Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета
“Высшая школа экономики”

Общеинститутская кафедра высшей математики

На правах рукописи

УДК 517.5

Лебедев Владимир Владимирович

ОПЕРАТОРЫ СУПЕРПОЗИЦИИ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва 2013

Работа выполнена на кафедре высшей математики Московского института электроники и математики Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики”.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Холщевникова Наталья Николаевна,
профессор кафедры прикладной математики
МГТУ “Станкин”,

доктор физико-математических наук
Асташкин Сергей Владимирович,
профессор, зав. кафедрой функционального
анализа и теории функций
механико-математического факультета
Самарского государственного университета,

доктор физико-математических наук
Шкредов Илья Дмитриевич,
ведущий научный сотрудник отдела алгебры
и теории чисел, ФГБУН Математический
институт им. В. А. Стеклова РАН.

Ведущая организация: ФГБУН Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ)

Защита диссертации состоится 14 ноября 2013 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.022.01 при Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН по адресу: 119991, Москва, ул. Губкина, д. 8, конференц-зал (9-й этаж).

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке МИАН.

Автореферат разослан "____"_____________ 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.022.01 при МИАН,
доктор физико-математических наук,
профессор В. А. Ватутин

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В диссертации исследуются свойства операторов суперпозиции (замены переменной)

$$f \to f \circ \varphi$$

в некоторых пространствах функций, естественно возникающих в гармоническом анализе. (Как обычно $(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t))$.)

Для интегрируемых функций f на окружности $\mathbb{T}$ рассмотрим их разложения в ряд Фурье

$$f(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikt}.$$

С рядами Фурье связаны многие часто встречающиеся в анализе пространства "хороших" функций. Примерами служат: пространство непрерывных функций с условием

$$\sum_k |\widehat{f}(k)| < \infty$$

(алгебра Винера), его обобщение — пространство функций, преобразование Фурье которых $\widehat{f}$ суммируемо со степенью p, пространства Соболева, пространства функций с заданной скоростью убывания коэффициентов Фурье или с заданным их распределением и другие.

Для различных пространств $\mathbb{X}$ такого типа (по большей части в работе рассматриваются банаховы пространства) естественно рассматривать следующие три вопроса.

1. Можно ли произвольную непрерывную функцию на $\mathbb{T}$ привести в $\mathbb{X}$ при помощи гомеоморфной замены переменной, т.е. верно ли, что для любой непрерывной функции f найдется гомеоморфизм h окружности $\mathbb{T}$ на себя такой, что $f \circ h \in \mathbb{X}$?

2. Какие отображения окружности φ в себя (важным частным случаем являются гомеоморфизмы) допустимы в $\mathbb{X}$ (или действуют в $\mathbb{X}$), т.е. обладают тем свойством, что для любой функции $f \in \mathbb{X}$ мы имеем $f \circ \varphi \in \mathbb{X}$?

3. Какие функции f устойчивы в $\mathbb{X}$, т.е. обладают тем свойством, что для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ мы имеем $f \circ h \in \mathbb{X}$?

Второй вопрос допускает следующую модификацию. Имея два пространства $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ функций на $\mathbb{T}$ мы можем спросить, какие отображения φ окружности действуют из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$, т.е. обладают тем свойством, что для любой функции $f \in \mathbb{X}$ мы имеем $f \circ \varphi \in \mathbb{Y}$. Резонно также рассматривать многомерный случай т.е. пространства функций на торе $\mathbb{T}^n$, а также, не ограничиваясь периодическим случаем, рассматривать классы функций на прямой $\mathbb{R}$ или на $\mathbb{R}^n$, естественным образом характеризуемые поведением преобразования Фурье.

Начало исследований в направлении, связанном с приводимостью, было положено Г. Бором, который в 1935 г., улучшив более давний результат Ж. Пала, показал, что для любой вещественной непрерывной функции f на $\mathbb{T}$ существует гомеоморфизм $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ такой, что $f \circ h$ имеет равномерно сходящийся ряд Фурье. По-видимому следует считать, что этот результат Бора в целом положил начало изучению операторов суперпозиции в теории рядов Фурье. В дальнейшем задача о приводимости для различных пространств рассматривалась А. М. Олевским, Ж.-П. Кахaном, И. Кацнельсоном, А. А. Саакяном, Б. С. Кашиным, Д. Ватерманом. Обзор результатов по этой тематике содержится в работе Олевского [1] (см. также его работу [2]). Позже некоторые поставленные там проблемы рассматривались автором настоящей работы в [3] и [4].

Значительно менее изучено направление, связанное с допустимыми заменами переменной. Первым значительным результатом явилась теорема А. Берлинга и Г. Хелсона (при дополнительном предположении гладкости одновременно полученная З. Л. Лейбензоном). Согласно этой теореме в пространстве абсолютно сходящихся рядов Фурье нет нетривиальных допустимых замен. В дальнейшем для разных пространств функций вопрос об операторах суперпозиции, действующих в этих пространствах, рассматривался Ж.-П. Кахaном, И. Кацнельсоном, Н. Лебланом, Л. Алпаром, Р. Кауфманом, И. Домаром, Л. Хермандером. Обзор некоторых из этих результатов имеется в работе Кахана [5]. Ряд результатов о допустимых заменах в пространствах функций с последовательностью коэффициентов Фурье из l^p и в пространстве l^p -мультипликаторов Фурье был получен совместно автором и А. М. Олевским [6,7,8,9].

Еще менее изученным является направление, связанное с устойчивостью. Первые результаты получены К. Гоффманом и Д. Ватерманом для пространства функций на окружности $\mathbb{T}$, имеющих сходящийся всюду ряд Фурье, а также А. Бернстайном и Д. Ватерманом для пространства функций, имеющих равномерно сходящийся ряд Фурье. Вопрос об устойчивости в пространствах функций на $\mathbb{T}$ с заданной скоростью убывания преобразования Фурье рассматривался Ватерманом. Этот вопрос рассматривал также Г. Т. Ониани.

---

[1]Олевский А. М., “Модификации функций и ряды Фурье”, *УМН*, **40**:3(243) (1985), 157–193.

[2]Олевский А. М., “Гомеоморфизмы окружности, модификации функций и ряды Фурье”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Berkeley, CA, USA, 1986), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 976–989.

[3]Лебедев В. В., “Замена переменной и скорость убывания коэффициентов Фурье”, *Матем. сб.*, **181**:8 (1990), 1099–1113.

[4]Лебедев В. В., “Гомеоморфизмы тора, коэффициенты Фурье и интегральная гладкость”, *Изв. вузов. Матем.*, **12**, 1992, 37–42.

[5]Kahane J.-P., “Quatre leçons sur les homéomorphismes du circle et les séries de Fourier”, in: *Topics in Modern Harmonic Analysis,* Vol. II, Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Roma, 1983, 955–990.

[6]Lebedev V., Olevskiĭ A., “C^1 changes of variable: Beurling–Helson type theorem and Hörmander conjecture on Fourier multipliers”, *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*, **4**:2 (1994), 213–235.

[7]Lebedev V., Olevskiĭ A., “Idempotents of Fourier multiplier algebra”, *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*, **4**:5 (1994), 540–544.

[8]Lebedev V., Olevskiĭ A., “Bounded groups of translation invariant operators”, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, **322** (1996), 143–147.

[9]Лебедев В. В., Олевский А. М., “L^p -мультипликаторы Фурье с ограниченными степенями”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:3 (2006), 129–166.

Цель работы.

В диссертации, в основном, исследуется ряд вопросов, связанных с допустимыми заменами и с устойчивостью. Многие свойства операторов суперпозиции $f \to f \circ \varphi$ в различных пространствах проявляются в том, как при больших частотах $n \in \mathbb{Z}$ ведут себя в этих пространствах экспоненты $e^{in\varphi(t)}$. Изучению таких экспонент мы уделяем особое внимание. Получение оценок их норм в различных пространствах — одна из целей работы. Отметим, что некоторые вопросы, на первый взгляд не относящиеся к указанной тематике, в действительности могут быть сведены к задачам, связанным с операторами суперпозиции. В первую очередь это касается поведения преобразования Фурье характеристических функций (индикаторов) областей в $\mathbb{R}^n$. Выяснить, для каких областей преобразование Фурье характеристической функции принадлежит L^p — вторая цель работы. В том, что касается устойчивости — цель работы получить инвариантные условия устойчивости в различных пространствах.

Научная новизна.

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем:

1. Получено принципиальное усилении теоремы Берлинга–Хелсона, тем самым получено частичное решение известной проблемы Кахана, сформулированной им на Всемирном конгрессе математиков в Стокгольме в 1962 г.

2. Получены оценки норм экспонент $e^{i\lambda\varphi}$ в пространствах функций с последовательностью коэффициентов Фурье из l^p для C^1 -гладких фазовых функций φ.

3. Получены условия, при которых преобразование Фурье характеристической функции области с C^1 -гладкой границей принадлежит L^p. В случае плоских областей показано, что эти условия неулучшаемы.

4. В общем случае линейных нормированных пространств функций на $\mathbb{T}$ получено необходимое инвариантное условие устойчивости. При помощи этого результата для различных конкретных пространств функций на окружности получены инвариантные условия устойчивости непрерывных функций в этих пространствах. Для некоторых пространств получено полное описание соответствующих классов устойчивых функций.

