использованные в конце доказательства теоремы 1.

Замечание 3. Отметим, что Г. Т. Ониани [63] анонсировал следующий результат: если $f \in C(\mathbb{T})$ и $\widehat{f \circ h}(n) = o(1/|n|)$ для любого гомеоморфизма h, то функция f постоянна [9]. Вообще, представляется естественным предположить, что $\widehat{f \circ h}(n) = o(\gamma(|n|)/|n|)$ для любого гомеоморфизма h тогда и только тогда, когда $V(f, n) = o(\gamma(n))$ (см. также замечание 1).

§ 4. Устойчивость в пространствах функций на торе $\mathbb{T}^d$, $d \ge 2$

Здесь мы будем рассматривать пространства функций на торе $\mathbb{T}^d$. Мы увидим, что многомерный случай ($d \ge 2$) существенно отличается от одномерного. Следующая ниже теорема 10 показывает, что при достаточно общих предположениях о пространстве функций на торе $\mathbb{T}^d$, $d \ge 2$, либо это пространство содержит все непрерывные функции (и, следовательно, вякая непрерывная функция устойчива в нем) либо устойчивыми являются только постоянные. В частности из этой теоремы немедленно вытекает, что в отличие от одномерного случая (рассмотренного в § 3), в многомерном случае в пространствах A_p, $1 < p < 2$, нет нетривиальных непрерывных устойчивых функций. Более деликатное приложение рассматривается в конце параграфа (см. теорему 11).

Пусть $\mathbb{X}$ — линейное нормированное пространство функций на торе $\mathbb{T}^d$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$. Мы предполагаем, что $\mathbb{X}$ обладает следующими свойствами (аналогичными свойствам (a), (b′), (c), (d) из § 1):

(A) $\mathbb{X} \subseteq L^1(\mathbb{T}^d)$ (мы отождествляем функции, совпадающие почти всюду);

[9] В той же работе [63] указан без доказательства частный случай теоремы Ватермана при $\gamma(n) \equiv 1$. Работа [63] появилась двумя годами позже работы Ватермана [10].

(B) если $f \in \mathbb{X}$, то для любого $\theta \in \mathbb{T}^d$ функция $f_\theta(t) = f(t+\theta)$ принадлежит $\mathbb{X}$ и $\|f_\theta\|_\mathbb{X} \le \|f\|_\mathbb{X}$;

(C) если $f_n \in \mathbb{X}$, $n = 1, 2, \dots,$ — последовательность функций, сходящаяся к f в $L^1(\mathbb{T}^d)$, и $\|f_n\|_\mathbb{X} \le c$, $n = 1, 2, \dots,$ то $f \in \mathbb{X}$ и $\|f\|_\mathbb{X} \le c$;

(D) при любом $n \in \mathbb{Z}^d$ оператор $Q_n : f \to e_n f$ умножения на экспоненту $e_n(t) = e^{i(n,t)}$, $t \in \mathbb{T}^d$ (где (n,t) — скалярное произведение) является ограниченным оператором в $\mathbb{X}$, и существует $\sigma \ge 0$ такое, что $\|Q_n\| = O(|n|^\sigma)$, $|n| \to \infty$, где $|n|$ — длина целочисленного вектора n.

Теорема 10. *Пусть линейное нормированное пространство $\mathbb{X}$ функций на торе $\mathbb{T}^d$, $d \ge 2$, обладает свойствами* (A)–(D). *Предположим, что существует непрерывная непостоянная функция f на $\mathbb{T}^d$ такая, что для любого гомеоморфизма h тора $\mathbb{T}^d$ на себя мы имеем $f \circ h \in \mathbb{X}$. Тогда $L^\infty(\mathbb{T}^d) \subseteq \mathbb{X}$ и $\|\cdot\|_\mathbb{X} \le c\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}$.*

Доказательство. Всюду в доказательстве под кубом мы понимаем куб в $\mathbb{R}^d$ с ребрами, параллельными координатным осям. Для произвольного куба I пусть I^0 — куб концентрический с I и имеющий вдвое меньшее ребро. Если $E \subseteq \mathbb{T}^d$ — измеримое множество, то $|E|$ обозначает его лебегову меру и 1_E его характеристическую функцию. Аналогично, если E — измеримое множество в $\mathbb{R}^d$, содержащееся в $(-\pi, \pi)^d$, то $|E|$ — его мера Лебега и 1_E — функция на $\mathbb{T}^d$, равная 1 на E и равная 0 на дополнении $[-\pi, \pi]^d \setminus E$. Через $E \Delta F$ мы обозначаем симметрическую разность множеств E и F.

Для произвольного куба $I \subseteq (-\pi, \pi)^d$ пусть χ_I — бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{T}^d$, равная 1 на I^0 и равная 0 на $[-\pi, \pi]^d \setminus I$. Повторяя с очевидными изменениями доказательство леммы 1, легко увидеть, что в силу свойств (A), (C), (D) оператор умножения на любую бесконечно дифференцируемую функцию и, в частности, на χ_I является ограниченным оператором в $\mathbb{X}$.

Пусть I — какой-то замкнутый куб, содержащийся в $(-\pi, \pi)^d$, и φ — гомеоморфизм куба I на себя, тождественный на его границе. Всякий такой гомеоморфизм продолжается до гомеоморфизма тора $\mathbb{T}^d$, например, можно продолжить φ до гомеоморфизма h куба $[-\pi, \pi]^d$ на себя, тождественного на границе. Всякий такой гомеоморфизм h порождает гомеоморфизм тора.

В предположениях теоремы относительно f положим для произвольного замкнутого куба $I \subset (-\pi, \pi)^d$

$$\rho(I) = \sup_{\varphi: I \to I} \inf_{h_{|I} = \varphi} \|f \circ h\|_\mathbb{X},$$

где верхняя грань берется по всем гомеоморфизмам φ куба I на себя, тождественным на его границе, и нижняя грань берется по всем гомеоморфизмам h тора $\mathbb{T}^d$ на себя, совпадающим с φ на I.

Заметим, что существует замкнутый куб $I \subset (-\pi, \pi)^d$ такой, что f не постоянна на I и $\rho(I) < \infty$. Действительно, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2, легко увидеть, что мы можем выбрать бесконечную последовательность попарно непересекающихся замкнутых кубов $I_j,\ j = 1, 2, \dots$, в $(-\pi, \pi)^d$ так, что ни на каком из них f не является постоянной и последовательность центров кубов I_j сходится. Если мы предположим, что для всех кубов $I_j,\ j = 1, 2, \dots$, мы имеем $\rho(I_j) = \infty$, то при каждом $j = 1, 2, \dots$ мы найдем гомеоморфизм φ_j куба I_j на себя, тождественный на его границе и такой, что если гомеоморфизм h тора совпадает с φ_j на I_j, то

$$\|f \circ h\|_{\mathbb{X}} \geq j. \tag{35}$$

Определим тогда отображение h тора в себя, полагая его равным φ_j на I_j при $j = 1, 2, \dots$ и равным тождественному на дополнении $[-\pi, \pi]^d \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Очевидно, что h — гомеоморфизм тора $\mathbb{T}^d$ на себя, и соотношение (35) выполнено при всех $j = 1, 2, \dots$, что невозможно.

Фиксируем куб I такой, что f не постоянна на I и $\rho(I) < \infty$.

Выберем два значения a_0 и a_1, $a_0 \neq a_1$, принимаемые функцией f во внутренности куба I. Для произвольного множества $U \subseteq I^0$ положим

$$F^U = \chi_I \cdot (a_0 1_{I \setminus U} + a_1 1_U).$$

Пусть U — произвольная замкнутая область в I^0, гомеоморфная замкнутому кубу. Покажем, что

$$F^U \in \mathbb{X}, \qquad \|F^U\|_{\mathbb{X}} \leq c, \tag{36}$$

где $c > 0$ не зависит от U.

Пусть t_0 и t_1 — точки, лежащие во внутренности куба I, такие, что $f(t_0) = a_0,\ f(t_1) = a_1$ (мы имеем $t_0 \neq t_1$). Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем во внутренности куба I такие замкнутые кубы B_0^ε и B_1^ε с центрами $t_0,\ t_1$ соответственно, что $B_0^\varepsilon \cap B_1^\varepsilon = \varnothing$ и

$$|f(t) - a_0| < \varepsilon \quad \text{при } t \in B_0^\varepsilon, \qquad |f(t) - a_1| < \varepsilon \quad \text{при } t \in B_1^\varepsilon.$$

Ясно, что мы можем найти замкнутую область W_ε, содержащуюся во внутренности куба I и гомеоморфную замкнутому кубу, такую, что

$$W_\varepsilon \cap U = \varnothing, \qquad |I \setminus (W_\varepsilon \cup U)| < \varepsilon. \tag{37}$$

Пусть φ_ε — гомеоморфизм куба I на себя, тождественный на его границе и такой, что $\varphi_\varepsilon(W_\varepsilon) = B_0^\varepsilon$ и $\varphi_\varepsilon(U) = B_1^\varepsilon$. Существует гомеоморфизм h_ε тора, совпадающий с φ_ε на I и удовлетворяющий условию

$$\|f \circ h_\varepsilon\|_{\mathbb{X}} \le 2\rho(I).$$

Мы имеем

$$|f \circ h_\varepsilon(t) - a_0| < \varepsilon \quad \text{при } t \in W_\varepsilon, \qquad |f \circ h_\varepsilon(t) - a_1| < \varepsilon \quad \text{при } t \in U. \quad (38)$$

Положим $F_\varepsilon = \chi_I \cdot (f \circ h_\varepsilon)$. Пусть норма оператора умножения на χ_I в $\mathbb{X}$ равна c_1. Тогда $\|F_\varepsilon\|_{\mathbb{X}} \le c_1 2\rho(I)$. Вместе с тем $\|F_\varepsilon - F^U\|_{L^1(\mathbb{T}^d)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ (см. (37), (38)), откуда в силу свойства (C) получаем соотношения (36).

Пусть U_ε — произвольный замкнутый куб, содержащийся в I^0 такой, что $|U_\varepsilon| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0$. Подставляя U_ε вместо U в (36) и устремляя ε к нулю, видим, что соотношения (36) верны в случае $U = \varnothing$.

Заметим далее, что (как и выше, мы считаем, что $U \subseteq I^0$)

$$F^U - F^\varnothing = (a_1 - a_0) 1_U.$$

Таким образом, для любой замкнутой области $U \subseteq I^0$, гомеоморфной замкнутому кубу, получаем

$$1_U \in \mathbb{X}, \qquad \|1_U\|_{\mathbb{X}} \le c, \quad (39)$$

где $c > 0$ не зависит от U.

Покажем теперь, что для произвольного измеримого множества $E \subseteq I^0$ мы имеем

$$1_E \in \mathbb{X}, \qquad \|1_E\|_{\mathbb{X}} \le c, \quad (40)$$

где константа $c > 0$ не зависит от E. Чтобы показать это, мы просто аппроксимируем E (замкнутыми) областями, гомеоморфными замкнутому кубу. А именно, пусть $\varepsilon > 0$. Мы можем найти конечное семейство кубов $I_j \subseteq I^0,\ j = 1, 2, \ldots, N$, таких, что их внутренности попарно не пересекаются и

$$\left| E \Delta \bigcup_{j=1}^{N} I_j \right| < \varepsilon.$$

Заменяя при необходимости кубы $I_j,\ j = 1, 2, \ldots, N$, замкнутыми концентрическими кубами с чуть меньшими ребрами, мы можем считать, что эти кубы замкнуты, попарно не пересекаются и лежат во внутренности куба I^0. Пусть, далее, V — замкнутый куб, содержащийся во внутренности куба I^0, не пересекающийся с объединением $\bigcup_{j=1}^{N} I_j$ и такой, что $|V| < \varepsilon$.

При каждом $j = 1, 2, \ldots, N$ соединим центр куба I_j с центром куба V конечнозвенной ломаной без самопересечений. Обозначим соответствующие ломаные через $\gamma_j,\ j = 1, 2, \ldots, N$. Очевидно, что можно добиться того, чтобы выполнялись следующие условия:

1) все ломаные γ_j лежат во внутренности куба I^0;

2) никакие две различные ломаные не имеют общих точек кроме центра куба V;

3) каждая ломаная γ_j имеет лишь одну точку пересечения с границей куба I_j и лишь одну точку пересечения с границей куба V;

4) $\gamma_j \cap I_k = \varnothing$ при $j \neq k$.

Пусть $\Gamma_j(\delta)$ — замкнутая δ -окрестность ломаной γ_j. Если $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $|\bigcup_{j=1}^N \Gamma_j(\delta_\varepsilon)| < \varepsilon$ и множество

$$U_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^N I_j \cup \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j(\delta_\varepsilon) \cup V$$

содержится в I^0 и гомеоморфно замкнутому кубу. Пользуясь соотношениями (39), мы видим, что $1_{U_\varepsilon} \in \mathbb{X}$ и $\|1_{U_\varepsilon}\|_{\mathbb{X}} \leq c$, где $c > 0$ не зависит от ε и E. Вместе с тем мы имеем $|E \Delta U_\varepsilon| < 3\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ можно взять сколь угодно малым, свойство (C) влечет (40).