Методы исследования.

В работе используются методы гармонического анализа, а также общие методы теории функций и функционального анализа.

Теоретическая и практическая ценность.

Диссертация носит теоретический характер. Результаты и методы работы могут найти применения в гармоническом анализе.

Апробация работы.

Результаты работы докладывались автором на следующих семинарах:
– по теории функций действительного переменного кафедры теории функций и функционального анализа механико–математического факультета МГУ (в течении ряда лет);
– математического института им. В. А. Стеклова;
– Санкт-Петербургского отделения математического института им. В. А. Стеклова;
– кафедры теории функций и функционального анализа Самарского государственного университета;
– отдела функционального анализа института математики Польской Академии Наук, Варшава, Польша;
– отделения математики технологического института штата Джорджия, Атланта, США;
– отделения математики Тель-Авивского университета, Тель-Авив, Израиль;
– отделения математики Варшавского университета, Варшава, Польша;

и на следующих конференциях:
– British-Russian Workshop in Functional Analysis; Эйлеровский международный математический институт, Санкт-Петербург, 13-17 октября, 1996;
– 9-ая Саратовская зимняя школа, Современные проблемы теории функций и их приложения; Саратов, 26 января-1 февраля, 1998;
– 7th Summer St. Petersburg Meeting in Mathematical Analysis; Эйлеровский международный математический институт, Санкт-Петербург, 17-20 июня, 1998;
– International Conference on Harmonic Analysis and Approximation; Нор-Амберд, Армения, 18-25 сентября, 1998;
– II международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения; Дюрсо, 27 мая-2 июня, 2002;
– 11th Summer St. Petersburg Meeting in Mathematical Analysis; Эйлеровский международный математический институт, Санкт-Петербург, 15-20 августа, 2002;
– International Conference on Harmonic Analysis and Approximation III; Цахкадзор, Армения, 20-27 сентября, 2005;
– 14th Summer St.-Petersburg Meeting in Mathematical Analysis; Эйлеровский международный математический институт, Санкт-Петербург, 6-11 июня, 2005;
– Harmonic Analysis and Related Problems (HARP), Зарос, Крит, Греция, 19-23 июня, 2006;
– ICREA Conference on Approximation Theory and Fourier Analysis; Центр математических исследований (CRM), Барселона, Испания, 12-16 декабря 2011;
– Spring School on Banach Algebras (прочитано 4 лекции); Бедлево, Польша, 28-31 марта, 2012.

Публикации.

Результаты диссертации полностью опубликованы в 10-ти статьях автора, список которых приведен в конце автореферата. Все работы опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК.

Непосредственное отношение к теме диссертации имеют результаты, полученные автором совместно с А. М. Олевским в работах [10,11,12,13]. Эти результаты в диссертацию не включены.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, замечаний об обозначениях, четырех глав, дополнения и списка литературы, содержащего 86 наименований. Объем диссертации 173 стр.

Краткое содержание диссертации

Содержание введения.

Во введении приводится краткий обзор ранее известных результатов и результатов диссертации.

Содержание главы 1.

Мы рассматриваем ряды Фурье

$$f(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikt}$$

(интегрируемых) функций f на окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел.

Пусть $A(\mathbb{T})$ — пространство непрерывных функций f на $\mathbb{T}$ таких, что последовательность коэффициентов Фурье $\widehat{f} = \{\widehat{f}(k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ принадлежит l^1. Снабженное естественной нормой

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} = \|\widehat{f}\|_{l^1(\mathbb{Z})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|,$$

пространство $A(\mathbb{T})$ является банаховым пространством. Хорошо известно, что $A(\mathbb{T})$ является банаховой алгеброй (с обычным умножением функций).

[10] Lebedev V., Olevskiĭ A., “C^1 changes of variable: Beurling–Helson type theorem and Hörmander conjecture on Fourier multipliers”, *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*, **4**:2 (1994), 213–235.

[11] Lebedev V., Olevskiĭ A., “Idempotents of Fourier multiplier algebra”, *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*, **4**:5 (1994), 540–544.

[12] Lebedev V., Olevskiĭ A., “Bounded groups of translation invariant operators”, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, **322** (1996), 143–147.

[13] Лебедев В. В., Олевский А. М., “L^p -мультипликаторы Фурье с ограниченными степенями”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:3 (2006), 129–166.

Естественными расширениями пространства $A(\mathbb{T})$ являются пространства $A_p(\mathbb{T})$, $1 < p \le 2$, интегрируемых функций f на $\mathbb{T}$ таких, что $\widehat{f}$ принадлежит l^p. Снабженные естественными нормами

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T})} = \|\widehat{f}\|_{l^p(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^p\right)^{1/p},$$

пространства $A_p(\mathbb{T})$, $1 < p \le 2$, являются банаховыми пространствами. При $p = 1$ мы полагаем $A_1 = A$.

Пусть имеется непрерывное отображение окружности в себя, т.е. непрерывная функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) \pmod{2\pi}.$$

Согласно известной теореме Берлинга–Хелсона [14] (см. также [15,16]), если $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$, то отображение φ линейно (аффинно) с целым угловым коэффициентом: $\varphi(t) = \nu t + \varphi(0)$, $\nu \in \mathbb{Z}$. Эта теорема дает решение проблемы П. Леви об описании эндоморфизмов алгебры $A(\mathbb{T})$: все эти эндоморфизмы тривиальны, т.е. имеют вид $f(t) \to f(\nu t + t_0)$. Другими словами, лишь тривиальные замены переменной допустимы в $A(\mathbb{T})$. В самом деле, если отображение φ таково, что для любой функции $f \in A(\mathbb{T})$ мы имеем $f \circ \varphi \in A(\mathbb{T})$, то, пользуясь стандартными рассуждениями (теоремой о замкнутом графике), видим, что оператор суперпозиции $f \to f \circ \varphi$ является ограниченным оператором в $A(\mathbb{T})$ и, поскольку экспонента e^{int} с любой частотой $n \in \mathbb{Z}$ имеет норму в $A(\mathbb{T})$, равную 1, получаем $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(1)$, откуда в силу теоремы Берлинга–Хелсона следует линейность отображения φ.

Отметим также еще одну версию теоремы Берлинга–Хелсона: если U — ограниченный коммутирующий со сдвигами оператор в l^1 такой, что $\|U^n\|_{l^1\to l^1} = O(1)$, $n \in \mathbb{Z}$, то $U = \xi S$, где ξ — постоянная, $|\xi| = 1$, и S — оператор сдвига.

Вместе с тем, хотя теорема Берлинга–Хелсона устанавливает неограниченность норм $\|e^{in\varphi}\|_A$ для нелинейных отображений $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, характер роста этих норм при $|n| \to \infty$ во многом неясен. То же касается поведения норм $\|e^{in\varphi}\|_{A_p}$, $p > 1$. Глава 1 посвящена изучению этих вопросов.

Отметим, что если отображение $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ непрерывно, то $\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$ не зависит от t. Заменяя отображение φ на $\varphi_0(t) = \varphi(t) - kt$, мы получим вещественную функцию φ_0 на $\mathbb{T}$. При этом $\|e^{in\varphi_0}\|_{A_p} = \|e^{in\varphi}\|_{A_p}$. Таким образом, вместо нелинейных непрерывных отображений $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ можно рассматривать непостоянные непрерывные функции $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. В этом случае нет надобности ограничиваться экспонентами с целыми частотами и можно равным образом изучать поведение экспонент $e^{i\lambda\varphi}$ с вещественными частотами λ.

[14] Beurling A., Helson H., “Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers”, *Math. Scand.,* **1** (1953), 120–126.

[15] Кахан Ж.-П., *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье*, Мир, М., 1976.

[16] Kahane J.-P., “Quatre leçons sur les homéomorphismes du circle et les séries de Fourier”, in: *Topics in Modern Harmonic Analysis,* Vol. II, Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Roma, 1983, 955–990.

Соответствующие результаты о поведении экспонент $e^{in\varphi}$ для нелинейных отображений $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ и целых частот n немедленно получаются в качестве простых следствий.

Приведем ранее известные результаты о поведении экспонент $e^{i\lambda\varphi}$ в пространствах A_p.

Пусть $C^s(\mathbb{T})$ — класс (комплекснозначных) функций на $\mathbb{T}$, имеющих непрерывную производную порядка s. Имеем $C^1(\mathbb{T}) \subseteq A(\mathbb{T}) \subseteq A_p(\mathbb{T})$.

Нетрудно показать, что для любой вещественной функции $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$ (и более того, для любой абсолютно непрерывной вещественной функции φ с производной из $L^2(\mathbb{T})$) при $1 \leq p < 2$ справедлива оценка

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(|\lambda|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}), \qquad |\lambda| \to \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{1}$$

(см. [17] в случае $p = 1$; общий случай немедленно получается интерполяцией между l^1 и l^2).

С другой стороны, давно известны оценки снизу норм экспонент $e^{i\lambda\varphi}$ для функций класса C^2. Предположим, что $\varphi \in C^2(\mathbb{T})$ — вещественная непостоянная функция и $1 \leq p < 2$. Тогда

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \geq c|\lambda|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $c = c(p, \varphi)$ не зависит от λ. При $p = 1$ эта оценка неявно содержится в работе З. Л. Лейбензона [18] и в явном виде была получена Ж.-П. Каханом [19] с использованием метода Лейбензона. В общем случае оценка (2) получена с использованием того же метода Л. Алпаром [20]. Простое и короткое доказательство для случая $p = 1$ имеется в [21] и в общем случае — в [22].

Таким образом, если $\varphi \in C^2(\mathbb{T})$ вещественная функция, $\varphi \neq \mathrm{const}$, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \simeq |\lambda|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \qquad |\lambda| \to \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

при всех $p,\ 1 \leq p < 2$. В частности

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \simeq \sqrt{|\lambda|}.$$

Отметим, что доказательство оценки Лейбензона–Кахана–Алпара (2) основано на лемме ван дер Корпута и существенно использует отделенность от нуля кривизны дуги графика функции φ, т.е. условие $|\varphi''(t)| \geq \rho > 0,\ t \in I$, где I — некоторый

[17] Кахан Ж.-П., *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье*, Мир, М., 1976; гл VI, § 3.

[18] Лейбензон З. Л., "О кольце функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье", *УМН*, **9**:3(61) (1954), 157–162.

[19] Kahane J.-P., "Sur certaines classes de séries de Fourier absolument convergentes", *J. de Mathématiques Pures et Appliquées*, **35**:3 (1956), 249–259.

[20] Alpár L., "Sur une classe partiqulière de séries de Fourier à certaines puissances absolument convergentes", *Studia Sci. Math. Hungarica*, **3** (1968), 279–286.

[21] Кахан Ж.-П., *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье*, Мир, М., 1976; гл. VI, § 3.

[22] Lebedev V., Olevskiĭ A., "C^1 changes of variable: Beurling–Helson type theorem and Hörmander conjecture on Fourier multipliers", *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*, **4**:2 (1994), 213–235.

интервал. Этот подход не позволяет рассматривать функции гладкости меньшей чем C^2.

В общем случае (без предположений гладкости) рост норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}$ может быть довольно медленным. Кахан показал (см. [23]), что если непостоянная непрерывная функция $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ кусочно линейна, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_A \simeq \log|\lambda|. \tag{4}$$

При $p > 1$ нормы $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})}$ могут вовсе не расти; известно (см., например, [24]), что для любой кусочно линейной вещественной функции φ на $\mathbb{T}$ имеем $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p} = O(1)$ при всех $p > 1$. Таким образом, случай $p > 1$ отличается от случая $p = 1$.

Укажем теперь известные результаты в C^1 -гладком случае (помимо оценки (1)). В работе [25] (совместная работа автора и А. М. Олевского) построена вещественная функция $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$, $\varphi \neq \mathrm{const}$, такая, что $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p} = O(1)$ при всех $p > 1$. Кроме того, эта функция нигде не линейна, т.е. не является линейной ни на каком интервале (и, таким образом, в определенном смысле, существенно отличается от кусочно линейных функций). Используя близкий метод, автор показал в [26], что для C^1 -гладких функций нормы $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}$ могут расти довольно медленно, а именно, если $\gamma(\lambda) \geq 0$ и $\gamma(\lambda) \to \infty$, то существует нигде не линейная вещественная функция $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$ такая, что

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(\gamma(|\lambda|)\log|\lambda|). \tag{5}$$

Таким образом, случай C^1 -гладкой фазы φ существенно отличается от C^2 -гладкого случая (см. (3)).

Приведем еще результат М. Н. Леблана [27]: если вещественная функция $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$ непостоянна и ее производная φ' удовлетворяет условию Липшица с показателем α, $0 < \alpha \leq 1$, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \geq c\frac{|\lambda|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{(\log|\lambda|)^2}, \qquad |\lambda| \geq 2. \tag{6}$$

Насколько нам известно — это единственная, ранее полученная, оценка снизу норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A$ в случае, когда $\varphi \in C^1$, но дважды дифференцируемость функции φ не предполагается.

Особый интерес при исследовании поведения норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ представляет, на наш взгляд, случай $p = 1$. Напомним, что согласно теореме Берлинга–Хелсона, приведенной выше, если φ — непрерывное отображение окружности в себя, такое, что $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(1)$, то φ линейно. В связи с этой теоремой Каханом бы-

[23] Кахан Ж.-П., *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье*, Мир, М., 1976; гл. VI, § 2.

[24] Lebedev V., Olevskiĭ A., "C^1 changes of variable: Beurling–Helson type theorem and Hörmander conjecture on Fourier multipliers", *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*, **4**:2 (1994), 213–235.

[25] Lebedev V., Olevskiĭ A., "C^1 changes of variable: Beurling–Helson type theorem and Hörmander conjecture on Fourier multipliers", *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*, **4**:2 (1994), 213–235.

[26] Лебедев В. В., "Диффеоморфизмы окружности и теорема Берлинга–Хелсона", *Функц. анализ и его прил.*, **36**:1 (2002), 30–35.

[27] Leblanc M. N., "Sur la réciproque de l'inégalité de Carlson", *C.R. Acad. Sci. Paris, Série A*, **267** (1968), 332–334.

ла поставлена следующая проблема: выяснить, для каких последовательностей ω_n, стремящихся к бесконечности, условие $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O(\omega_n)$ влечет линейность отображения φ. Отметим, что априори существование такой последовательности и, тем самым, возможное, принципиальное усиление теоремы Берлинга–Хелсона, — не очевидно. Никаких результатов на этот счет ранее не было. Для непрерывных кусочно линейных но не линейных отображений $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ имеем $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \simeq \log|n|$ (см. (4)). Может ли (для нелинейных непрерывных φ) рост норм $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})}$ быть медленнее логарифмического — неизвестно. Кахану принадлежит гипотеза о том, что из условия $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = o(\log|n|)$, $|n| \to \infty$, следует, что φ линейно. Насколько известно автору, впервые проблема об усилении теоремы Берлинга–Хелсона и гипотеза о минимальности логарифмического роста были сформулированы Каханом в докладе на Международном конгрессе математиков в Стокгольме в 1962 г. [28] Позднее они отмечались Каханом в [29] и [30].

В § 1 получено частичное решение проблемы Кахана. А именно, мы получаем следующее усиление теоремы Берлинга–Хелсона.

Теорема 1. *Пусть $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ — непрерывное отображение. Предположим, что*

$$\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = o\left(\left(\frac{\log\log|n|}{\log\log\log|n|}\right)^{1/12}\right), \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad |n| \to \infty. \tag{7}$$

Тогда φ — линейно, т.е. $\varphi(t) = \nu t + \varphi(0)$, $\nu \in \mathbb{Z}$.

Идеологически доказательство нашей теоремы до некоторой степени близко к доказательству теоремы Берлинга–Хелсона, изложенному Каханом в [31] (доказательство в [31] основано на совершенно другой идее нежели оригинальное доказательство Берлинга и Хелсона [32,33]). Мы модифицируем рассуждения Кахана и применяем их не к группе $\mathbb{T}$, а к циклической группе $\mathbb{T}_N$ при больших N и не к самому отображению φ, а к отображению φ_N, которое на $\mathbb{T}_N$ хорошо приближает отображение φ, и значения которого — рациональные числа "с малым общим знаменателем". Такое отображение строится при помощи теоремы Дирихле о совместных диофантовых приближениях. В доказательстве используется теорема Грина–Конягина [34], точнее ее важный частный случай, который для простых N дает оценку количества элементов произвольного множества $E \subseteq \mathbb{T}_N$ через l^1

[28] Kahane J.-P., "Transformées de Fourier des fonctions sommables", *Proceedings of the Int. Congr. Math., 15-22 Aug., 1962, Stockholm, Sweden*, Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, Sweden, 1963, pp. 114–131.

[29] Кахан Ж.-П., *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье*, Мир, М., 1976.

[30] Kahane J.-P., "Quatre leçons sur les homéomorphismes du circle et les séries de Fourier", in: *Topics in Modern Harmonic Analysis,* Vol. II, Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Roma, 1983, 955–990.

[31] Kahane J.-P., "Quatre leçons sur les homéomorphismes du circle et les séries de Fourier", in: *Topics in Modern Harmonic Analysis,* Vol. II, Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Roma, 1983, 955–990.

[32] Beurling A., Helson H., "Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers", *Math. Scand.,* **1** (1953), 120–126.

[33] Кахан Ж.-П., *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье*, Мир, М., 1976.

[34] Green B., Konyagin S., "On the Littlewood problem modulo a prime", *Canad. J. Math.*, **61**:1 (2009), 141–164; теорема 1.3.

-норму преобразования Фурье (на $\mathbb{T}_N$) его характеристической функции.

В конце параграфа указана соответствующая операторная версия полученной теоремы и обсуждаются некоторые открытые проблемы.

В дальнейшей части главы изучается поведение экспонент с C^1 -гладкой фазой в общем случае пространств $A_p,\ 1 \le p < 2$.

В § 2 получены оценки снизу норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ для C^1 -гладких вещественных функций φ на $\mathbb{T}$. Пусть задана непрерывная неубывающая функция ω на $[0, +\infty)$ такая, что $\omega(0) = 0$. Через $C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ обозначим класс непрерывно дифференцируемых функций g на $\mathbb{T}$ таких, что $\omega(g', \delta) = O(\omega(\delta)),\ \delta \to +0$, где

$$\omega(g', \delta) = \sup_{|t_1 - t_2| \le \delta} |g'(t_1) - g'(t_2)|, \qquad \delta \ge 0,$$

— модуль непрерывности производной g' функции g. В случае $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, мы пишем просто $C^{1,\alpha}$ вместо C^{1,δ^α}.