Фиксируем теперь замкнутый куб J, содержащийся в I^0, с ребром длины $2\pi/M$, где $M \geq 1$ — целое. Рассмотрим разбиение $[-\pi, \pi]^d = \bigcup_{k=1}^{M^d} J_k$ куба $[-\pi, \pi]^d$ кубами $J_k,\ k = 1, 2, \ldots M^d$, которые имеют попарно не пересекающиеся внутренности и получены из J сдвигами. Пусть E — произвольное измеримое множество в $(-\pi, \pi)^d$. Из (40) и свойства (B) следует, что $1_{E \cap J_k} \in \mathbb{X}$ и $\|1_{E \cap J_k}\|_{\mathbb{X}} \leq c$ при всех $k = 1, 2, \ldots, M^d$, откуда $1_E \in \mathbb{X}$ и $\|1_E\|_{\mathbb{X}} \leq c_1$, где $c_1 = cM^d$. Следовательно, соотношения (40) верны для любого измеримого множества $E \subseteq (-\pi, \pi)^d$ (с константой c_1 вместо c). Таким образом, для любого измеримого множества $E \subseteq \mathbb{T}^d$ мы имеем $1_E \in \mathbb{X}$ и $\|1_E\|_{\mathbb{X}} \leq c_1$, где c_1 не зависит от E.

Завершим доказательство теоремы. Пусть $g \in L^\infty(\mathbb{T}^d),\ \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} = 1$. Пусть сначала g — вещественная функция. Тогда g может быть приближена в $L^1(\mathbb{T}^d)$ функциями вида

$$g_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \big(1_{E^+_{k,n}} - 1_{E^-_{k,n}}\big), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где

$$E^+_{k,n} = \{t:\ g(t) \geq k/n\}, \qquad E^-_{k,n} = \{t:\ g(t) \leq -k/n\}.$$

Мы имеем $g_n \in \mathbb{X}$, $\|g_n\|_{\mathbb{X}} \le 2c_1$ при всех $n = 1, 2, \dots$ и $g_n \to g$ в $L^1(\mathbb{T}^d)$. По свойству (C) получаем $g \in \mathbb{X}$ и $\|g\|_{\mathbb{X}} \le 2c_1$. Для комплекснозначной функции g достаточно рассмотреть ее вещественную и мнимую части. Теорема доказана.

При всяком p, $1 < p < 2$, рассмотрим пространство $A_p(\mathbb{T}^d)$, состоящее из интегрируемых функций f на торе $\mathbb{T}^d$ таких, что $\widehat{f} \in l^p(\mathbb{Z}^d)$. Как обычно, полагаем

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T}^d)} = \|\widehat{f}\|_{l^p(\mathbb{Z}^d)} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(k)|^p\Big)^{1/p}.$$

Из теоремы 10 немедленно следует, что при $d \ge 2$ в пространствах $A_p(\mathbb{T}^d)$ нет нетривиальных непрерывных устойчивых функций. В самом деле, хорошо известно, что существуют непрерывные функции f такие, что $\widehat{f} \notin l^p$ при $p < 2$. В действительности верно значительно большее, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 11. *Пусть f — непрерывная функция на $\mathbb{T}^d$, $d \ge 2$, такая, что $f \circ h \in \bigcup_{1<p<2} A_p(\mathbb{T}^d)$ для любого гомеоморфизма h тора $\mathbb{T}^d$ на себя. Тогда $f = \mathrm{const}$.*

Доказательство. Рассмотрим пространство Марцинкевича $\mathcal{X}$ последовательностей $x = \{x_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$ комплексных чисел таких, что

$$\|x\|_{\mathcal{X}} = \sup_{E\subset\mathbb{Z}^d} \frac{\log(\operatorname{card} E)}{(\operatorname{card} E)^{1/2}} \sum_{k\in E} |x_k| < \infty,$$

где верхняя грань берется по всем конечным (непустым) множествам $E \subset \mathbb{Z}^d$. Пусть $\mathbb{X}$ — пространство всех интегрируемых функций на $\mathbb{T}^d$ таких, что $\widehat{f} \in \mathcal{X}$ с нормой $\|f\|_{\mathbb{X}} = \|\widehat{f}\|_{\mathcal{X}}$. Ясно, что $\mathbb{X}$ обладает свойствами (A)–(D).

Рассмотрим полиномы Рудина–Шапиро, т.е. полиномы вида

$$P_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n e^{int}, \qquad \varepsilon_n = \pm 1, \quad t \in \mathbb{T},$$

для которых $\|P_N\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \le 5\sqrt{N}$ (см., например, [29, гл. 4, § 4]). Рассмотрим функцию g_N на $\mathbb{T}^d$, полагая $g_N(t) = P_N(t_1)$ для $t = (t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbb{T}^d$. Мы видим, что $\|g_N\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \le 5N^{1/2}$ и вместе с тем $\|g_N\|_{\mathbb{X}} \ge N^{1/2}\log N$ при всех $N \ge 1$. Таким образом, по теореме 10 любая непрерывная функция, устойчивая в $\mathbb{X}$, постоянна. Остается заметить, что, пользуясь нерaвенством Гельдера, мы имеем

$$\sum_{k\in E}|x_k| \leq \|x\|_{l^p(\mathbb{Z}^d)}\ (\operatorname{card} E)^{1-1/p},$$

поэтому $\bigcup_{1<p<2} l^p(\mathbb{Z}^d) \subseteq \mathcal{X}$ и, следовательно, $\bigcup_{1<p<2} A_p(\mathbb{T}^d) \subseteq \mathbb{X}$. Теорема доказана.

Глава 4

Операторы суперпозиции в пространствах U и PW

Здесь мы рассматриваем операторы суперпозиции в пространстве $U(\mathbb{T})$ непрерывных функций на окружности $\mathbb{T}$, имеющих равномерно сходящийся ряд Фурье, и операторы суперпозиции в классах Пэли–Винера $PW(\mathbb{R}^n)$ функций из $L^2(\mathbb{R}^n)$, преобразование Фурье которых имеет ограниченный носитель.

§ 1. О равномерной сходимости рядов Фурье

Для произвольной интегрируемой функции f на окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая и $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел) рассмотрим ее ряд Фурье

$$f(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{ikt}, \qquad \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-ikt}dt.$$

Пусть $C(\mathbb{T})$ — пространство непрерывных функций f на $\mathbb{T}$ с обычной нормой $\|f\|_{C(\mathbb{T})} = \sup_{t\in\mathbb{T}} |f(t)|$.

Пусть $U(\mathbb{T})$ — пространство всех функций $f \in C(\mathbb{T})$, ряд Фурье которых равномерно сходится, т.е. $\|S_N(f) - f\|_{C(\mathbb{T})} \to 0$ при $N \to \infty$, где $S_N(f)$ есть N -ная частичная сумма ряда Фурье функции f:

$$S_N(f)(t) = \sum_{|k|\leq N} \widehat{f}(k)e^{ikt}.$$

Снабженное естественной нормой

$$\|f\|_{U(\mathbb{T})} = \sup_N \|S_N(f)\|_{C(\mathbb{T})},$$

пространство $U(\mathbb{T})$ является банаховым пространством.

Напомним (обсуждавшийся в гл. 1) результат Кахана [27, гл. IV]: если $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ — кусочно линейное но нелинейное непрерывное отображение, то $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \simeq \log|n|$. Здесь мы получим аналог этого утверждения для пространства $U(\mathbb{T})$.

Теорема 1. *Пусть φ — кусочно линейное но нелинейное непрерывное отображение окружности $\mathbb{T}$ в себя. Тогда $\|e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})} \simeq \log|n|,\ n \in \mathbb{Z}$.*

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что нетривиальные кусочно линейные замены переменной не действуют из $A(\mathbb{T})$ в $U(\mathbb{T})$. В самом деле, предположив, что для любой функции $f \in A(\mathbb{T})$ суперпозиция $f \circ \varphi$ принадлежит $U(\mathbb{T})$, мы имели бы $\|e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})} = O(1)$ (достаточно применить теорему о замкнутом графике к оператору $f \to f \circ \varphi$)[1]. Разумеется, отсюда следует, что такие замены переменной, вообще говоря, разрушают равномерную сходимость рядов Фурье.

Для доказательства теоремы 1 надо лишь доказать $\log|n|$ -оценку снизу, оценка сверху $\|e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})} = O(\log|n|)$ следует из неравенства $\|\cdot\|_{U(\mathbb{T})} \leq \|\cdot\|_{A(\mathbb{T})}$ и указанного выше результата Кахана.

Нам потребуется следующая лемма, возможно представляющая самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть $m \in C(\mathbb{T})$ функция такая, что*

$$\|m\|_* = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{m}(n)| \log(|n|+2) < \infty.$$

Тогда для любой функции $f \in U(\mathbb{T})$ имеем $mf \in U(\mathbb{T})$ и

$$\|mf\|_{U(\mathbb{T})} \leq c\|m\|_* \|f\|_{U(\mathbb{T})},$$

где константа $c > 0$ не зависит от f и m.

Доказательство. Пусть $f \in U(\mathbb{T})$. При $n \in \mathbb{Z}$ положим $e_n(t) = e^{int}$. Пусть $n > 0$. Прямым вычислением получаем

$$S_N(e_n f) = e_n S_{N+n}(f) + e_N \widehat{f}(N-n) - e_{N+n} S_n(e_{-N} f). \qquad (1)$$

Отсюда следует, что $e_n f \in U(\mathbb{T})$. В самом деле, при $N \to \infty$ первое слагаемое в правой части в (1) стремится в $C(\mathbb{T})$ к $e_n f$, в то время как остальные слагаемые стремятся к нулю.

Для любой функции $g \in U(\mathbb{T})$ мы имеем $\|g\|_{C(\mathbb{T})} \leq \|g\|_{U(\mathbb{T})}$. Вместе с тем (как хорошо известно) для любой функции $g \in C(\mathbb{T})$ имеем

$$\|S_n(g)\|_{C(\mathbb{T})} \leq c\|g\|_{C(\mathbb{T})} \log(n+2)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от n и g. Поэтому (1) дает

$$\|S_N(e_n f)\|_{C(\mathbb{T})} \leq \|S_{N+n}(f)\|_{C(\mathbb{T})} + \|f\|_{C(\mathbb{T})} + \|S_n(e_{-N} f)\|_{C(\mathbb{T})} \leq$$

[1] Конечно, это рассуждение дает большее. А именно, если φ — нетривиальная кусочно линейная замена переменной, то для любой последовательности $w(n),\ n = 0, 1, 2, \ldots$ неотрицательных вещественных чисел с условием $w(n) = o(\log n)$, найдется непрерывная функция f такая, что $\sum_k |\widehat{f}(k)| w(|k|) < \infty$, но $f \circ \varphi \notin U(\mathbb{T})$.

$$\leq \|f\|_{U(\mathbb{T})} + \|f\|_{C(\mathbb{T})} + c\|f\|_{C(\mathbb{T})} \log(n+2) \leq c_1 \|f\|_{U(\mathbb{T})} \log(n+2).$$

Таким образом,

$$\|e_n f\|_{U(\mathbb{T})} \leq c_1 \|f\|_{U(\mathbb{T})} \log(|n|+2).$$

То же верно при $n < 0$ (комплексное сопряжение сохраняет принадлежность функций классу $U(\mathbb{T})$ и не меняет норму функции в $U(\mathbb{T})$).

Остается лишь заметить, что

$$mf = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{m}(n) e_n f.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Стандартным образом отождествим функции на $\mathbb{T}$ и функции на отрезке $[-\pi, \pi]$. При $v \in \mathbb{R}$ определим функции e_v на $[-\pi, \pi]$, полагая $e_v(t) = e^{ivt}$. Для произвольного интервала $I \subseteq (-\pi, \pi)$ пусть (как и везде выше) 1_I — его характеристическая функция (функция на $[-\pi, \pi]$ такая, что $1_I(t) = 1$ при $t \in I$, $1_I(t) = 0$ при $t \in [-\pi, \pi] \setminus I$). При $0 < \varepsilon < \pi$ пусть Δ_ε — "треугольная" функция, сосредоточенная на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, т.е. функция на $[-\pi, \pi]$, определенная соотношением $\Delta_\varepsilon(t) = \max(0, 1 - |t|/\varepsilon)$.

Пусть t_0 — такая точка, что функция φ линейна в некоторой левой полуокрестности точки t_0 и линейна в некоторой правой полуокрестности точки t_0, но не линейна ни в какой её окрестности. Заменяя (при необходимости) функцию $\varphi(t)$ на $\varphi(t + t_0) - \varphi(t_0)$, можем считать, что $t_0 = 0$ и $\varphi(0) = 0$; таким образом, можем считать, что для некоторого ε, $0 < \varepsilon < \pi$ имеем $\varphi(t) = \alpha t$ при $t \in (-\varepsilon, 0]$ и $\varphi(t) = \beta t$ при $t \in [0, \varepsilon)$, где $\alpha \neq \beta$.

Непосредственное вычисление дает при $k \neq n\alpha,\ n\beta$

$$\widehat{\Delta_\varepsilon e^{in\varphi}}(k) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{n\alpha - k} - \frac{1}{n\beta - k}\right) -$$

$$-\frac{1}{i\varepsilon}\left(\frac{1}{n\alpha - k}\widehat{e_{n\alpha}1_{(-\varepsilon,0)}}(k) - \frac{1}{n\beta - k}\widehat{e_{n\beta}1_{(0,\varepsilon)}}(k)\right). \tag{2}$$

При $\lambda \in \mathbb{R}$ пусть

$$Q(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{Z}:\ |k-\lambda| \geq 1} \frac{1}{(k-\lambda)^2}.$$

Легко проверить, что

$$Q(\lambda) \leq 4, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Покажем сначала, что при $n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0$, мы имеем

$$\|\Delta_\varepsilon e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})} \geq \frac{1}{2\pi} \log |n| + c(\varphi), \tag{4}$$

где $c(\varphi)$ не зависит от n.

Если $g \in U(\mathbb{T})$ то функция $g(-t)$ и функция $\overline{g(t)}$ (полученная комплексным сопряжением) принадлежат $U(\mathbb{T})$ и имеют ту же норму, что и g. Поэтому при доказательстве оценки (4) мы можем считать, что $\alpha > 0$ и рассматривать лишь следующие три случая:

1) $|\beta| > \alpha$;

2) $\beta = -\alpha$;

3) $\beta = 0$.

Мы можем также считать, что n положительно и настолько велико, что $n\alpha \geq 2$.

Всюду далее мы полагаем $N = [n\alpha] - 1$, где $[x]$ означает целую часть числа x.

Случай 1). Имеем

$$\Big| \sum_{|k| \leq N} \frac{1}{n\alpha - k} \Big| = \sum_{|k| \leq N} \frac{1}{n\alpha - k} \geq \sum_{|k| \leq N} \frac{1}{N + 2 - k} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{2N+2} \geq \log(N+1) \geq \log \frac{n\alpha}{2}. \tag{5}$$

Вместе с тем, при $|k| \leq N$ имеем $|n\beta - k| \geq |n\beta| - |n\alpha| = n(|\beta| - \alpha)$, поэтому

$$\Big| \sum_{|k| \leq N} \frac{1}{n\beta - k} \Big| \leq \frac{2N+1}{n(|\beta| - \alpha)} \leq \frac{3n\alpha}{n(|\beta| - \alpha)} = \frac{3\alpha}{|\beta| - \alpha}. \tag{6}$$

Заметим далее, что, пользуясь неравенством Коши и равенством Парсеваля, мы получаем (см. (3))

$$\Big| \sum_{|k| \leq N} \frac{1}{n\alpha - k} \widehat{e_{n\alpha} 1_{(-\varepsilon,0)}}(k) \Big| \leq (Q(n\alpha))^{1/2} \|e_{n\alpha} 1_{(-\varepsilon,0)}\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq 2\varepsilon^{1/2}, \tag{7}$$

и аналогично

$$\Big| \sum_{|k| \leq N} \frac{1}{n\beta - k} \widehat{e_{n\beta} 1_{(0,\varepsilon)}}(k) \Big| \leq (Q(n\beta))^{1/2} \|e_{n\beta} 1_{(0,\varepsilon)}\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq 2\varepsilon^{1/2}. \tag{8}$$

Вместе соотношения (5)–(8) влекут (см. (2))

$$|S_N(\Delta_\varepsilon e^{in\varphi})(0)| = \Big| \sum_{|k| \leq N} \widehat{\Delta_\varepsilon e^{in\varphi}}(k) \Big| \geq \frac{1}{2\pi} \Big(\log \frac{n\alpha}{2} - \frac{3\alpha}{|\beta| - \alpha} \Big) - 4\varepsilon^{-1/2},$$

и мы получаем (4).

Случай 2). Имеем

$$\Bigg|\sum_{|k|\le N}\left(\frac{1}{n\alpha-k}-\frac{1}{n\beta-k}\right)\Bigg| = \Bigg|\sum_{|k|\le N}\left(\frac{1}{n\alpha-k}+\frac{1}{n\alpha+k}\right)\Bigg| =$$

$$= \Bigg|2\sum_{|k|\le N}\frac{1}{n\alpha-k}\Bigg| \ge \log\frac{n\alpha}{2}.$$

Вместе с оценками (7), (8), которые верны в случае 2), эта оценка дает

$$|S_N(\Delta_\varepsilon e^{in\varphi})(0)| \ge \frac{1}{2\pi}\log\frac{n\alpha}{2} - 4\varepsilon^{-1/2},$$

и мы опять получаем (4).

Случай 3). Имеем

$$\Bigg|\sum_{1\le|k|\le N}\left(\frac{1}{n\alpha-k}-\frac{1}{n\beta-k}\right)\Bigg| = \Bigg|\sum_{1\le|k|\le N}\left(\frac{1}{n\alpha-k}-\frac{1}{-k}\right)\Bigg| =$$

$$= \Bigg|\sum_{1\le|k|\le N}\frac{1}{n\alpha-k}\Bigg| \ge \log\frac{n\alpha}{2} - 1.$$

Заметим, что оценки (7), (8) верны в случае 3) если промежуток $|k| \le N$ в суммах заменить на $1 \le |k| \le N$. Таким образом, видим, что

$$\Bigg|\sum_{1\le|k|\le N}\widehat{\Delta_\varepsilon e^{in\varphi}}(k)\Bigg| \ge \frac{1}{2\pi}\left(\log\frac{n\alpha}{2} - 1\right) - 4\varepsilon^{-1/2},$$

и, поскольку $|\widehat{\Delta_\varepsilon e^{in\varphi}}(0)| \le 1$, получаем

$$|S_N(\Delta_\varepsilon e^{in\varphi})(0)| \ge \frac{1}{2\pi}\left(\log\frac{n\alpha}{2} - 1\right) - 4\varepsilon^{-1/2} - 1.$$

Оценка (4) доказана.

Заметим теперь, что $\widehat{\Delta_\varepsilon}(k) = O(1/|k|^2)$ при $|k| \to \infty$, поэтому

$$\|\Delta_\varepsilon\|_* = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\Delta_\varepsilon}(k)|\log(|k|+2) = M(\varepsilon) < \infty,$$

и из (4), пользуясь леммой 1, получаем

$$c(\varphi) + \frac{1}{2\pi}\log|n| \le \|\Delta_\varepsilon e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})} \le cM(\varepsilon)\|e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})}.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Было бы интересно описать поточечные мультипликаторы пространства $U(\mathbb{T})$, т.е. такие непрерывные функции m на $\mathbb{T}$, что $mf \in U(\mathbb{T})$ для любой функции $f \in U(\mathbb{T})$. По лемме 1, условие

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{m}(k)| \log(|k|+2) < \infty$$

является достаточным для того, чтобы функция m являлась мультипликатором. Автору не известно является ли это условие необходимым. Указанное условие нельзя заменить более слабым условием

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{m}(k)| < \infty,$$

т.е. условием $m \in A(\mathbb{T})$ (см. [27, гл. I, § 6]).

§ 2. О функциях из L^2 с ограниченным спектром

Пусть $PW(\mathbb{R}^n)$ — класс функций f вида

$$f(t) = \int_B g(u) e^{i(u,t)} du, \qquad t \in \mathbb{R}^n,$$

где g — произвольная функция из $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $B \subset \mathbb{R}^n$ — произвольный шар.

Ясно, что функция f принадлежит $PW(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда она непрерывна, принадлежит $L^2(\mathbb{R}^n)$ и имеет ограниченный спектр, т.е. её преобразование Фурье $\widehat{f}$ аннулируется вне некоторого шара. Для всякой такой функции f имеем $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(u) e^{i(u,t)} du, \qquad t \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — невырожденное аффинное отображение. Легко увидеть, что тогда для любой функции $f \in PW(\mathbb{R}^n)$ суперпозиция $(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t))$ также принадлежит $PW(\mathbb{R}^n)$. Достаточно заметить, что если $\varphi(t) = At + b$, где A — обратимая $(n \times n)$ -матрица и $b \in \mathbb{R}^n$, то

$$|\widehat{f \circ \varphi}(u)| = |\det A|^{-1} |\widehat{f}((A^{-1})^* u)| \tag{9}$$

для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Здесь A^{-1} — матрица обратная к A и $(A^{-1})^*$ — матрица сопряженная к A^{-1}.

Существуют ли другие отображения φ, действующие в PW? Мы получим полное описание непрерывных отображений $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, действующих из $PW(\mathbb{R}^n)$ в $PW(\mathbb{R}^m)$ [2].

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — аффинное отображение. Имеем $\varphi(t) = At + b$, где A есть $(n \times m)$ -матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Ясно, что отображение φ инъективно тогда и только тогда, когда ядро

$$\mathrm{ker}A = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0\}$$

матрицы A — тривиально, т.е. $\mathrm{ker}A = \{0\}$.

Теорема 2. *Пусть φ — непрерывное отображение $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *для любой функции $f \in PW(\mathbb{R}^n)$ суперпозиция $f \circ \varphi$ принадлежит $PW(\mathbb{R}^m)$;*

(ii) *φ — инъективное аффинное отображение.*

Отметим, что из этой теоремы немедленно следует, что при $n < m$ не существует непрерывных отображений $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, действующих из $PW(\mathbb{R}^n)$ в $PW(\mathbb{R}^m)$.

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем импликацию (i)$\Rightarrow$(ii). Напомним, что целая (т.е. аналитическая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$) функция f называется функцией экспоненциального типа, если $|f(z)| = O(e^{b|z|}),\ z \in \mathbb{C}$, где b – положительная константа. Хорошо известно, что для всякой такой функции f с нулями $\{z_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$ имеем

$$f(z) = e^{c_0 + c_1 z}\Pi(z),$$

где

$$\Pi(z) = z^m \prod_{k:\, z_k \neq 0} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z/z_k}$$

— каноническое произведение, построенное по нулям $\{z_k\}$ функции f с учетом их кратности (это частный случай теоремы Адамара о разложении на множители; см., например, [76, гл. VIII]).

[2] В работе [1] Ш. Азизи, Д. Кокрэйн и Дж. Н. Макдональд показали, что если φ — гомеоморфизм прямой $\mathbb{R}$ на себя такой, что для любой функции $f \in PW(\mathbb{R})$ мы имеем $f \circ \varphi \in PW(\mathbb{R})$, то отображение φ аффинно. Эти же авторы поставили вопрос [2] о том, верно ли аналогичное утверждение в многомерном случае. Мы не предполагаем, что φ — гомеоморфизм и не ограничиваемся случаем равных размерностей n, m.

Лемма 2. *Пусть* $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $D(z)$ — *целые функции, причем* C *и* D *имеют экспоненциальный тип. Пусть функции* A *и* C *не равны тождественно нулю. Предположим, что* ψ *непрерывная вещественная функция на* $\mathbb{R}$ *такая, что при всех вещественных* x *выполняются соотношения*

$$A(x)\psi(x) = B(x), \tag{10}$$

$$C(x)e^{i\psi(x)} = D(x). \tag{11}$$

Тогда ψ — *линейная (аффинная) функция,* $\psi(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Очевидно (см. (11)), что функция $D(z)$ не равна тождественно нулю. Обозначим через $\mathcal{N}$ объединение множеств нулей функций $A(z), C(z), D(z)$. Множество $\mathcal{N} \subset \mathbb{C}$ состоит из изолированных точек.

Из соотношений (10) и (11) получаем

$$e^{iB(x)/A(x)} = \frac{D(x)}{C(x)}$$

при всех $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}$. Следовательно (в силу теоремы единственности, см., например, [52, гл. III, § 6]), при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{N}$ имеем

$$e^{iB(z)/A(z)} = \frac{D(z)}{C(z)}, \tag{12}$$

$$e^{-iB(z)/A(z)} = \frac{C(z)}{D(z)}. \tag{13}$$

Особые точки функций B/A, D/C, C/D являются либо устранимыми, либо полюсами. Из соотношения (12) следует, что каждый полюс функции B/A, если бы такой существовал, являлся бы существенно особой точкой функции D/C — что невозможно. Поэтому B/A имеет лишь устранимые особые точки. Тогда в силу (12), (13) особые точки функций D/C и C/D также являются устранимыми и, следовательно, нули функций C и D совпадают с учетом кратности. Обозначая через Π каноническое произведение, построенное по этим нулям, и, учитывая, что функции C и D имеют экспоненциальный тип, получаем

$$C(z) = e^{\gamma(z)}\Pi(z), \quad D(z) = e^{\delta(z)}\Pi(z), \qquad z \in \mathbb{C},$$

где γ и δ — линейные функции от z. Соотношение (12) дает

$$e^{iB(z)/A(z)} = \frac{D(z)}{C(z)} = e^{\delta(z)-\gamma(z)}$$

при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{N}$. Поэтому при $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}$ имеем (см. (10))

$$e^{i\psi(x)} = e^{il(x)}, \tag{14}$$

где $l(x) = -i(\delta(x) - \gamma(x))$ — линейная функция. Поскольку функция ψ непрерывна и множество $\mathcal{N}$ не более чем счетно, соотношение (14) имеет место при всех $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\psi(x) = l(x) + 2\pi k(x),\ x \in \mathbb{R}$, где $k(x)$ принимает только целые вещественные значения. В силу непрерывности функции ψ функция $k(x)$ постоянная. Лемма доказана.