Мы показываем, что справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $1 \le p < 2$. Пусть φ — вещественная функция на $\mathbb{T}$. Предположим, что φ непостоянна и $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$. Тогда*

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \ge c\,|\lambda|^{1/p}\,\chi^{-1}\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| \ge 1, \tag{8}$$

где χ^{-1} — функция, обратная к $\chi(\delta) = \delta\omega(\delta)$, и $c = c(p, \varphi) > 0$ не зависит от λ.

Для фазовых функций, производная которых удовлетворяет условию Липшица с показателем α, из теоремы 2 немедленно получаем

Следствие 1. *Пусть $0 < \alpha \le 1$. Если φ — вещественная непостоянная функция на $\mathbb{T}$ и $\varphi \in C^{1,\alpha}(\mathbb{T})$, то при всех $p,\ 1 \le p < 1 + \alpha$, имеем*

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \ge c_p\,|\lambda|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{1+\alpha}}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

В частности, $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \ge c\,|\lambda|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$.

Отметим, что это следствие дает, в частности, усиление оценки Леблана (6). Ясно также, что для $\varphi \in C^2$ имеем $\alpha = 1$, и оценка (9) влечет оценку Лейбензона–Кахана–Алпара (2).

Отметим также, что оценка Лейбензона–Кахана–Алпара имеет локальный характер; грубо говоря, она остается в силе, если предположить, что φ нелинейна на некотором интервале и имеет на этом интервале требуемую гладкость. Наши оценки снизу также носят локальный характер (теорема $2'$).

Наконец отметим, что метод доказательства теоремы 2 не имеет ничего общего с методом, использованным для доказательства теоремы 1; в C^1 -гладком случае мы используем метод, который уместно назвать методом концентрации больших значений преобразования Фурье.

В § 3 для каждого класса $C^{1,\omega}$ мы строим нетривиальную функцию $\varphi \in C^{1,\omega}$, дающую медленный рост норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$, тем самым мы показываем, что оценка (8) теоремы 2 близка к окончательной, а в некоторых случаях является окончательной, а именно, мы показываем, что верна следующая

Теорема 3. *Пусть $\omega(2\delta) < 2\omega(\delta)$ при всех достаточно малых $\delta > 0$. Существует нигде не линейная вещественная функция $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ такая, что*

(i) $$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \leq c\frac{|\lambda|}{\log|\lambda|}\chi^{-1}\left(\frac{(\log|\lambda|)^2}{|\lambda|}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| \geq 2;$$

(ii) $$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_p\left(\int_1^{|\lambda|}\left(\chi^{-1}\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)^p d\tau\right)^{1/p}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| \geq 2,$$

при всех $p,\ 1 < p < 2$. Положительные константы c, c_p не зависят от λ.

Полагая $\omega(\delta) = \delta^\alpha,\ 0 < \alpha < 1$, в теореме 3 и пользуясь следствием 1, а также тривиальной оценкой $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p} \geq 1,\ 1 \leq p \leq 2$, немедленно получаем

Следствие 2. *Пусть $0 < \alpha < 1$. Существует нигде не линейная вещественная функция $\varphi \in C^{1,\alpha}(\mathbb{T})$ такая, что*

(i) $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O\big(|\lambda|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(\log|\lambda|)^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\big)$;

(ii) $$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \simeq |\lambda|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{1+\alpha}} \qquad \textit{при} \quad 1 < p < 1+\alpha,$$

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \simeq 1 \qquad \textit{при} \quad 1+\alpha < p < 2,$$

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O((\log|\lambda|)^{1/p}) \qquad \textit{при} \quad p = 1+\alpha.$$

Таким образом, при $p \neq 1$ оценка следствия 1 окончательна; среди нетривиальных функций класса $C^{1,\alpha}$, функция φ из следствия 2 дает минимально возможный рост норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ при $1 < p < 2,\ p \neq 1+\alpha$.

Другим следствием теоремы 3 является приведенный выше результат автора о существовании нетривиальных C^1 -гладких функций φ с крайне медленным (как угодно близким к логарифмическому) ростом норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A$ (см. (5)), а именно мы получаем

Следствие 3. *Пусть $\gamma(\lambda) \geq 0$ и $\gamma(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$. Существует нигде не линейная вещественная функция $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$ такая, что*

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} = O\big(\gamma(|\lambda|)\log|\lambda|\big), \qquad |\lambda| \to \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что наш метод построения нелинейных функций заданной гладкости, дающих медленный рост, является развитием метода, использованного в совместной работе автора и А. М. Олевского [35] при построении уже указанного выше примера (нигде не линейной) C^1 -гладкой фазовой функции φ такой, что $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} = O(1)$ при всех $p > 1$.

В § 4 рассмотрены C^1 -гладкие отображения окружности в себя и даны соответствующие версии результатов, полученных в §§ 2, 3. Эти версии (теоремы 4, 5) имеют естественные приложения к изучению операторов суперпозиции $f \to f \circ \varphi$ в пространствах A_p. В частности, мы указываем гладкость, которой может обладать нелинейное отображение $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ такое, что $f \circ \varphi \in \bigcap_{p>1} A_p$ для любой функции $f \in A$.

Отметим, что, как было показано ранее автором совместно с А. М. Олевским, если C^1 -гладкое отображение φ порождает ограниченный оператор суперпозиции в $A_p(\mathbb{T})$ при каком либо p, $p \neq 2$, то φ линейно [36].

В § 5 мы распространяем, полученные в §§ 2, 3 результаты о поведении норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p}$ на многомерный случай. Пусть $A(\mathbb{T}^m)$ — пространство непрерывных функций f на m -мерном торе $\mathbb{T}^m$ таких, что последовательность коэффициентов Фурье $\widehat{f} = \{\widehat{f}(k),\ k \in \mathbb{Z}^m\}$ принадлежит $l^1(\mathbb{Z}^m)$. При $1 < p \leq 2$ пусть $A_p(\mathbb{T}^m)$ — пространство интегрируемых функций f на $\mathbb{T}^m$ таких, что $\widehat{f} \in l^p(\mathbb{Z}^m)$. При $p = 1$ полагаем $A_1 = A$. Снабженные естественными нормами

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T}^m)} = \|\widehat{f}\|_{l^p(\mathbb{Z}^m)} = \bigg(\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} |\widehat{f}(k)|^p\bigg)^{1/p}$$

пространства $A_p(\mathbb{T}^m)$ являются банаховыми ($1 \leq p \leq 2$), причем $A(\mathbb{T}^m)$ — банахова алгебра (с обычным умножением функций).

Пусть $C^s(\mathbb{T}^m)$ — класс (комплекснозначных) функций на торе $\mathbb{T}^m$ таких, что все частные производные порядка s непрерывны.

В многомерном случае для фазовых функций φ гладкости C^2 (и выше) поведение норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_A$ ранее рассматривал Хедстром [37]. Как и в одномерном случае, легко получить оценку сверху, так, например [38], если $\varphi \in C^s(\mathbb{T}^m)$, $s >$

[35] Lebedev V., Olevskiĭ A., “C^1 changes of variable: Beurling–Helson type theorem and Hörmander conjecture on Fourier multipliers”, *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*, **4**:2 (1994), 213–235.

[36] Lebedev V., Olevskiĭ A., “C^1 changes of variable: Beurling–Helson type theorem and Hörmander conjecture on Fourier multipliers”, *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*, **4**:2 (1994), 213–235.

[37] Hedstrom G. W., “Norms of powers of absolutely convergent Fourier series in several variables”, *Michigan Math. J.*, **14**:4 (1967), 493–495.

[38] Чтобы убедиться в этом, достаточно повторить, с очевидными изменениями, рассуждения, использованные при $m = 1$ в гл. VI, § 3 книги Кахана *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье*, Мир, М., 1976.

$m/2,\ m \geq\ 2$, то $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^m)} = O(|\lambda|^{m/2})$ (в [39] эта оценка, являющаяся многомерным аналогом оценки (1) для $p = 1$, получена при несколько иных предположениях гладкости). В той же работе Хедстрома [40] получена следующая оценка снизу: если $\varphi \in C^2(\mathbb{T}^m)$ — вещественная функция такая, что матрица ее вторых производных имеет определитель, не равный тождественно нулю, то

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A(\mathbb{T}^m)} \geq c|\lambda|^{m/2}. \tag{10}$$

Этот результат является многомерным вариантом результата Лейбензона–Кахана, т.е. оценки (2) при $p = 1$. Доказательство заключается в сведении к одномерному случаю.

Основным результатом § 5 является теорема 6, являющаяся многомерным аналогом теоремы 2. Мы получаем многомерный вариант нашей оценки (8), т.е. оценку снизу норм $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}$ для C^1 -гладких вещественных функций φ на торе $\mathbb{T}^m$. При этом мы предполагаем, что множество значений $\nabla\varphi(\mathbb{T}^m)$ градиента $\nabla\varphi$ функции φ имеет положительную (лебегову) меру; в этом случае мы говорим, что градиент функции φ невырожден. Это условие является заменой условия нелинейности (непостоянства) в многомерном случае. Основой доказательства теоремы является естественная модификация метода концентрации больших значений преобразования Фурье, использованного в § 2 для одномерного случая.