Следующая лемма тривиальна.

Лемма 3. *Пусть $f \in PW(\mathbb{R}^n)$. Пусть $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ — аффинное отображение. Тогда существует целая функция $F(z)$ экспоненциального типа такая, что $F(x) = f \circ l(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Имеем $l(x) = a + xb,\ x \in \mathbb{R}$, где a и b — некоторые векторы из $\mathbb{R}^n$. Пусть $B = B(0, r)$ — шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в 0 и радиуса r, содержащий носитель преобразования Фурье $\widehat{f}$ функции f. Положим

$$F(z) = \int_B \widehat{f}(u) e^{i(u,a)} e^{iz(u,b)} du, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Ясно что $F(x) = f \circ l(x)$ при $x \in \mathbb{R}$. Остается заметить, что поскольку при $u \in B$ мы имеем

$$|e^{i(u,a)} e^{iz(u,b)}| = |e^{iz(u,b)}| \le e^{|z||(u,b)|} \le e^{|z|r|b|},$$

где $|b|$ — длина вектора b, то

$$|F(z)| \le e^{r|b||z|} \int_B |\widehat{f}(u)| du \le e^{r|b||z|} |B|^{1/2} \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

где $|B|$ — объем шара B. Лемма доказана.

Покажем, что из условия (i) теоремы 2 следует, что отображение φ аффинно.

Для произвольного интервала $I \subset \mathbb{R}$ рассмотрим его характеристическую функцию 1_I (функцию на $\mathbb{R}$ такую, что $1_I(u) = 1$ при $u \in I$, $1_I(u) = 0$ при $u \in \mathbb{R} \setminus I$).

Рассмотрим также "треугольную" функцию $\Delta_{(-2,2)}$, сосредоточенную на интервале $(-2, 2) \subset \mathbb{R}$, а именно

$$\Delta_{(-2,2)}(u) = \max\left(1 - \frac{|u|}{2},\ 0\right), \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Обозначая через $^\vee$ обратное преобразование Фурье, простым вычислением получаем

$$(1_{(-1,1)})^\vee(x)=\frac{2\sin x}{x},\quad (1_{(0,2)})^\vee(x)=e^{ix}\frac{2\sin x}{x},$$

$$(\Delta_{(-2,2)})^\vee(x)=\frac{2\sin^2 x}{x^2},\qquad x\in\mathbb{R},$$

где мы считаем, что

$$\left.\frac{\sin x}{x}\right|_{x=0}=1.$$

При $1\le j\le n$ рассмотрим следующие функции от $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n$ (произведения по пустому множеству индексов считаются равными единице)

$$k(u)=\prod_{1\le s\le n}1_{(-1,1)}(u_s),$$

$$p_j(u)=\Delta_{(-2,2)}(u_j)\prod_{\substack{1\le s\le n\\ s\ne j}}1_{(-1,1)}(u_s),$$

$$q_j(u)=1_{(0,2)}(u_j)\prod_{\substack{1\le s\le n\\ s\ne j}}1_{(-1,1)}(u_s).$$

Определим функции $K,P_j,Q_j,\ j=1,2,\dots,n$, на $\mathbb{R}^n$, полагая

$$K=(k)^\vee,\quad P_j=(p_j)^\vee,\quad Q_j=(q_j)^\vee.$$

Имеем

$$K(t)=\prod_{1\le s\le n}\frac{2\sin t_s}{t_s},$$

$$P_j(t)=\frac{2\sin^2 t_j}{t_j^2}\prod_{\substack{1\le s\le n,\\ s\ne j}}\frac{2\sin t_s}{t_s},$$

$$Q_j(t)=e^{it_j}\frac{2\sin t_j}{t_j}\prod_{\substack{1\le s\le n,\\ s\ne j}}\frac{2\sin t_s}{t_s},\qquad t=(t_1,t_2,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Мы видим, что

$$K,\ P_j,\ Q_j\in PW(\mathbb{R}^n).\tag{15}$$

Заметим, что

$$Q_j(t)=e^{it_j}K(t),\qquad t\in\mathbb{R}^n,\tag{16}$$

и, поскольку

$$P_j(t) = \frac{\sin t_j}{t_j} K(t) = \frac{Q_j(t)/K(t) - K(t)/Q_j(t)}{2it_j} K(t)$$

при $t_j, K(t), Q_j(t) \neq 0$, то

$$2iP_j(t)Q_j(t)t_j = Q_j(t)^2 - K(t)^2, \qquad t \in \mathbb{R}^n. \tag{17}$$

Запишем отображение $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ в виде

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)), \qquad t = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m.$$

где функции $\varphi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ j = 1, 2, \dots, n$, непрерывны.

Пусть $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ — произвольное аффинное отображение.

Ясно, что сдвиг переменной сохраняет принадлежность функций классу $PW(\mathbb{R}^n)$, поэтому (см. (15)) функции

$$K(t - \varphi \circ l(0)),\ P_j(t - \varphi \circ l(0)),\ Q_j(t - \varphi \circ l(0)), \qquad t \in \mathbb{R}^n,$$

принадлежат $PW(\mathbb{R}^n)$. Из условия (i) теоремы 2 следует, что функции

$$K(\varphi(t) - \varphi \circ l(0)),\ P_j(\varphi(t) - \varphi \circ l(0)),\ Q_j(\varphi(t) - \varphi \circ l(0)), \qquad t \in \mathbb{R}^m,$$

принадлежат $PW(\mathbb{R}^m)$.

Рассмотрим следующие функции на $\mathbb{R}$:

$$K^*(x) = K(\varphi \circ l(x) - \varphi \circ l(0)),$$

$$P_j^*(x) = P_j(\varphi \circ l(x) - \varphi \circ l(0)),$$

$$Q_j^*(x) = Q_j(\varphi \circ l(x) - \varphi \circ l(0)), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

По лемме 3 каждая из этих функций является сужением на $\mathbb{R}$ соответствующей целой функции экспоненциального типа. Сохраняя обозначения, будем обозначать эти целые функции через $K^*(z),\ P_j^*(z),\ Q_j^*(z)$.

Заметим теперь, что в силу (16) и (17) мы имеем

$$Q_j^*(x) = e^{i(\varphi_j \circ l(x) - \varphi_j \circ l(0))} K^*(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

и, соответственно,

$$2iP_j^*(x)Q_j^*(x)(\varphi_j \circ l(x) - \varphi_j \circ l(0)) = (Q_j^*(x))^2 - (K^*(x))^2, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Заметим также, что

$$K^*(0) = K(0) \neq 0, \qquad 2iP_j^*(0)Q_j^*(0) = 2iP_j(0)Q_j(0) \neq 0,$$

и, таким образом, функции K^* и $2iP_j^*Q_j^*$ не равны тождественно нулю.

Фиксируем j. Ясно, что сумма и произведение целых функций экспоненциального типа также являются целыми функциями экспоненциального типа. Из соотношений (18), (19), применяя лемму 2 к функциям

$$\psi = \varphi_j \circ l - \varphi_j \circ l(0), \quad A = 2iP_j^*Q_j^*, \quad B = (Q_j^*)^2 - (K^*)^2, \quad C = K^*, \quad D = Q_j^*,$$

получаем, что функция $\varphi_j \circ l(x) - \varphi_j \circ l(0)$ является аффинной функцией от $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\varphi_j \circ l(x)$ является аффинной функцией от $x \in \mathbb{R}$. Поскольку аффинное отображение $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ было выбрано произвольно, получаем, что функция $\varphi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ аффинна. Поскольку это верно при всех j, $1 \le j \le n$, видим, что $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ является аффинным отображением $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Покажем теперь, что отображение φ инъективно. Всякая функция $F \in PW(\mathbb{R}^m)$ является (обратным) преобразованием Фурье некоторой функции из $L^1(\mathbb{R}^m)$, следовательно,

$$\lim_{|t| \to \infty} F(t) = 0. \tag{20}$$

Пусть $\varphi(t) = At + b$, где A есть $(n \times m)$ -матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что $\ker A \neq \{0\}$. Возьмем какую-нибудь функцию $f \in PW(\mathbb{R}^n)$ с условием $f(b) \neq 0$. Пусть $F = f \circ \varphi$. При всех $t \in \ker A$ имеем $F(t) = f(At+b) = f(b)$. Таким образом, суперпозиция $F = f \circ \varphi$ не удовлетворяет соотношению (20). Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) доказана.

Доказательство импликации (ii)$\Rightarrow$(i) практически тривиально. Пусть $\varphi(t) = At + b$, где A есть $(n \times m)$ -матрица, $\ker A = \{0\}$, и $b \in \mathbb{R}^n$. Покажем, что для любой функции $f \in PW(\mathbb{R}^n)$ мы имеем $f \circ \varphi \in PW(\mathbb{R}^m)$.

Инъективность отображения φ может иметь место лишь при $n \ge m$. Простой случай $n = m$ уже обсуждался выше (см. (9)). Поэтому можем считать, что $n > m$. Поскольку сдвиг сохраняет принадлежность функций классу PW можем также считать, что $b = 0$, т.е., что $\varphi(t) = At$.

Рассмотрим образ $\operatorname{im} \varphi$ отображения φ:

$$\operatorname{im} \varphi = \{Ax : x \in \mathbb{R}^m\}.$$

Это m -мерное подпространство в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим также следующее подпространство L в $\mathbb{R}^n$:

$$L = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Пусть S — естественное отображение $\mathbb{R}^m$ на L, а именно

$$S : (x_1, x_2, \dots, x_m) \to (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

Пусть K — обратимое линейное отображение $\mathbb{R}^n$ на себя такое, что $K(\operatorname{im}\varphi) = L$. Положим $Q = S^{-1}K\varphi$. Тогда Q — обратимое линейное отображение $\mathbb{R}^m$ на себя. Имеем $\varphi = K^{-1}SQ$ (через S^{-1}, K^{-1} обозначены отображения обратные к S и K соответственно).

Таким образом, достаточно убедиться, что для любой функции $f \in PW(\mathbb{R}^n)$ мы имеем $f \circ S \in PW(\mathbb{R}^m)$. Это легко сделать следующим образом. Пусть $f \in PW(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$f(Sx) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(u) e^{i(u,Sx)} du, \qquad x \in \mathbb{R}^m.$$

Для $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$u' = (u_1, u_2, \ldots, u_m), \quad u'' = (u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots u_n).$$

Будем писать $u = (u', u'')$. Рассмотрим шар в $\mathbb{R}^n$, содержащий носитель преобразования Фурье $\widehat{f}$ функции f. Пусть r — радиус этого шара. Имеем

$$f(Sx) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}} \widehat{f}(u', u'') du'' \right) e^{i(u',x)} du' = \int_{\mathbb{R}^m} g(u') e^{i(u',x)} du',$$

где

$$g(u') = \int_{|u''| \le \sqrt{r^2 - |u'|^2}} \widehat{f}(u', u'') du''.$$

Функция g аннулируется вне шара с центром в 0 и радиуса r в $\mathbb{R}^m$. Кроме того (пользуясь неравенством Коши), получаем

$$|g(u')| \le \int_{|u''| \le r} |\widehat{f}(u', u'')| du'' \le c \left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}} |\widehat{f}(u', u'')|^2 du'' \right)^{1/2},$$

где $c = c(r, n, m)$ зависит только от r, n, m, и мы видим, что $g \in L^2(\mathbb{R}^m)$. Теорема доказана.

Д о б а в л е н и е

Функции аналитические в круге. Внутренние функции и l^p-мультипликаторы

Пусть $A_p^+(D)$ $(1 \le p \le \infty)$ — пространство функций

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n, \qquad z \in D,$$

аналитических в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ таких, что последовательность коэффициентов Тейлора $\widehat{f} = \{\widehat{f}(n);\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ принадлежит l^p. Для $f \in A_p^+(D)$ положим $\|f\|_{A_p^+(D)} = \|\widehat{f}\|_{l^p}$.

Аналитическая в D функция m называется l^p -мультипликатором, если для всякой функции $f \in A_p^+(D)$ произведение $m \cdot f$ принадлежит $A_p^+(D)$. Семейство всех таких мультипликаторов мы обозначаем через $M_p^+(D)$. Снабженное естественной нормой

$$\|m\|_{M_p^+(D)} = \sup_{\|f\|_{A_p^+(D)} \le 1} \|m \cdot f\|_{A_p^+(D)},$$

пространство $M_p^+(D)$ является банаховой алгеброй (с обычным умножением функций).

Нас интересует следующий вопрос: какие внутренние функции принадлежат $M_p^+(D)$? Напомним, что аналитическая в D функция I называется внутренней, если $|I(z)| \le 1,\ z \in D$, и $|I(e^{it})| = 1$ почти всюду. При изучении указанного вопроса оказываются полезными некоторые соображения используемые при изучения экспонент $e^{i\lambda\varphi}$ с большими частотами и вещественными функциями φ на окружности $\mathbb{T}$.

Напомним некоторые стандартные факты. Хорошо известно (см. [55]), что $M_p^+(D) = M_q^+(D)$ при $1/p + 1/q = 1$ (соотношение двойственности), и

$$A_1^+(D) = M_1^+(D) = M_\infty^+(D) \subseteq M_p^+(D) \subseteq M_2^+(D) = H^\infty(D), \qquad (1)$$

где $H^\infty(D)$ — пространство Харди ограниченных аналитических функций в D.

Произведение Бляшке — это функция вида

$$B(z) = z^m \prod_{z_n \ne 0} \frac{-|z_n|}{z_n} \frac{z - z_n}{1 - \overline{z_n} z}$$

с нулями $\{z_n\} \subset D$, удовлетворяющими условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|) < \infty$$

(всякая такая функция является внутренней).

Сингулярная внутренняя функция — это внутренняя функция S, не имеющая нулей в D, такая, что $S(0) > 0$. Любая сингулярная внутренняя функция имеет вид

$$S(z) = \exp\left(-\int_{\partial D} \frac{\xi + z}{\xi - z} d\mu(\xi) \right),$$

где μ — положительная сингулярная мера на окружности $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Мера μ называется представляющей мерой функции S.

Всякая внутренняя функция I допускает факторизацию $I = \lambda BS$, где $\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1,$ — постоянная, B — произведение Бляшке, и S — сингулярная внутренняя функция [17].

Множество всех $\xi \in \mathbb{C}$ таких, что функция $1/I$ не может быть аналитически продолжена в окрестность точки ξ, называется спектром функции I. Обозначим это множество через $\sigma(I)$. Записывая I в виде $I = \lambda BS$, имеем (см. [56])

$$\sigma(I) = \overline{\{z_n\}} \cup \overline{\operatorname{supp}}\,\mu,$$

где $\overline{\{z_n\}}$ — замыкание множества нулей $\{z_n\}$ множителя Бляшке B и $\overline{\operatorname{supp}}\,\mu$ — замкнутый носитель представляющей меры сингулярного множителя S.

Поскольку $M_1^+(D) = M_\infty^+(D) = A_1^+(D)$ (см. (1)), внутренние функции в $M_p^+(D)$ при $p = 1,\ \infty$ — это лишь конечные произведения Бляшке с точностью до множителя $\lambda \in \mathbb{C}$ (только такие внутренние функции непрерывны в D вплоть до границы [17]). Случай $p = 2$ тривиален, так как $M_2^+(D)$ совпадает с пространством Харди $H^\infty(D)$ (см. (1)). Таким образом интерес представляет лишь случай $p \neq 1, \infty, 2$.

Отметим естественную связь между пространством $M_p^+(D)$ и классической алгеброй l^p-мультипликаторов Фурье $M_p(\mathbb{T})$ на окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, уже встречавшейся в гл. 3, § 3. Удобно использовать следующее эквивалентное определение пространств $M_p(\mathbb{T})$. Рассмотрим пространство $A_p(\mathbb{T})$ распределений f на $\mathbb{T}$, таких, что последовательность коэффициентов Фурье $\widehat{f} = \{\widehat{f}(k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ принадлежит l^p. (При $1 \leq p \leq 2$ всякое такое распределение является функцией из $L^q(\mathbb{T}),\ 1/p + 1/q = 1$. Мы считаем, что все функции из $A_1 = A$ непрерывны.) Напомним, что мы полагаем

$\|f\|_{A_p(\mathbb{T})} = \|\widehat{f}\|_{l^p}$. Тогда $M_p(\mathbb{T})$ состоит из ограниченных измеримых функций g на $\mathbb{T}$, для которых

$$\|g\|_{M_p(\mathbb{T})} = \sup_{f \in L^1(\mathbb{T});\ \|f\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq 1} \|g \cdot f\|_{A_p(\mathbb{T})} < \infty.$$

Учитывая включение $M_p^+(D) \subseteq H^\infty(D)$ (см. (1)) и идентифицируя всякую функцию m из $H^\infty(D)$ с ее (некасательной) граничной функцией $m^*(t) = m(e^{it})$, несложно увидеть, что $m^* \in M_p(\mathbb{T})$ тогда и только тогда когда $m \in M_p^+(D)$. При этом $\|m^*\|_{M_p(\mathbb{T})} = \|m\|_{M_p^+(D)}$. (Достаточно рассмотреть тригонометрические полиномы f и произведения $m(e^{it})e^{iNt}f(t)$, где N — степень полинома f.)

Отметим также, что, как показано в работе [37], если I — внутренняя функция такая, что $|\sigma(I) \cap \partial D| > 0$, то $I \notin M_p^+(D)$, каково бы ни было $p \neq 2$. (Этот результат следует из свойства существенной непрерывности l^p -мультипликаторов Фурье, полученного автором совместно с А. М. Олевским в [48], см. также [47], [49].) В частности, если спектр сингулярной функции S имеет положительную меру, то $S \notin M_p^+(D)$ при $p \neq 2$. По той же причине, если нули произведения Бляшке B накапливаются к множеству положительной меры, то $B \notin M_p^+(D)$ при $p \neq 2$.

§ 1. Сингулярные внутренние функции

Как показал Вербицкий [12], простейшая сингулярная внутренняя функция

$$S(z) = \exp\left(-a\frac{1+z}{1-z}\right), \qquad a > 0$$

(спектр которой — одноточечное множество $\{1\}$), принадлежит $M_p^+(D)$ лишь в тривиальном случае $p = 2$. Существуют ли вообще сингулярные внутренние функции $S \not\equiv 1$ в $M_p^+(D)$, $p \neq 2$? (Этот вопрос был поставлен С. А. Виноградовым.) Ответ на этот вопрос нам неизвестен.

Приведенные ниже теоремы 1, 2 и следствия показывают, что если спектр сингулярной внутренней функции

$$S(z) = \exp\left(-\int_{\partial D} \frac{\xi + z}{\xi - z} d\mu(\xi)\right)$$

недостаточно массивен, то S принадлежит $M_p^+(D)$ лишь при $p = 2$ (мы считаем, конечно, что S нетривиальна, т. е. ее спектр не пуст).

Для произвольного множества E на окружности ∂D пусть $|E|$ означает его лебегову меру и $\overline{E}$ – его замыкание. Если $I \subseteq \partial D$ – дуга, то через $d_E(I)$ мы обозначаем "наибольшую дыру в I", а именно

$$d_E(I) = \sup\{\ |J| :\ J\text{— дуга},\ J \subseteq I,\ J \cap E = \varnothing\}.$$

Следуя [5, гл. XIV, § 16], мы называем точку $\xi \in \partial D$ точкой густоты множества E, если $d_E(I) = o(|I|)$, когда дуга $I \ni \xi$ стягивается к ξ, т. е. когда $I \ni \xi$ и $|I| \to 0$. Множество всех точек густоты множества E обозначим через E^{th}. Очевидно, что для замкнутого множества мы имеем $E^{\mathrm{th}} \subseteq E$.

Теорема 1. *Пусть S — сингулярная внутренняя функция и E — ее спектр. Если $\overline{E^{\mathrm{th}}} \neq E$, то $S \notin M_p^+(D)$, каково бы ни было $p,\ p \neq 2,\ 1 \leq p \leq \infty$.*

Теорема 2. *Пусть S — сингулярная внутренняя функция и E — ее спектр, $E \neq \varnothing$. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ множество E может быть покрыто конечным числом дуг $\{I_n\}$ так, что*

$$\sum_n \frac{|I_n|^4}{d_E(I_n)^3} < \varepsilon. \tag{2}$$

Тогда $S \notin M_p^+(D)$, каково бы ни было $p,\ p \neq 2,\ 1 \leq p \leq \infty$. (То же заключение верно, если указанным свойством обладает какая-либо непустая порция множества E, т. е. множество вида $E \cap I$, где I — дуга.)

Для доказательства обеих теорем потребуется следующее утверждение, которое будет также использовано в § 2.

Лемма 1. *Пусть φ — вещественнозначная 2π -периодическая функция на прямой $\mathbb{R}$, такая, что $e^{i\varphi} \in M_p(\mathbb{T})$ для некоторого $p,\ p \neq 2,\ 1 \leq p \leq \infty$. Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}$ — интервал длины $|\Delta| \leq 2\pi$ и φ имеет непрерывную производную $\varphi^{(\nu)}$ порядка $\nu \geq 2$ на Δ. Тогда*

$$|\Delta|^\nu \inf_{t \in \Delta} |\varphi^{(\nu)}(t)| \leq c,$$

где $c = c(\varphi, p, \nu) > 0$ не зависит от Δ.

Доказательство. Можно считать, что $p > 2$, поскольку $M_p(\mathbb{T}) = M_q(\mathbb{T})$ при $1/p + 1/q = 1$ с соответствующим равенством норм [22]. Положим $\gamma = \|e^{i\varphi}\|_{M_p(\mathbb{T})}$. Пусть 1_Δ — характеристическая функция интервала

Δ, рассматриваемого как интервал на $\mathbb{T}$, т.е. 2π -периодическая функция, такая, что $1_\Delta(t)=1$ при $t\in\Delta$ и $1_\Delta(t)=0$ при $t\notin\Delta$; тогда

$$\|1_\Delta\|_{A_p(\mathbb{T})}=\|e^{i\varphi}\cdot 1_\Delta\cdot e^{-i\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})}\leq\gamma\|1_\Delta\cdot e^{-i\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})}. \tag{3}$$

Несложно оценить $\|1_\Delta\|_{A_p(\mathbb{T})}$. Для коэффициентов Фурье $\widehat{1_\Delta}$ имеем

$$|\widehat{1_\Delta}(k)|=\left|\frac{\sin(k|\Delta|/2)}{\pi k}\right|,\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\qquad \widehat{1_\Delta}(0)=\frac{|\Delta|}{2\pi}.$$

Таким образом, если $|k|\leq\pi/(2|\Delta|)$, то $|\widehat{1_\Delta}(k)|\geq|\Delta|/4\pi$ и, следовательно, для $p\neq\infty$

$$\|1_\Delta\|_{A_p(\mathbb{T})}=\|\widehat{1_\Delta}\|_{l^p}\geq\left(\frac{\pi}{2|\Delta|}\left(\frac{|\Delta|}{4\pi}\right)^p\right)^{1/p}\geq\frac{1}{20}|\Delta|^{1-1/p}, \tag{4}$$

что верно также и при $p=\infty$.

Для оценки нормы $\|1_\Delta\cdot e^{-i\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})}$ воспользуемся следующим вариантом леммы ван дер Корпута (см., например, [4, гл. I, § 1], [71, гл. VIII, § 1]): если вещественнозначная функция g имеет непрерывную производную $g^{(\nu)}$ порядка $\nu\geq 2$ на интервале Δ и $|g^{(\nu)}(t)|\geq\rho>0$ при $t\in\Delta$, то

$$\left|\int_\Delta e^{ig(t)}dt\right|\leq\frac{c_\nu}{\rho^{1/\nu}},$$

где c_ν — положительная константа, зависящая только от ν. В силу этого, полагая

$$\rho=\inf_{t\in\Delta}|\varphi^{(\nu)}(t)|,$$

и считая, что $\rho>0$ (иначе лемма доказана), получаем

$$|\widehat{1_\Delta\cdot e^{-i\varphi}}(k)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_\Delta e^{i(-\varphi(t)-ikt)}dt\right|\leq\frac{c_\nu}{2\pi\rho^{1/\nu}},\qquad k\in\mathbb{Z},$$

т. е.

$$\|\widehat{1_\Delta\cdot e^{-i\varphi}}\|_{l^\infty}\leq\frac{c_\nu}{2\pi\rho^{1/\nu}}.$$

Вместе с тем

$$\|\widehat{1_\Delta\cdot e^{-i\varphi}}\|_{l^2}=\|1_\Delta\cdot e^{-i\varphi}\|_{L^2(\mathbb{T})}=(|\Delta|/2\pi)^{1/2},$$

и, интерполируя l^p между l^2 и l^∞, имеем

$$\|1_\Delta\cdot e^{-i\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})}=\|\widehat{1_\Delta\cdot e^{-i\varphi}}\|_{l^p}\leq\|\widehat{1_\Delta\cdot e^{-i\varphi}}\|_{l^\infty}^{1-2/p}\cdot\|\widehat{1_\Delta\cdot e^{-i\varphi}}\|_{l^2}^{2/p}\leq$$

$$\leq\left(\frac{c_\nu}{2\pi\rho^{1/\nu}}\right)^{1-2/p}\left(\frac{|\Delta|}{2\pi}\right)^{1/p}. \tag{5}$$

Остается подставить оценки (5) и (4) в (3). Лемма доказана.

Применение леммы 1 при $\nu = 3$ дает следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть S — сингулярная внутренняя функция, E — ее спектр, и μ — ее представляющая мера. Предположим, что $S \in M_p^+(D)$ при некотором p, $p \neq 2$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда для любой дуги $I \subseteq \partial D$, такой, что $d_E(I) > 0$, справедливо неравенство*

$$\mu(I) \leq c|I|^4/d_E(I)^3,$$

где $c > 0$ не зависит от I.