Отметим, что для C^2 -гладких функций φ наше условие невырожденности градиента равносильно условию $\det(\partial^2\varphi/\partial t_i\partial t_j) \not\equiv 0$. Это следует из теоремы Сарда о критических значениях (см., например, [41]) и теоремы об обратном отображении, примененных к отображению $\nabla\varphi$.

Для фазовых функций с градиентом, удовлетворяющим условию Липшица с показателем α, теорема 6 влечет следствие 4, являющееся многомерным вариантом следствия 1. Частный случай следствия 4 при $\alpha = 1$ (следствие 5) немедленно влечет результат Хедстрома (10).

Далее, для каждого класса фазовых функций заданной гладкости мы строим фазу φ, имеющую нигде не вырожденный градиент, такую, что нормы $\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T}^m)}$ растут очень медленно (теорема 7 и ее следствия 6, 7). Для одномерного случая это сделано в § 3. Общий случай легко получить из одномерного, т.е. из теоремы 3.

Отметим еще, что, пользуясь вполне стандартными методами, мы получаем многомерный аналог оценки (1) (теорема 8) и с учетом нашей оценки снизу получаем многомерный аналог соотношения (3) (теорема 9).

Содержание главы 2.

Пусть D — ограниченная область (открытое связное множество) в $\mathbb{R}^n,\ n \geq 2$. Рассмотрим ее характеристическую функцию 1_D, т.е. функцию на $\mathbb{R}^n$, принима-

[39] Hedstrom G. W., “Norms of powers of absolutely convergent Fourier series in several variables”, *Michigan Math. J.*, **14**:4 (1967), 493–495.

[40] Hedstrom G. W., “Norms of powers of absolutely convergent Fourier series in several variables”, *Michigan Math. J.*, **14**:4 (1967), 493–495.

[41] Ниренберг Л., *Лекции по нелинейному функциональному анализу*, Мир, М., 1977; гл. 1, § 2.

ющую значение $1_D(t) = 1$ при $t \in D$ и значение $1_D(t) = 0$ при $t \notin D$. Рассмотрим преобразование Фурье $\widehat{1_D}$ этой функции. В главе 2 изучается следующий вопрос: для каких областей D мы имеем $\widehat{1_D} \in L^p(\mathbb{R}^n)$? Интерес представляет лишь случай $1 < p < 2$.

Удобно иметь дело с пространствами $A_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, умеренных распределений f на $\mathbb{R}^n$ таких, что преобразование Фурье $\widehat{f}$ принадлежит $L^p(\mathbb{R}^n)$. Норма в $A_p(\mathbb{R}^n)$ определяется естественным образом: $\|f\|_{A_p(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

Прямое вычисление показывает, что если D — куб в $\mathbb{R}^n$, то $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$ при всех $p > 1$. То же верно в случае, когда D — многогранник (т.е. конечное объединение симплексов). С другой стороны, пользуясь хорошо известной ассимптотикой функций Бесселя, можно убедиться, что если $D \subseteq \mathbb{R}^n$ — шар, то $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$ при $p > 2n/(n+1)$ и $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^n)$ при $p \leq 2n/(n+1)$. Такой же результат имеет место в общем случае для ограниченных областей с дважды гладкой границей. (Это вытекает из теорем 1, 2 главы 2.) Таким образом, для ограниченных областей с C^2 -гладкой границей $2n/(n+1)$ является критическим значением показателя интегрируемости преобразования Фурье характеристической функции.

Мы получаем ряд результатов о поведении преобразования Фурье характеристических функций ограниченных областей с C^1 -гладкой границей. Этот случай, вообще говоря, существенно отличается от дважды гладкого; в § 3 мы строим пример области $D \subseteq \mathbb{R}^2$, граница которой C^1 -гладкая, и вместе с тем $1_D \in A_p(\mathbb{R}^2)$ при всех $p > 1$. (Критическое значение для плоских областей с дважды гладкой границей равно $4/3$.)

Отметим, что различные вопросы о поведении на бесконечности (порядке убывания к нулю) преобразования Фурье характеристических функций областей и близкие вопросы о поведении преобразования Фурье (гладких) мер, сосредоточенных на поверхностях, исследовались многими авторами и относятся к классической тематике гармонического анализа, см. обзорную статью И. Стейна [42], где имеется обширная библиография, а также его книгу [43] (гл. VIII). Основными инструментами для получения асимптотических оценок в этих исследованиях являются метод стационарной фазы и лемма ван дер Корпута. Применение этих методов требует значительной гладкости границы области, как минимум равной двум уже в плоском случае. Важнейшую роль при таком подходе играет кривизна поверхности (границы области). Наш подход не использует никаких соображений, связанных с кривизной, и позволяет рассматривать области с C^1 -гладкой границей.

Мы обозначаем границу области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ через ∂D. Говоря, что граница области D является C^1 -гладкой или C^2 -гладкой, мы имеем ввиду, что в окрестности

[42] Стейн И. М., “Некоторые проблемы гармонического анализа, связанные с понятием кривизны и осцилляторными интегралами”, в кн. *Международный конгресс математиков в Беркли, 1986. Обзорные доклады*, Мир, М., 1991, 297–332.

[43] Stein E. M., *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993.

каждой своей точки граница ∂D является графиком некоторой (вещественной) функции класса C^1 или C^2 соответственно (т.е. функции, у которой все частные производные первого или второго порядка соответственно — непрерывны).

Для всякой области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ с C^1 -гладкой границей пусть $\nu_D(x)$ — единичная внешняя нормаль к ∂D в точке $x \in \partial D$. Возникающее таким образом отображение $\nu_D : \partial D \to S^{n-1}$ границы области D в единичную сферу S^{n-1} с центром в начале координат мы называем нормальным отображением. Через $\omega(\nu_D, \delta)$ обозначим модуль непрерывности отображения ν_D:

$$\omega(\nu_D, \delta) = \sup_{x,y\ \in \partial D;\ |x-y| \leq \delta} |\nu_D(x) - \nu_D(y)|, \qquad \delta \geq 0,$$

где $|u|$ — длина вектора $u \in \mathbb{R}^n$. Пусть далее $\omega(\delta)$ — произвольная неубывающая непрерывная функция на $[0, \infty)$ такая, что $\omega(0) = 0$. В случае, когда $\omega(\nu_D, \delta) = O(\omega(\delta)),\ \delta \to +0$, мы говорим, что граница ∂D является $C^{1,\omega}$ -гладкой [44].

Если граница ∂D области D является C^1 -гладкой, C^2 -гладкой или $C^{1,\omega}$ -гладкой, то мы пишем $\partial D \in C^1,\ \partial D \in C^2,\ \partial D \in C^{1,\omega}$, соответственно. Если $\omega(\delta) = \delta^\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$, то мы пишем просто $C^{1,\alpha}$ вместо C^{1,δ^α}.

В § 1 мы получаем следующую простую теорему.

Теорема 1. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, такая, что $\partial D \in C^1$. Тогда $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$ при всех $p > 2n/(n+1)$.*

Для выпуклых областей (без предположения гладкости границы) такое утверждение было ранее получено К. Герцем [45].

В § 2 получен основной результат главы 2. А именно, мы показываем, что справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, такая, что $\partial D \in C^{1,\omega}$. Если*

$$\int_0^1 \frac{\delta^{n(p-1)-1}}{(\omega(\delta))^{n-p}}\, d\delta = \infty, \tag{11}$$

то $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^n)$.

Из теоремы 2 немедленно получаем

[44] Для ограниченных областей это условие эквивалентно тому, что в окрестности каждой своей точки граница области D является графиком некоторой функции класса $C^{1,\omega}$. Другими словами — для каждой точки $x \in \partial D$ можно найти окрестность B, содержащую x, и область $V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ такую, что $B \cap \partial D$ является графиком некоторой (вещественной) функции $\varphi \in C^{1,\omega}(V)$, т.е. функции с условием $\omega(V, \nabla\varphi, \delta) = O(\omega(\delta)),\ \delta \to +0$, где

$$\omega(V, \nabla\varphi, \delta) = \sup_{x,y \in V;\ |x-y| \leq \delta} |\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y)|, \qquad \delta \geq 0,$$

— модуль непрерывности градиента $\nabla\varphi$ функции φ.

[45] Herz C. S., "Fourier transforms related to convex sets", *Ann. of Math.*, **75**:1(1962), 81–92.

Следствие 1. *Пусть* $0 < \alpha \leq 1$. *Пусть* D *— ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *такая, что* $\partial D \in C^{1,\alpha}$. *Если*

$$p \leq 1 + \frac{(n-1)\alpha}{n+\alpha},$$

то $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^n)$.