Доказательство. Рассмотрим дугу $I \subseteq \partial D$, $d_E(I) > 0$. Выберем дугу $J \subseteq I$, такую, что $J \cap E = \varnothing$, $|J| > d_E(I)/2$. Можно считать, что J находится на положительном расстоянии от E. Пусть Δ — интервал в $\mathbb{R}$ длины $|\Delta| \leq 2\pi$, такой, что $J = \{e^{it},\ t \in \Delta\}$. Мы имеем $S(e^{it}) = e^{i\varphi(t)}$, где φ — вещественнозначная 2π -периодическая функция на $\mathbb{R}$, причем

$$\varphi(t) = \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta - t}{2}\right) d\mu(e^{i\theta}), \qquad t \in \Delta.$$

Ясно, что φ имеет непрерывные производные любого порядка на Δ. Дифференцируя по t, получаем

$$\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta - t}{2}\right)\right)'''_{ttt} = \frac{3\cos^2((\theta - t)/2) + \sin^2((\theta - t)/2)}{4\sin^4((\theta - t)/2)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{4\sin^4((\theta - t)/2)} = \frac{4}{|e^{i\theta} - e^{it}|^4}.$$

Следовательно, при $t \in \Delta$

$$\varphi'''(t) \geq \int_{\partial D} \frac{4}{|\xi - e^{it}|^4} d\mu(\xi) \geq \int_I \frac{4}{|\xi - e^{it}|^4} d\mu(\xi) \geq \frac{4\mu(I)}{|I|^4}.$$

В предположении, что $S \in M_p^+(D)$, имеем $e^{i\varphi} \in M_p(\mathbb{T})$. Используя лемму 1 при $\nu = 3$, видим, что

$$|\Delta|^3 \frac{4\mu(I)}{|I|^4} \leq c.$$

Остается учесть, что $|\Delta| = |J| > d_E(I)/2$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что $S \in M_p^+(D)$ при некотором $p \neq 2$; тогда по лемме 2 представляющая мера μ функции S такова, что

$$\left(\frac{d_E(I)}{|I|}\right)^3 \frac{\mu(I)}{|I|} \leq c$$

для любой дуги $I \subseteq \partial D$. Вместе с тем, поскольку μ сингулярна, для μ -почти всех $\xi \in \partial D$ имеем $\mu(I)/|I| \to \infty$, когда I стягивается к ξ. Таким образом, μ -почти все точки окружности ∂D являются точками густоты множества E, т. е. $\mu(\partial D \setminus E^{\mathrm{th}}) = 0$. Так как E — замкнутый носитель меры μ, отсюда следует, что $\overline{E^{\mathrm{th}}} = E$ вопреки условию теоремы. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Допустим, что $S \in M_p^+(D)$ при некотором $p \neq 2$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\{I_n\}$ — конечное покрытие множества E дугами, удовлетворяющее условию (2). Применение леммы 2 дает для представляющей меры μ функции S соотношение

$$\mu(\partial D) = \mu(E) \leq \sum_n \mu(I_n) \leq \sum_n c|I_n|^4/d_E(I_n)^3 < c \cdot \varepsilon,$$

что невозможно, если ε достаточно мало. Теорема доказана.

Укажем теперь ряд следствий из теорем 1 и 2.

Множество $E \subset \partial D$ называется пористым, если существует $c > 0$, такое, что любая дуга $I \subseteq \partial D$ содержит дугу J длины $|J| \geq c|I|$ такую, что $J \cap E = \varnothing$. (Примером пористого множества может служить множество $E = \{e^{it},\ t \in F\}$, где F — троичное канторово множество на отрезке $[0, 1]$.)

Следствие 1. *Пусть S — нетривиальная сингулярная внутренняя функция, спектр которой является пористым множеством. Тогда $S \notin M_p^+(D)$, каково бы ни было p, $p \neq 2$, $1 \leq p \leq \infty$.*

Это немедленно получается из теоремы 1, поскольку для всякого пористого множества E имеем $E^{\mathrm{th}} = \varnothing$.

Следствие 2. *Пусть $E \subset \partial D$ — замкнутое множество лебеговой меры нуль и $\{\delta_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ — дуги дополнительные к E, занумерованные в порядке невозрастания длин. Если*

$$\varliminf_{N\to\infty} |\delta_N|^{-3/4} \sum_{n>N} |\delta_n| = 0,$$

то, какова бы ни была нетривиальная сингулярная внутренняя функция S, спектр которой содержится в E, имеем $S \notin M_p^+(D)$ для любого $p \neq 2$. (В частности, это имеет место, если $\sum |\delta_n|^{1/4} < \infty$.)

Это вытекает из теоремы 2. В самом деле, фиксируем N и удалим из ∂D дуги $\delta_1, \dots, \delta_N$. Рассмотрим оставшиеся на окружности дуги $J_1, \dots, J_N$. Пусть I_n обозначает концентрическую с J_n дугу длины $|I_n| = 3|J_n|$, $n = 1, 2, \dots, N$. Тогда $\bigcup_n I_n \supset E$ и $d_E(I_n) \geq \min\{|\delta_N|, |J_n|\}$, $n = 1, 2, \dots, N$. Отсюда

$$\sum_n \frac{|I_n|^4}{d_E(I_n)^3} \leq \sum_{\substack{1\leq n\leq N \\ |J_n|\leq|\delta_N|}} \frac{(3|J_n|)^4}{|J_n|^3} + \sum_{\substack{1\leq n\leq N \\ |J_n|>|\delta_N|}} \frac{(3|J_n|)^4}{|\delta_N|^3} \leq$$

$$\leq 81 \sum_{n=1}^N |J_n| + \frac{81}{|\delta_N|^3} \left(\sum_{n=1}^N |J_n| \right)^4 = 81 \sum_{n>N} |\delta_n| + \frac{81}{|\delta_N|^3} \left(\sum_{n>N} |\delta_n| \right)^4.$$

Поскольку правая часть здесь может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора N, множество E (равно как и любое его подмножество) удовлетворяет условию теоремы 2.

Следствие 3. *Пусть $E \subset \partial D$ — (непустое) замкнутое множество и E_δ — его δ-окрестность, $E_\delta = \{\xi \in \partial D : \operatorname{dist}(\xi, E) < \delta\}$. Если*

$$\varliminf_{\delta\to+0} \delta^{-3/4} |E_\delta| = 0,$$

то, какова бы ни была сингулярная внутренняя функция S, спектром которой является E, имеем $S \notin M_p^+(D)$ для любого $p \neq 2$.

Это утверждение несложно вывести из предыдущего, но мы получим его непосредственно из теоремы 2. Фиксируем $\delta > 0$ и рассмотрим дуги $I_1, I_2, \dots, I_N$ ($N = N(\delta)$), из которых составлено E_δ (то есть связные компоненты множества E_δ). Можно считать, что $N > 1$. Заметим, что $d_E(I_n) \geq \delta$, $n = 1, 2, \dots, N$; поэтому для покрытия $\{I_n\}$ множества E получаем

$$\sum_n \frac{|I_n|^4}{d_E(I_n)^3} \leq \frac{1}{\delta^3} \sum_{n=1}^N |I_n|^4 \leq \frac{1}{\delta^3} \left(\sum_{n=1}^N |I_n| \right)^4 = \frac{1}{\delta^3} |E_\delta|^4.$$

Правая часть в этой оценке может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора $\delta > 0$.

В качестве иллюстрации теорем 1 и 2 обратимся к симметричным множествам. Напомним, что такие множества получаются следующим образом (см. [5, гл. XIV, § 19]). Фиксируем последовательность λ_n, $n = 1, 2, \ldots$, $0 < \lambda_n < 1$, и замкнутую дугу $I \subset \partial D$, $|I| = \rho_0$. Удалим из I концентрическую открытую дугу длины $\lambda_1\rho_0$. Останутся две замкнутые дуги равной длины ρ_1. Удалим из каждой из них по концентрической открытой дуге длины $\lambda_2\rho_1$. Останутся 4 замкнутые дуги длины $\rho_2, \ldots$. На n-ом шаге остается 2^n замкнутых дуг длины ρ_n. Продолжим этот процесс безгранично. Множество E оставшихся в I точек называется симметричным множеством с переменным отношением разбиения $\{\lambda_n\}$.

Несложно увидеть, что если

$$\varliminf_{N\to\infty} \lambda_{N+1}^{-3} \prod_{n=1}^{N}(1-\lambda_n) = 0, \tag{6}$$

то условие теоремы 2 выполнено и E, равно как и любое его непустое подмножество, не может являться спектром никакой сингулярной внутренней функции из $M_p^+(D)$, $p \neq 2$.

Ясно также, что если у симметричного множества E имеется хоть одна точка густоты, то $\lambda_n \to 0$. Несложно проверить, что в таком случае хаусдорфова размерность $\dim E$ множества E равна 1, и, таким образом, из теоремы 1 вытекает, что если E — симметричное множество и $\dim E < 1$, то E, равно как и всякое его непустое подмножество, не может являться спектром никакой сингулярной внутренней функции из $M_p^+(D)$, $p \neq 2$. (Вместе с тем пример $\{\lambda_n = 4/(n+4)\}$ дает $\dim E{=}1$, но при этом выполняется (6).)

Наконец, отметим, что в общем случае отсутствие точек густоты не налагает никаких ограничений на массивность множества по Хаусдорфу. Возьмем, например, множество E, обладающее так называемым свойством L, т. е. удовлетворяющее следующему условию: существуют две положительные последовательности $\{\alpha_j\}$ и $\{\mu_j\}$, $\lim \alpha_j = 0$, $\lim \mu_j = \infty$, такие, что при любом j множество E может быть покрыто объединением открытых интервалов с длинами, равными α_j, расстояние между которыми не менее $\alpha_j\mu_j$. Ясно, что если E обладает этим свойством, то $E^{\mathrm{th}} = \varnothing$. В тоже время для любой функции h, удовлетворяющей условиям $h(\delta) \downarrow +0$ при $\delta \downarrow +0$, $\lim_{\delta\to+0} h(\delta)/\delta = \infty$, найдется множество E строго положительной h -меры, обладающее свойством L (см. [27, гл. VII, § 6]).

Разумеется, все рассмотренные здесь условия массивности множеств $E \subset \partial D$ применимы лишь к множествам лебеговой меры нуль. Что касается сингулярных внутренних функций, спектр которых имеет положительную лебегову меру, то, как уже было отмечено, такие функции не являются мультипликаторами ни при каком $p,\ p \neq 2$.

§ 2. Произведения Бляшке

Здесь мы рассматриваем произведения Бляшке

$$B(z) = z^m \prod_{z_n \neq 0} \frac{-|z_n|}{z_n} \frac{z - z_n}{1 - \overline{z_n} z}, \qquad \{z_n\} \subset D, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty.$$

Согласно теореме Виноградова–Вербицкого (Виноградов [14], [15], Вербицкий [12]), если нули произведения Бляшке B с единственной предельной точкой нулей накапливаются к ней очень быстро, то $B \in M_p^+(D)$ при всех $p \neq 1,\ \infty$, а именно: если $z_n \to 1$ и

$$\sum_{n: |1 - z_n| < \varepsilon} |1 - z_n| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to +0,$$

то $B \in \bigcap_{1<p<\infty} M_p^+(D)$.

Следующая теорема дает необходимое условие для включения $B \in M_p^+(D)$ в случае, когда нули произведения Бляшке B расположены в замкнутой верхней полуплоскости $\overline{\mathbb{C}^+} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ и стремятся к 1.

Теорема 3. *Пусть B — произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$, $\lim z_n = 1$, и, начиная с некоторого номера, нули z_n принадлежат $\overline{\mathbb{C}^+}$. Если $B \in M_p^+(D)$ при некотором $p \neq 2,\ 1 \leq p \leq \infty$, то*

$$\sum_{n: |1 - z_n| < \varepsilon} (1 - |z_n|) = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to +0.$$

Следующая далее теорема 4 немедленно следует из теоремы 3 и дает обращение теоремы Виноградова-Вербицкого в случае, когда нули произведения Бляшке B расположены в замкнутой верхней полуплоскости $\overline{\mathbb{C}^+} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ и некасательно стремятся к 1. Таким образом, в этом случае мы имеем критерий принадлежности произведений Бляшке пространству $M_p^+(D)$.

Пусть S_α обозначает область Штольца с вершиной в 1, а именно: $S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |1 - z| \leq \alpha(1 - |z|)\},\ \alpha > 1$.