В свою очередь, отсюда, полагая $\alpha = 1$ и учитывая теорему 1, получаем уже упомянутое утверждение о критическом показателе для областей с дважды гладкой границей, более того — эффект критического показателя имеет место в $C^{1,1}$ -гладком случае, а именно, мы получаем

Следствие 2. *Пусть* D *— ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *такая, что* $\partial D \in C^{1,1}$. *Тогда* $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$ *при* $p > 2n/(n+1)$ *и* $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^n)$ *при* $p \leq 2n/(n+1)$. *В частности, это так для ограниченных областей с дважды гладкой границей.*

В § 3 рассматриваются плоские области. В соответствии с теоремой 2 видим (см. (11)), что если для области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ мы имеем $\partial D \in C^{1,\omega}$ и

$$\int_0^1 \frac{\delta^{2p-3}}{\omega(\delta)^{2-p}} d\delta = \infty,$$

то $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^2)$. В частности, если $\partial D \in C^{1,\alpha}$, то $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^2)$ при $p \leq 1+\alpha/(2+\alpha)$. Мы показываем, что (при некотором простом условии, наложенном на ω) этот результат является точным, а именно справедлива

Теорема 3. *Пусть* $\omega(2\delta) < 2\omega(\delta)$ *при всех достаточно малых* $\delta > 0$. *Существует ограниченная область* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *с* $C^{1,\omega}$ *-гладкой границей такая, что* $1_D \in A_p(\mathbb{R}^2)$ *при всех* p, $1 < p < 2$, *для которых*

$$\int_0^1 \frac{\delta^{2p-3}}{\omega(\delta)^{2-p}} d\delta < \infty.$$

Кроме того, граница области D *не содержит отрезков.*

Условие отсутствия отрезков на границе означает, что построенная область существенно отличается от многоугольников.

Из этой теоремы немедленно вытекают приведенные ниже следствия.

Следствие 3. *Для любого* α, $0 < \alpha < 1$, *существует ограниченная область* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *с* $C^{1,\alpha}$ *-гладкой границей такая, что* $1_D \in A_p(\mathbb{R}^2)$ *при всех* $p > 1 + \alpha/(2+\alpha)$. *Граница области* D *не содержит отрезков.*

Следствие 4. *Существует ограниченная область $D \subseteq \mathbb{R}^2$ с C^1 -гладкой границей такая, что $1_D \in \bigcap_{p>1} A_p(\mathbb{R}^2)$. Граница области D не содержит отрезков.*

Результаты главы 2 существенным образом опираются на результаты главы 1. Простые соображения (лемма 1 главы 2) позволяют свести изучение характеристических функций областей к изучению поведения экспонент.

Содержание главы 3.

Пусть $C(\mathbb{T})$ — класс непрерывных (комплекснозначных) функций на окружности $\mathbb{T}$. Мы рассматриваем некоторые пространства $\mathbb{X}$ функций на $\mathbb{T}$, естественным образом связанные с разложением в ряд Фурье, и изучаем следующий вопрос об устойчивости непрерывных функций в этих пространствах: какие функции $f \in C(\mathbb{T})$ обладают тем свойством, что для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя суперпозиция $f \circ h$ принадлежит $\mathbb{X}$?

Первые результаты в этом направлении получены К. Гоффманом и Д. Ватерманом [46], а также А. Бернстайном и Д. Ватерманом [47] в случаях, когда $\mathbb{X}$ — это соответственно пространство функций, имеющих сходящийся всюду ряд Фурье, и пространство функций, имеющих равномерно сходящийся ряд Фурье. Д. Ватерман [48] рассматривал пространства функций, имеющих заданную скорость убывания коэффициентов Фурье, и показал, что для произвольной функции $f \in C(\mathbb{T})$ следующие условия эквивалентны:

(i) $\widehat{f \circ h}(n) = O(\gamma(|n|)/|n|),\ |n| \to \infty$, для любого гомеоморфизма h;

(ii) $V(f, n) = O(\gamma(n))$.

Здесь γ — заданная функция, удовлетворяющая некоторым простым условиям, и $V(f, n)$ — модуль вариации функции f, введенный З. А. Чантурией [49] (см. также [50,51]) и позже, независимо, Е. А. Севастьяновым [52], а именно:

$$V(f, n) = \sup \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)|,$$

где n фиксировано и верхняя грань берется по всевозможным наборам попарно непересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subset \mathbb{T},\ j = 1, 2, \ldots, n$. В частности, $\widehat{f \circ h}(n) =$

[46] Goffman C., Waterman D., “Functions whose Fourier series converge for every change of variable”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19**:1 (1968), 80–86.

[47] Baernstein A., Waterman D., “Functions whose Fourier series converge uniformly for every change of variable”, *Indiana Univ. Math. J.*, **22** (1972), 569–576.

[48] Waterman D., “On the preservation of the order of magnitude of Fourier coefficients under every change of variable”, *Analysis*, **6**:2–3 (1986), 255–264.

[49] Чантурия З. А., “Модуль изменения функции и его применения в теории рядов Фурье”, *ДАН СССР*, **214**:1 (1974), 63–66.

[50] Чантурия З. А., “Об абсолютной сходимости рядов Фурье”, *Матем. заметки*, **18**:2 (1975), 185–192.

[51] Чантурия З. А., “О равномерной сходимости рядов Фурье”, *Матем. сб.*, **100(142)**:4(8) (1976), 534–554.

[52] Севастьянов Е. А., “Кусочно монотонная аппроксимация и Φ -вариация”, *Anal. Math.*, **1**:2 (1975), 141–164.

$O(1/|n|)$ для любого гомеоморфизма h тогда и только тогда, когда f — функция ограниченной вариации.

Отметим, что нетривиальная часть теоремы Ватермана — это утверждение (i)⇒(ii). Импликация (ii)⇒(i) доказывается следующим образом. Пользуясь хорошо известной оценкой $|\widehat{g}(n)| \leq c\omega_1(g, 1/|n|)$ коэффициентов Фурье через L^1 -модуль непрерывности (см. [53]) и оценкой $\omega_1(g, 1/n) \leq cV(g, n)/n$, полученной в [54], мы имеем $|\widehat{g}(n)| \leq cV(g, |n|)/|n|,\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0$, и остается лишь заметить, что модуль вариации функции инвариантен относительно замен переменной, т.е. $V(f, n) = V(f \circ h, n)$ для любого гомеоморфизма $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$. Подобная ситуация является типичной для ряда пространств. В вопросе устойчивости нетривиальным является получение необходимого условия устойчивости. Достаточное условие обычно получается сравнительно просто.

Наши результаты об устойчивости формулируются в основном в терминах модуля квадратичной вариации. Напомним, что квадратичная вариация $V_2(f)$ функции f на $\mathbb{T}$ определяется соотношением

$$V_2(f) = \sup\Big(\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)|^2\Big)^{1/2},$$

где верхняя грань берется по всем n и всем наборам попарно непересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subset \mathbb{T},\ j = 1, 2, \dots, n$. Определим модуль квадратичной вариации $V_2(f, n),\ n = 1, 2, \dots$, функции f, полагая

$$V_2(f, n) = \sup\Big(\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)|^2\Big)^{1/2},$$

где n фиксировано и верхняя грань берется по всевозможным наборам из n попарно непересекающихся интервалов $(a_j, b_j) \subset \mathbb{T},\ j = 1, 2, \dots, n$.

В § 1 получены две общие теоремы об устойчивости. В дальнейшем (в §§ 2, 3) эти теоремы используются при описании классов устойчивых функций в ряде конкретных пространств. Основным результатом является теорема 1, которая дает необходимое инвариантное условие устойчивости для достаточно широкого класса пространств функций на окружности.

Изложим результаты § 1 подробнее. Мы рассматриваем линейные нормированные пространства $\mathbb{X}$ функций на окружности $\mathbb{T}$, обладающие следующими свойствами:

(a) $\mathbb{X} \subseteq L^1(\mathbb{T})$;

(b) если $g \in \mathbb{X},\ f \in L^1(\mathbb{T})$ и $|\widehat{f}(k)| \leq |\widehat{g}(k)|$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, то $f \in \mathbb{X}$ и $\|f\|_{\mathbb{X}} \leq \|g\|_{\mathbb{X}}$;

(c) если последовательность функций $f_n \in \mathbb{X},\ n = 1, 2, \dots$, сходится в $L^1(\mathbb{T})$ к функции f и $\|f_n\|_{\mathbb{X}} \leq c,\ n = 1, 2, \dots$, то $f \in \mathbb{X}$ и $\|f\|_{\mathbb{X}} \leq c$;

[53] Бари Н. К., *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.

[54] Чантурия З. А., “Об абсолютной сходимости рядов Фурье”, *Матем. заметки*, **18**:2 (1975), 185–192.

(d) при любом $n \in \mathbb{Z}$ оператор $Q_n : f \to e_n f$ умножения на экспоненту $e_n(t) = e^{int}$, $t \in \mathbb{T}$, является ограниченным оператором в $\mathbb{X}$, и существует $\sigma \geq 0$ такое, что $\|Q_n\| = O(|n|^\sigma)$, $|n| \to \infty$;

(e) характеристическая функция 1_I любого интервала $I \subseteq \mathbb{T}$ принадлежит $\mathbb{X}$.

Простым примером таких пространств являются пространства $A_p(\mathbb{T})$, $1<p<2$. Другим примером служат пространства Соболева $W_2^\lambda(\mathbb{T})$, $0 < \lambda < 1/2$, состоящие из функций $f \in L^1(\mathbb{T})$ таких, что

$$\|f\|_{W_2^\lambda} = |\widehat{f}(0)| + \left(\sum_k |\widehat{f}(k)|^2 |k|^{2\lambda}\right)^{1/2} < \infty.$$

Для произвольного пространства $\mathbb{X}$ со свойствами (a)–(e) положим

$$\alpha_{\mathbb{X}}(\delta) = \|1_{(-\delta,\ \delta)}\|_{\mathbb{X}}\ , \quad 0 < \delta \leq \pi.$$

Отметим, что для многих пространств получить оценку величины $\alpha_{\mathbb{X}}(\delta)$ не представляет труда.

Нами получена следующая

Теорема 1. *Пусть линейное нормированное пространство $\mathbb{X}$ функций на окружности $\mathbb{T}$ обладает свойствами* (a)–(e). *Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. Предположим, что для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя суперпозиция $f \circ h$ принадлежит $\mathbb{X}$. Тогда*

$$V_2(f, n) = O\left(\frac{1}{\alpha_{\mathbb{X}}(1/n)}\right), \qquad n \to \infty.$$

Отметим особую роль свойства (e). Как оказалось, если пространство $\mathbb{X}$ обладает свойствами (a)–(d), но не обладает свойством (e), то всякая непрерывная функция, остающаяся в $\mathbb{X}$ после любой замены переменной, постоянна. При этом вместо свойства (b) достаточно потребовать, чтобы $\mathbb{X}$ обладало следующим более слабым свойством:

(b$'$) если $f \in \mathbb{X}$, то при любом $\theta \in \mathbb{T}$ функция $f_\theta(t) = f(t+\theta)$ принадлежит $\mathbb{X}$.

Справедлива

Теорема 2. *Пусть линейное нормированное пространство $\mathbb{X}$ функций на $\mathbb{T}$ обладает свойствами* (a), (b$'$), (c), (d)*, но не обладает свойством* (e)*. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. Предположим, что для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя суперпозиция $f \circ h$ принадлежит $\mathbb{X}$. Тогда $f = \mathrm{const}$.*

В частности, отсюда получаем, что в пространстве $A(\mathbb{T})$ устойчивы лишь постоянные. Последний факт был впервые отмечен А. М. Олевским [55,56].

[55] Олевский А. М., “Модификации функций и ряды Фурье”, *УМН*, **40**:3(243) (1985), 157–193.

[56] Олевский А. М., “Гомеоморфизмы окружности, модификации функций и ряды Фурье”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Berkeley, CA, USA, 1986), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 976–989.

В §§ 2, 3 мы рассматриваем ряд конкретных пространств функций и описываем функции устойчивые в этих пространствах. Необходимые условия устойчивости получаются применением общей теоремы 1 (или теоремы 2). Достаточные условия получены вполне стандартными методами (см. лемму 5 гл. 3). Для некоторых пространств нам удалось получить полное описание соответствующих классов устойчивых функций.

Напомним, что слабое пространство l^p, $1 \le p < \infty$, — это пространство последовательностей комплексных чисел $x = \{x_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ таких, что

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : |x_k| > \lambda\} = O(1/\lambda^p), \quad \lambda \to +0,$$

где $\operatorname{card} E$ — число элементов (конечного) множества E. Класс функций с последовательностью коэффициентов Фурье из слабого l^p уместно называть слабым A_p.

В § 2 рассматриваются пространства функций на $\mathbb{T}$ с заданным распределением преобразования Фурье. Пусть задана непрерывная строго возрастающая функция φ на некотором отрезке $[0,\ \lambda_0]$ $(\lambda_0 > 0)$ такая, что $\varphi(0) = 0$. Рассмотрим пространство (интегрируемых) функций f на $\mathbb{T}$ таких, что

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} : |\widehat{f}(k)| > \lambda\} = O(1/\varphi(\lambda)), \quad \lambda \to +0.$$

При некоторых дополнительных предположениях относительно φ мы показываем (теорема 3), что для устойчивости функции $f \in C(\mathbb{T})$ в этом пространстве необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $V_2(f,n) = O(n\varphi^{-1}(1/n))$, $n \to \infty$ (где φ^{-1} — функция, обратная к φ).

Из этого результата, полагая $\varphi(\lambda) = \lambda^p$, немедленно получаем описание класса функций устойчивых в слабом A_p. А именно, справедливы следующие две теоремы.

Теорема 4. *Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя имеем*

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} :\ |\widehat{f \circ h}(k)| > \lambda\} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \qquad \lambda \to +0;$$

(ii) *функция f имеет ограниченную квадратичную вариацию.*

Теорема 5. *Пусть $1 < p < 2$. Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ на себя имеем*

$$\operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z} :\ |\widehat{f \circ h}(k)| > \lambda\} = O\left(\frac{1}{\lambda^p}\right), \qquad \lambda \to +0;$$

(ii) $V_2(f,n) = O(n^{1/q})$, $n \to \infty$, *где* $1/p + 1/q = 1$.

Отметим, что в некоторых случаях условия устойчивости, сформулированные в терминах роста модуля квадратичной вариации $V_2(f,n)$, можно эквивалентным образом дать в терминах роста модуля вариации $V(f,n)$. Ясно, что $V(f,n) \le n^{1/2}V_2(f,n)$. Между тем, можно оценить $V_2(f,n)$ через $V(f,n)$. В частности, при $\gamma > 0$ имеем $V_2(f,n) = O(n^\gamma)$ тогда и только тогда, когда $V(f,n) = O(n^{1/2+\gamma})$ (лемма 7 и следствие 1).

В § 3 рассматриваются пространства $A_p(\mathbb{T})$, пространства Соболева $W_2^\lambda(\mathbb{T})$ и некоторые другие пространства функций на $\mathbb{T}$. Несложно показать, что (мы считаем функцию f непрерывной) при $1 < p < 2$ условие $\sum_{n=1}^\infty (V_2(f,n)/n)^p < \infty$ влечет $f \in A_p$. Поскольку указанное условие инвариантно относительно суперпозиций функции f с гомеоморфизмами, из него следует, что $f \circ h \in A_p$ для любого гомеоморфизма h. С другой стороны, из теоремы 5 немедленно получаем, что (при $1 < p < 2$) если $f \circ h \in A_p$ для любого гомеоморфизма h, то $V_2(f,n) = O(n^{1/q})$. (Это также легко получить напрямую, применяя общую теорему 1 к пространству $\mathbb{X} = A_p$, достаточно лишь заметить, что при $p > 1$ имеем $\alpha_{A_p(\mathbb{T})}(\delta) \simeq \delta^{1/q}$.) Таким образом верна

Теорема 6. *Пусть $1 < p < 2$ и $f \in C(\mathbb{T})$. Тогда:*
1) *если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{V_2(f,n)}{n} \right)^p < \infty,$$

то $f \circ h \in A_p(\mathbb{T})$ для любого гомеоморфизма $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$; в частности это так, если $V_2(f,n) = O(n^{1/q-\varepsilon})$ при некотором $\varepsilon > 0$ $(1/p + 1/q = 1)$;
2) *если $f \circ h \in A_p(\mathbb{T})$ для любого гомеоморфизма $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, то $V_2(f,n) = O(n^{1/q})$.*

Тем самым, нами получен частичный ответ на поставленный А. М. Олевским [57,58] вопрос об описании функций, устойчивых в A_p. Отметим еще, что из теоремы 6 вытекает

Следствие 2. *Пусть $f \in C(\mathbb{T})$. Следующие условия эквивалентны:*
(i) *$f \circ h \in \bigcap_{p>1} A_p(\mathbb{T})$ для любого гомеоморфизма $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$;*
(ii) при любом $\varepsilon > 0$ имеем $V_2(f,n) = O(n^\varepsilon),\ n \to \infty$.

Результат подобный теореме 6 имеет место для пространств $W_2^\lambda,\ 0 < \lambda < 1/2$, а именно верна

[57] Олевский А. М., “Модификации функций и ряды Фурье”, *УМН*, **40**:3(243) (1985), 157–193.

[58] Олевский А. М., “Гомеоморфизмы окружности, модификации функций и ряды Фурье”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Berkeley, CA, USA, 1986), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 976–989.

Теорема 7. *Пусть* $0 < \lambda < 1/2$ *и* $f \in C(\mathbb{T})$. *Тогда:*
1) *если*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{V_2(f,n)}{n^{1-\lambda}}\right)^2 < \infty,$$

то $f \circ h \in W_2^\lambda(\mathbb{T})$ *для любого гомеоморфизма* $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$*; в частности это так, если* $V_2(f,n) = O(n^{1/2-\lambda-\varepsilon})$ *при некотором* $\varepsilon > 0$*;*
2) *если* $f \circ h \in W_2^\lambda(\mathbb{T})$ *для любого гомеоморфизма* $h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$*, то* $V_2(f,n) = O(n^{1/2-\lambda})$.

Доказательство "сложной части" этой теоремы, т.е. утверждения 2) немедленно получается применением теоремы 1 к пространству $\mathbb{X} = W_2^\lambda$. Вопрос о точном описании непрерывных функций, устойчивых в A_p, $1 < p < 2$, и в W_2^λ, $0 < \lambda < 1/2$, остается открытым. Что касается пространств W_2^λ, $\lambda \geq 1/2$, то соответствующий класс устойчивых непрерывных функций содержит лишь постоянные (это вытекает из теоремы 2).