Теорема 4. *Пусть B — произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$, $\lim z_n = 1$ и (начиная с некоторого номера) нули z_n принадлежат $\overline{\mathbb{C}^+} \cap S_\alpha$. Если $B \in M_p^+(D)$ при некотором $p \neq 2,\ 1 \leq p \leq \infty$, то*

$$\sum_{n:|1-z_n|<\varepsilon} |1 - z_n| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to +0. \tag{7}$$

Доказательство теоремы 3. Ясно, что конечные произведения Бляшке (т. е. те, которые имеют конечное число нулей) принадлежат $A_1^+(D) \subseteq M_p^+(D)$; поэтому если B_0 — конечное произведение Бляшке, то $1/B_0(e^{it}) = \overline{B_0(e^{it})} \in M_p(\mathbb{T})$. Таким образом, поделив при необходимости B на конечное произведение Бляшке, мы можем считать, что все нули z_n лежат в $\overline{\mathbb{C}^+}$, а также что $m = 0$ и

$$0 \leq \arg z_n < \pi/8, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Положим

$$b_n(z) = \frac{-|z_n|}{z_n} \frac{z - z_n}{1 - \overline{z_n} z},$$

тогда $b_n(e^{it}) = e^{i\varphi_n(t)}$, где φ_n есть 2π -периодическая вещественнозначная функция на $\mathbb{R}$, имеющая производные любого порядка. Пусть $r_n = |z_n|$ и $\alpha_n = \arg z_n$. Прямое вычисление дает

$$\varphi_n'(t) = \frac{b_n'(e^{it})e^{it}}{b_n(e^{it})} = \frac{1 - r_n^2}{|e^{it} - z_n|^2}.$$

Таким образом, $B(e^{it}) = e^{i\varphi(t)}$, где $\varphi = \sum_n \varphi_n$ имеет непрерывные производные любого порядка в точках отличных от $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Имеем

$$\varphi_n''(t) = \frac{(1 - r_n^2) 2 r_n \sin(\alpha_n - t)}{|e^{it} - z_n|^4},$$

откуда

$$\varphi''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - r_n^2) 2 r_n \sin(\alpha_n - t)}{|e^{it} - z_n|^4}, \qquad e^{it} \neq 1.$$

Фиксируем ε, удовлетворяющее условию $0 < \varepsilon < \pi/8$, и рассмотрим интервал $\Delta = [-\varepsilon, -\varepsilon/2] \subset \mathbb{R}$. Тогда φ'' непрерывна на Δ и, поскольку $\sin(\alpha_n - t) > 0,\ n = 1, 2, \ldots$, при $t \in \Delta$ (см. (8)), то

$$\varphi''(t) \geq \sum_{n:|1-z_n|<\varepsilon} \frac{(1 - r_n^2) 2 r_n \sin(\alpha_n - t)}{|e^{it} - z_n|^4}, \qquad t \in \Delta. \tag{9}$$

Заметим теперь, что если $t \in \Delta$ и $|1 - z_n| < \varepsilon$, то $\varepsilon/2 \le \alpha_n - t \le \pi/4$ (см. (8)) и, следовательно, $\sin(\alpha_n - t) \ge \varepsilon/4$. Кроме того, для этих t и n имеем $|e^{it} - z_n| \le 2\varepsilon$ и $r_n = |z_n| \ge 1 - \varepsilon \ge 1/2$. Таким образом, (9) дает

$$\varphi''(t) \ge \sum_{n:|1-z_n|<\varepsilon} \frac{(1-r_n^2)2\cdot(1/2)\cdot(\varepsilon/4)}{(2\varepsilon)^4} \ge \frac{1}{64\varepsilon^3} \sum_{n:|1-z_n|<\varepsilon} (1-|z_n|), \quad t \in \Delta.$$

В предположении, что $B \in M_p^+(D)$ $(p \ne 2)$, имеем $e^{i\varphi} \in M_p(\mathbb{T})$ и, используя лемму 1 при $\nu = 2$, с учетом того, что $|\Delta| = \varepsilon/2$, получаем

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \frac{1}{64\varepsilon^3} \sum_{n:|1-z_n|<\varepsilon} (1-|z_n|) \le c$$

(c не зависит от ε), т. е.

$$\sum_{n:|1-z_n|<\varepsilon} (1-|z_n|) \le \mathrm{const}\cdot\varepsilon.$$

Теорема 3, а с ней и теорема 4 доказаны.

Неясно, является ли существенным условие некасательной сходимости в теореме 4. Более деликатным кажется вопрос, насколько существенным в теоремах 3, 4 является предположение об ассиметрии $\mathrm{Im} z_n \ge 0$. Было бы интересно рассмотреть произведения Бляшке с нулями расположенными симметрично относительно вещественной оси. Возможная интерференция может порождать новые эффекты.

Разумеется, утверждения аналогичные теоремам 3, 4 справедливы также в случае нулей, расположенных в замкнутой нижней полуплоскости.

Неясно, существуют ли внутренние функции, принадлежащие $M_{p_1}^+(D)$ и не принадлежащие $M_{p_2}^+(D)$ при $1 < p_2 < p_1 < 2$. Ни один из изложенных выше результатов не дискриминирует различные значения p. Из теоремы 4 и теоремы Виноградова–Вербицкого получаем, что если $z_n \to 1$, $\{z_n\} \subset \overline{\mathbb{C}^+} \cap S_\alpha$, и произведение Бляшке B с нулями $\{z_n\}$ принадлежит $M_p^+(D)$ при каком либо $p \ne 2$, то $B \in M_p^+(D)$ при всех p, $1 < p < \infty$.

Рассмотрим теперь следующий вопрос: к каким множествам на окружности ∂D могут накапливаться нули произведений Бляшке, принадлежащих $M_p^+(D)$, $p \ne 2$? Разумеется всякое конечное множество обладает этим свойством. Следующая теорема показывает, что такие множества могут быть континуальны. (Вместе с тем, как уже было отмечено, если нули произведения Бляшке B накапливаются к множеству положительной меры, то $B \notin M_p^+(D)$ каково бы ни было $p \ne 2$.)

Теорема 5. *Существует произведение Бляшке $B \in \bigcap_{1<p<\infty} M_p^+(D)$ такое, что множество предельных точек его нулей $\overline{\{z_n\}_{n=1}^\infty} \cap \partial D$ является (непустым) совершенным множеством.*

Доказательство. Для произвольного интервала $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ пусть S_Δ — оператор, задаваемый соотношением

$$S_\Delta(g) = (1_\Delta \widehat{g})^\vee, \quad g \in L^p \cap L^2(\mathbb{R}),$$

где $^\wedge$ и $^\vee$ — прямое и обратное преобразование Фурье, соответственно. Как известно (см., например, [69]), S_Δ является ограниченным оператором в $L^p(\mathbb{R})$ при всех $p,\ 1 < p < \infty$.

Пусть $F \subset \mathbb{R}$ — замкнутое множество лебеговой меры нуль. Пусть $\Delta_n,\ n = 1, 2, \dots,$ — интервалы, дополнительные к F (компоненты связности дополнения $\mathbb{R} \setminus F$). Рассмотрим квадратичную функцию $S(g)$ Литтлвуда–Пэли семейства $\{\Delta_n\}$, т.е.

$$S(g) = \left(\sum_n |S_{\Delta_n} g|^2 \right)^{1/2}.$$

Следуя [74], скажем, что множество F обладает свойством $LP(p)$ $(1 < p < \infty)$, если

$$c_1 \|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \|S(g)\|_{L^p(\mathbb{R})} \le c_2 \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Связь множеств такого типа с мультипликаторами Фурье хорошо известна. В частности, пусть m — произвольная ограниченная измеримая функция на $\mathbb{R}$ такая, что для ее вариаций $V(m, \Delta_n)$ на интервалах Δ_n имеем $\sup_n V(m, \Delta_n) < \infty$. Тогда m является $L^p(\mathbb{R})$ -мультипликатором Фурье [74]. Классическим примером множества, обладающего свойством $LP(p)$ при всех $p,\ 1 < p < \infty$, является множество $\{0\} \cup \{\pm 2^k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ [69]. Мы используем следующий факт: существует (непустое) совершенное множество F, обладающее свойством $LP(p)$ при всех $p,\ 1 < p < \infty$. Этот результат был впервые обнаружен в работе Хеар и Клемеша [78] о декомпозиции Литлвуда–Пэли в $\mathbb{Z}$ (см. также совместную работу автора и А. М. Олевского [48]). Детали конструкции имеются в совместной работе автора и А. М. Олевского [49].

Фиксируем такое множество F. Беря при необходимости его порцию, можно считать, что F содержится в некотором интервале длины 2π. Положим

$$E = \{e^{it},\ t \in F\}.$$

С учетом известной связи между мультипликаторами Фурье $M_p(\Gamma)$ на группах $\Gamma = \mathbb{R}$ и $\Gamma = \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (см., например, [22], [23], [86]) для доказательства теоремы остается лишь построить произведение Бляшке B с нулями, накапливающимися к E, такое, что его вариации $V(B, J_n)$ на дугах J_n, $n = 1, 2, \dots$, дополнительных к E, равномерно ограничены.

Покажем, что такое произведение Бляшке можно построить для любого замкнутого нигде не плотного множества $E \subset \partial D$.

Лемма 3. *Пусть $E \subset \partial D$ — замкнутое нигде не плотное множество. Пусть J_k, $k = 1, 2, \dots,$ — дуги дополнительные к E. Существует произведение Бляшке B такое, что множество E является множеством предельных точек нулей произведения B и $\sup_k V(B, J_k) < \infty$.*

Доказательство. При $n = 1, 2, \dots$ пусть $e^{i\alpha_n}$ и l_n — соответственно центр дуги J_n и длина хорды, стягивающей J_n. Выберем r_n, $0 < r_n < 1$, так, что $1 - r_n^2 \le l_n^3$, и положим $z_n = r_n e^{i\alpha_n}$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда $\overline{\{z_n\}_{n=1}^{\infty}} \cap \partial D = E$. Пусть B — произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$.

Фиксируем k и рассмотрим дугу J_k. Имеем

$$\frac{zB'(z)}{B(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - r_n^2}{|z - z_n|^2}, \qquad z \in J_k. \tag{10}$$

Заметим, что если $z \in J_k$ и $n \ne k$, то $|z - z_n| \ge l_n/2$ и, следовательно,

$$\sum_{n \ne k} \frac{1 - r_n^2}{|z - z_n|^2} \le \sum_{n \ne k} \frac{l_n^3}{(l_n/2)^2} \le 4 \sum_n l_n \le 4 \cdot 2\pi,$$

откуда

$$\int_{J_k} \sum_{n \ne k} \frac{1 - r_n^2}{|z - z_n|^2} |dz| \le 4 \cdot 2\pi |J_k| \le 16\pi^2. \tag{11}$$

Вместе с тем

$$\int_{J_k} \frac{1 - r_k^2}{|z - z_k|^2} |dz| = V\left(\frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z}, J_k\right) \le V\left(\frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z}, \partial D\right) = 2\pi, \tag{12}$$

и из (11) и (12) получаем (см. (10))

$$V(B, J_k) = \int_{J_k} |B'(z)||dz| = \int_{J_k} \left|\frac{zB'(z)}{B(z)}\right| |dz| \le 16\pi^2 + 2\pi.$$

Лемма а с ней и теорема 5 доказаны.

Неясно, для каждого ли множества $E \subset \partial D$ нулевой меры существует произведение Бляшке $B \in M_p^+(D)$, $p \neq 2$, с нулями, накапливающимися к E. Это неясно даже в случае, когда E счетно и имеет единственную предельную точку. Отрицательный ответ кажется более правдоподобным.

Замечания 1. Идентифицируем естественным образом пространства $l^p(\mathbb{Z}_+)$ и $A_p^+(D)$ (через $\mathbb{Z}_+$ обозначено множество неотрицательных целых чисел). Тогда инвариантные относительно правого сдвига подпространства в $l^p(\mathbb{Z}_+)$ соответствуют подпространствам в $A_p^+(D)$ инвариантным относительно оператора $(Sf)(z) = zf(z)$. Рассмотрим случай $1 < p < 2$. Предположим, что I — внутренняя функция такая, что $I \in M_p^+(D)$. Тогда оператор $(Pf)(z) = I(z)P_+((\overline{I^*}f^*)(z)$, где P_+ — проектор Рисса [1], и $*$ — означает переход к граничному значению, является проектором $A_p^+(D)$ на $I \cdot A_p^+(D)$. Таким образом, $I \cdot A_p^+(D)$ является инвариантным дополняемым подпространством в $A_p^+(D)$. Всякое ли инвариантное дополняемое подпространство X в $A_p^+(D)$ имеет вид $X = I \cdot A_p^+(D)$, где I — внутренняя функция, $I \in M_p^+(D)$? Ответ нам не известен. При $p = 2$ ответ конечно положителен — это утверждение классической теоремы Берлинга об инвариантных подпространствах в пространстве Харди $H^2(D)$ [17, гл. II, § 7].

2. Все изложенные результаты имеют прямые аналоги для внутренних функций в верхней полуплоскости и мультипликаторов $M_p^+(\mathbb{C}^+)$, естественно связанных с мультипликаторами Фурье на прямой. При этом в теореме 4 следует полагать, что z_n некасательно стремятся к 0, оставаясь в замкнутой правой полуплоскости; аналогом условия (7) является условие $\sum_{n:|z_n|<\varepsilon} |z_n| = O(\varepsilon)$.

[1] То есть оператор из $L^2(\mathbb{T})$ в пространство Харди $H^2(D)$, задаваемый соотношением $P_+ : \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{int} \to \sum_{n\geq 0} \widehat{f}(n)z^n$

Список литературы

1. Азизи, Кокрэйн, Мак Дональд (Azizi S., Cochran D., and McDonald J. N.), “On the preservation of bandlimitedness under non-affine time warping”, Proc. of the 1999 Int. Workshop on Sampling Theory and Applications (SAMPTA), Aug. 11-14, 1999, Loen, Norway, The Norwegian University of Science and Technology, pp. 37–40.

2. Азизи, Мак Дональд, Кокрэйн (Azizi S., McDonald J. N., and Cochran D.), “Preservation of bandlimitedness under non-affine time warping for multi-dimensional functions”, In: 20th Century Harmonic Analysis – A Celebration, J. S. Byrnes, ed., NATO Science Series, II Mathematics, Physics and Chemistry, 2001, V. 33, Kluwer, p. 369.

3. Алпар (Alpár L.), “Sur une classe partiqulière de séries de Fourier à certaines puissances absolument convergentes”, *Studia Sci. Math. Hungarica*, **3** (1968), 279–286.

4. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н., *Теория кратных тригонометрических сумм*, Наука, М., 1987.

5. Бари Н. К., *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.

6. Берлинг, Хелсон (Beurling A., Helson H.), “Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers”, *Math. Scand.,* **1** (1953), 120–126.

7. Бернстайн, Ватерман (Baernstein A., Waterman D.), “Functions whose Fourier series converge uniformly for every change of variable”, *Indiana Univ. Math. J.*, **22** (1972), 569–576.

8. Бернштейн С. Н., *Полное собрание сочинений*, т. 2. *Конструктивная теория функций*, Изд-во АН СССР, М., 1954.

9. Бохнер (Bochner S.), “Reviews of ‘On absolute convergence of multiple Fourier series’ by Szász and Minakshisundaram”, *Math. Rev.*, **8**:7 (1947), 376.

10. Ватерман (Waterman D.), “On the preservation of the order of magnitude of Fourier coefficients under every change of variable”, *Analysis*, **6**:2–3 (1986), 255–264.

11. Вейнгер (Weinger S.), *Special Trigonometric Series in k-Dimensions*, Mem. Amer. Math. Soc., **59**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1965.

12. Вербицкий И. Э., “О мультипликаторах пространств l^p_A”. *Функц. анализ и его прил.*, **14**:3 (1980), 67–68.

13. Винер Н., Пэли Р., *Преобразование Фурье в комплексной области*, Наука, М., 1964.

14. Виноградов С. А., “Мультипликаторы степенных рядов с последовательностью коэффициентов из l^p”. *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **39**(1974), 30–39.

15. Виноградов С. А., “Мультипликативные свойства степенных рядов с последовательностью коэффициентов из l^p”, *ДАН СССР*, **254**:6 (1980), 1301–1306.

16. Виноградов (Vinogradov S. A.), “Multiplicative properties of l^p_A”. In: *Linear and Complex Analysis Problem Book*, Lect. Notes in Math., Vol. 1034, Springer-Verlag, 1984, pp. 572–574.

17. Гарнет Дж., *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.

18. Герц (Herz C. S.), “Fourier transforms related to convex sets”, *Ann. of Math.*, **75**:1(1962), 81–92.

19. Гоффман, Ватерман (Goffman C., Waterman D.), “Functions whose Fourier series converge for every change of variable”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19**:1 (1968), 80–86.

20. Грин, Конягин (Green B., Konyagin S.), “On the Littlewood problem modulo a prime”, *Canad. J. Math.*, **61**:1 (2009), 141–164.

21. Грин, Сандерс (Green B., Sanders T.), “A quantitative version of the idempotent theorem in harmonic analysis”, *Ann. Math.*, **168**:3 (2008), 1025–1054.

22. Де Лю (De Leew K.), “On L^p-multipliers”, *Ann. Math.*, **81** (1965), 364–379.

23. Джодет (Jodeit M.), “Restrictions and extensions of Fourier Multipliers”, *Studia Math.*, **34** (1970), 215–226.

24. Зигмунд А., *Тригонометрические ряды*, т. 1, 2, Мир, М., 1965.

25. Кахан (Kahane J.-P.), “Sur certaines classes de séries de Fourier absolument convergentes”, *J. de Mathématiques Pures et Appliquées*, **35**:3 (1956), 249–259.

26. Кахан (Kahane J.-P.), “Transformées de Fourier des fonctions sommables”, *Proceedings of the Int. Congr. Math., 15-22 Aug., 1962, Stockholm, Sweden*, Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, Sweden, 1963, pp. 114–131.

27. Кахан Ж.-П., *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье*, Мир, М., 1976.

28. Кахан (Kahane J.-P.), “Quatre leçons sur les homéomorphismes du circle et les séries de Fourier”, in: *Topics in Modern Harmonic Analysis,* Vol. II, Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Roma, 1983, 955–990.

29. Кашин Б. С., Саакян А. А., *Ортогональные ряды*, Наука, М., 1984.

30. Койфман, Рубио де Франсиа, Семмес (Coifman R., Rubio de Francia J. L., Semmes S.), “Multiplicateurs de Fourier de $L^p(\mathbb{R})$ et estimations quadratique”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **306**:8 (1988), 351–354.

31. Колунцакис, Вольф (Kolountzakis M. N., Wolff T.), “On the Steinhaus tiling problem”, *Mathematika*, **46**:2 (1999), 253–280.

32. Коробков М. В., “Свойства C^1 -гладких функций, множество значений градиента которых топологически одномерно”, *Докл. РАН*, **430**:1 (2010), 18–20.

33. Ларсен (Larsen R.), *An introduction to the theory of multipliers*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

34. Лебедев В. В., “Замена переменной и скорость убывания коэффициентов Фурье”, *Матем. сб.*, **181**:8 (1990), 1099–1113.

35. Лебедев В. В., “Гомеоморфизмы тора, коэффициенты Фурье и интегральная гладкость”, *Изв. вузов. Матем.*, **12**, 1992, 37–42.

36. Лебедев В. В., “Внутренние функции и l^p -мультипликаторы”, *Функц. анализ и его прил.*, **32**:4 (1998), 10–21.

37. Лебедев (Lebedev V. V.), “Spectra of inner functions and l^p -multipliers”, in: Complex Analysis, Operators, and Related Topics: The S. A. Vinogradov Memorial Volume, *Operator Theory: Advances and Applications*, **113**, eds.: V. P. Havin, N. K. Nikolski; Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2000, 205–212.

38. Лебедев В. В., “Диффеоморфизмы окружности и теорема Берлинга–Хелсона”, *Функц. анализ и его прил.*, **36**:1 (2002), 30–35.

39. Лебедев В. В., “О топологической устойчивости непрерывных функций в некоторых пространствах, связанных с рядами Фурье”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:2 (2010), 131–164.

40. Лебедев В. В., “Количественные оценки в теоремах типа теоремы Берлинга–Хелсона”, *Матем. сб.*, **201**:12 (2010), 103–130.

41. Лебедев В. В., “Оценки в теоремах типа теоремы Берлинга–Хелсона. Многомерный случай”, *Матем. заметки*, **90**:3 (2011), 394–407.

42. Лебедев В. В., “Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Усиление теоремы Берлинга–Хелсона”, *Функц. анализ и его прил.*, **46**:2 (2012), 52–65.

43. Лебедев В. В., “О равномерной сходимости рядов Фурье”, *Матем. заметки*, **91**:6 (2012), 946–949.

44. Лебедев В. В., “О функциях из L^2 с ограниченным спектром”, *Матем. сб.*, **203**:11 (2012), 121–128.

45. Лебедев В. В., “О преобразовании Фурье характеристических функций областей с C^1 -гладкой границей”, *Функц. анализ и его прил.*, **47**:1 (2013), 33–46.

46. Лебедев, Олевский (Lebedev V., Olevskiĭ A.), “C^1 changes of variable: Beurling–Helson type theorem and Hörmander conjecture on Fourier multipliers”, *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*, **4**:2 (1994), 213–235.

47. Лебедев, Олевский (Lebedev V., Olevskiĭ A.), “Idempotents of Fourier multiplier algebra”, *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*, **4**:5 (1994), 540–544.

48. Лебедев, Олевский (Lebedev V., Olevskiĭ A.), “Bounded groups of translation invariant operators”, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, **322** (1996), 143–147.

49. Лебедев В. В., Олевский А. М., “L^p -мультипликаторы Фурье с ограниченными степенями”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:3 (2006), 129–166.

50. Леблан (Leblanc M. N.), “Sur la réciproque de l’inégalité de Carlson”, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série A*, **267** (1968), 332–334.

51. Лейбензон З. Л., “О кольце функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье”, *УМН*, **9**:3(61) (1954), 157–162.

52. Маркушевич А. И., *Теория аналитических функций*, ГИТТЛ, МЛ., 1950.

53. Маттила (Mattila P.), *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambrige Univ. Press, Cambrige, 1995.

54. Минакшисундарам, Сас (Minakshisundaram S., Szász O.), “On absolute convergence of multiple Fourier series”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **61**:1 (1947), 36–53.

55. Никольский Н. К., “О пространствах и алгебрах теплицевых матриц действующих в l^p”, *Сиб. матем. ж.*, **7** (1966), 146–158.

56. Никольский Н. К., *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980.

57. Ниренберг Л., *Лекции по нелинейному функциональному анализу*, Мир, М., 1977.

58. Олевский А. М., “Модификации функций и ряды Фурье”, *УМН*, **40**:3(243) (1985), 157–193.

59. Олевский А. М., “Гомеоморфизмы окружности, модификации функций и ряды Фурье”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Berkeley, CA, USA, 1986), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 976–989.

60. Олевский (Olevskii V.), “A note on multiplier transformations”, *Internat. Math. Res. Notices*, **1** (1994), 13–17.

61. Олевский (Olevskii V.), “Addendum to ‘A note on multiplier transformations’ ”, *Internat. Math. Res. Notices*, **7** (1994), 311.

62. Олевский (Olevskii V.), “Variation, homeomorphisms, and Fourier multipliers”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **325**:6 (1997), 639–644.

63. Ониани Г. Т., “Топологическая характеристика некоторых классов непрерывных функций, ряды Фурье которых сходятся равномерно”, *Сообщ. АН Груз. ССР*, **132**:2 (1988), 261–263.

64.順ланшерель, Пойа (Plancherel M., Pólya G.), “Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples. II”, *Comment. Math. Helv.*, **10**:1 (1937), 110–163.

65. Постников М. М., *Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия*, Наука, М., 1988.

66. Рубио де Франсиа (Rubio de Francia J. L.), “A Littlewood – Paley inequality for arbitrary intervals”, *Rev. Mat. Iberoam.,* **1**:2 (1985), 1–14.

67. Сандерс (Sanders T.), “The Littlewood–Gowers problem”, *Journal d' Analyse Mathematique*, **101**:1 (2007), 123–162.

68. Севастьянов Е. А., “Кусочно монотонная аппроксимация и Φ - вариация”, *Anal. Math.*, **1**:2 (1975), 141–164.

69. Стейн И. М., *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

70. Стейн И. М., “Некоторые проблемы гармонического анализа, связанные с понятием кривизны и осцилляторными интегралами”, в кн. *Международный конгресс математиков в Беркли, 1986. Обзорные доклады*, Мир, М., 1991, 297–332.

71. Стейн (Stein E. M.), *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993.

72. Стейн И., Вейс Г. , *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.

73. Стейн, Шакарчи (Stein E. M. and Shakarchi R.), *Fourier analysis: An introduction (Princeton Lectures in Analysis v. I)*, Princeton Univ. Press, Princeton and Oxford, 2003.

74. Сьогрен, Сьолин (Sjögren P., Sjölin P.), “Littlewood-Paley decompositions and Fourier multipliers with singularities on certain sets”, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **31**:1 (1981), 157–175.

75. Тиман А. Ф., *Теория приближения функций действительного переменного*, ГИФМЛ, М., 1960.

76. Титчмарш Е., *Теория функций*, ГИТТЛ, МЛ., 1951.

77. Трибель (Triebel H.), “Function spaces in Lipschitz domains and on Lipschitz manifolds. Characteristic functions as pointwise multipliers”, *Rev. Mat. Complutense*, **15**:2 (2002), 475–524.

78. Хеар, Клемеш (Hare K., Klemes I.), “On permutations of lacunary intervals”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **347**:10 (1995), 4105–4127.

79. Хедстром (Hedstrom G. W.), “Norms of powers of absolutely convergent Fourier series in several variables”, *Michigan Math. J.*, **14**:4 (1967), 493–495.

80. Хермандер Л., *Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига*, ИЛ, М., 1962.

81. Хинчин (Khintchine A.), “Über dyadiche Brüche”, *Math. Z.*, **18**:1 (1923), 109–116.

82. Чантурия З. А., “Модуль изменения функции и его применения в теории рядов Фурье”, *ДАН СССР*, **214**:1 (1974), 63–66.

83. Чантурия З. А., “Об абсолютной сходимости рядов Фурье”, *Матем. заметки*, **18**:2 (1975), 185–192.

84. Чантурия З. А., “О равномерной сходимости рядов Фурье”, *Матем. сб.*, **100(142)**:4(8) (1976), 534–554.

85. Шмидт В., *Диофантовы приближения*, Мир, М., 1983.

86. Эдвардс, Годри (Edwards R. E., Gaudry G. I.), *Littlewood–Paley and multiplier theory*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.