Мы также рассматриваем класс функций f таких, что соответствующая сопряженная функция (преобразование Гильберта) $\widetilde{f}$ принадлежит L^∞. Хорошо известно, что существуют непрерывные функции на $\mathbb{T}$, сопряженные к которым не принадлежат L^∞ Мы показываем, что (теорема 8) если $f \in C(\mathbb{T})$ и для любого гомеоморфизма h окружности $\mathbb{T}$ функция $\widetilde{f \circ h}$, сопряженная к $f \circ h$, принадлежит $L^\infty(\mathbb{T})$, то $f = \mathrm{const}$. Этот результат получается применением теоремы 2.

Отметим еще, что из нашего результата о функциях, устойчивых в A_p, вытекает (теорема 9) усиление полученного в [59] результата о функциях, устойчивых в пространствах l^p -мультипликаторов Фурье.

В § 4 рассматривается вопрос об устойчивости в многомерном случае. Этот случай существенно отличается от одномерного. Мы показываем (теорема 10), что при некоторых предположениях (аналогичных условиям (a), (b′), (c), (d)) относительно пространства $\mathbb{X}$ функций на торе $\mathbb{T}^d$, $d \geq 2$, либо $L^\infty(\mathbb{T}^d) \subseteq \mathbb{X}$, и, следовательно, всякая непрерывная функция устойчива в $\mathbb{X}$, либо устойчивы лишь постоянные. Причина этого в том, что группа гомеоморфизмов тора $\mathbb{T}^d$ при $d \geq 2$ слишком массивна. Из этой теоремы немедленно следует, что, в отличие от одномерного случая, при $d \geq 2$ в пространствах $A_p(\mathbb{T}^d) = \{f \in L^1(\mathbb{T}^d) : \widehat{f} \in l^p(\mathbb{Z}^d)\}$, $1 < p < 2$, нет непостоянных непрерывных устойчивых функций. Более того, при помощи этой теоремы мы получаем следующее утверждение:

Теорема 11. *Пусть* f *— непрерывная функция на* $\mathbb{T}^d$, $d \geq 2$, *такая, что* $f \circ h \in \bigcup_{1<p<2} A_p(\mathbb{T}^d)$ *для любого гомеоморфизма* h *тора* $\mathbb{T}^d$ *на себя. Тогда* $f = \mathrm{const}$.

[59] Olevskii V., "Variation, homeomorphisms, and Fourier multipliers", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **325**:6 (1997), 639–644.

Содержание главы 4.

В этой главе рассматриваются операторы суперпозиции в пространстве $U(\mathbb{T})$ непрерывных функций на окружности $\mathbb{T}$, имеющих равномерно сходящийся ряд Фурье, и операторы суперпозиции в классах Пэли–Винера $PW(\mathbb{R}^n)$ функций из $L^2(\mathbb{R}^n)$, преобразование Фурье которых имеет ограниченный носитель.

В § 1 рассматривается пространство $U(\mathbb{T})$. Это пространство, снабженное нормой

$$\|f\|_{U(\mathbb{T})} = \sup_N \|S_N(f)\|_{C(\mathbb{T})},$$

где $S_N(f)$ означает N -ую частичную сумму ряда Фурье функции f (и $\|\cdot\|_{C(\mathbb{T})}$ — обычная $\sup$ -норма в пространстве $C(\mathbb{T})$ непрерывных функций на $\mathbb{T}$), является банаховым пространством. Неизвестно, существуют ли нетривиальные (т.е. нелинейные) отображения окружности, действующие в $U(\mathbb{T})$. А. М. Олевским [60] высказано предположение, что ответ на этот вопрос — отрицательный. Следуя обзорам А. М. Олевского [61,62] и Ж.-П. Кахана [63], приведем известные результаты. Алпар показал, что нетривиальные аналитические отображения не действуют в $U(\mathbb{T})$. С другой стороны, всякий гомеоморфизм окружности, действующий в $U(\mathbb{T})$, должен быть абсолютно непрерывным — это немедленно вытекает из следующих двух результатов. Один из них — результат Д. М. Оберлина (см. [64]), заключающийся в том, что всякая непрерывная функция, заданная на компакте $F \subseteq \mathbb{T}$ нулевой меры, продолжается на $\mathbb{T}$ до функции из $U(\mathbb{T})$. Другой — (значительно более ранний) результат Д. Е. Меньшова, из которого следует, что никакой компакт положительной меры таким интерполяционным свойством не обладает (см. [65]). Отметим, что вместе с тем, существуют нетривиальные отображения φ такие, что $\|e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})} = O(1)$ (всякое такое отображение действует из $A(\mathbb{T})$ в $U(\mathbb{T})$). Так, например, Р. Кауфман, усилив один результат Алпара, показал, что это верно для любого отображения φ гладкости C^3 и выше без точек одновременного вырождения производных порядка большего 1 (см.[66]).

Мы рассматриваем простой случай кусочно линейных отображений. Как оказалось верна следующая

Теорема 1. *Пусть φ — кусочно линейное но нелинейное непрерывное отображение окружности $\mathbb{T}$ в себя. Тогда $\|e^{in\varphi}\|_{U(\mathbb{T})} \simeq \log|n|,\ n \in \mathbb{Z}$.*

---

[60] Олевский А. М., “Модификации функций и ряды Фурье”, *УМН*, **40**:3(243) (1985), 157–193.

[61] Олевский А. М., “Модификации функций и ряды Фурье”, *УМН*, **40**:3(243) (1985), 157–193.

[62] Олевский А. М., “Гомеоморфизмы окружности, модификации функций и ряды Фурье”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Berkeley, CA, USA, 1986), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 976–989.

[63] Kahane J.-P., “Quatre leçons sur les homéomorphismes du circle et les séries de Fourier”, in: *Topics in Modern Harmonic Analysis,* Vol. II, Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Roma, 1983, 955–990.

[64] Олевский А. М., “Модификации функций и ряды Фурье”, *УМН*, **40**:3(243) (1985), 157–193.

[65] Бари Н. К., *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961; гл. VI, § 6.

[66] Kahane J.-P., “Quatre leçons sur les homéomorphismes du circle et les séries de Fourier”, in: *Topics in Modern Harmonic Analysis,* Vol. II, Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi, Roma, 1983, 955–990.

Разумеется, оценка сверху в этой теореме вытекает из уже указанной (в связи с результатами главы 1) оценки Кахана $\|e^{in\varphi}\|_{A(\mathbb{T})} \simeq \log|n|$. Мы лишь получаем оценку снизу. Из полученного результата следует, что кусочно линейные отображения не действуют из $A(\mathbb{T})$ в $U(\mathbb{T})$. Более того (это — немедленное следствие полученной оценки и теоремы о замкнутом графике, примененной к оператору $f \to f \circ \varphi$), если φ — нетривиальная кусочно линейная замена переменной, то для любой последовательности $w(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ неотрицательных вещественных чисел с условием $w(n) = o(\log n)$ найдется непрерывная функция f такая, что $\sum_k |\widehat{f}(k)| w(|k|) < \infty$, но $f \circ \varphi \notin U(\mathbb{T})$. Разумеется, отсюда вытекает, что такие замены переменной, вообще говоря, разрушают равномерную сходимость ряда Фурье.

В § 2 мы рассматриваем пространство $PW(\mathbb{R}^n)$ функций из $L^2(\mathbb{R}^n)$, преобразование Фурье которых имеет компактный носитель. При $n = 1$ соответствующий класс изучался Н. Винером и Р. Пэли [67]. Отметим, что функции класса PW возникают в задачах обработки сигналов (в этой связи см., например, библиографию работы [68]) и часто называются сигналами в ограниченном диапазоне (bandlimited signals). Очевидно, что линейные (аффинные) отображения $\mathbb{R}^n$ действуют в $PW(\mathbb{R}^n)$. Как показали Ш. Азизи, Д. Кокрэйн и Дж. Н. Макдональд [69], если φ — гомеоморфизм прямой $\mathbb{R}$ на себя такой, что для любой функции $f \in PW(\mathbb{R})$ мы имеем $f \circ \varphi \in PW(\mathbb{R})$, то отображение φ аффинно. Эти же авторы поставили вопрос [70] о том, верно ли аналогичное утверждение в многомерном случае.

Мы даем полное описание непрерывных отображений $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, действующих из $PW(\mathbb{R}^n)$ в $PW(\mathbb{R}^m)$. Лишь инъективные аффинные отображения φ обладают этим свойством, а именно, справедлива

Теорема 2. *Пусть φ — непрерывное отображение $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *для любой функции $f \in PW(\mathbb{R}^n)$ суперпозиция $f \circ \varphi$ принадлежит $PW(\mathbb{R}^m)$;*

(ii) *φ — инъективное аффинное отображение.*

В частности, отсюда получаем положительный ответ на указанный выше вопрос работы [71], более того, мы не предполагаем, что φ является гомеоморфизмом,

[67] Винер Н., Пэли Р., *Преобразование Фурье в комплексной области*, Наука, М., 1964.

[68] Azizi S., Cochran D., and McDonald J. N., “On the preservation of bandlimitedness under non-affine time warping”, Proc. of the 1999 Int. Workshop on Sampling Theory and Applications (SAMPTA), Aug. 11-14, 1999, Loen, Norway, The Norwegian University of Science and Technology, pp. 37–40.

[69] Azizi S., Cochran D., and McDonald J. N., “On the preservation of bandlimitedness under non-affine time warping”, Proc. of the 1999 Int. Workshop on Sampling Theory and Applications (SAMPTA), Aug. 11-14, 1999, Loen, Norway, The Norwegian University of Science and Technology, pp. 37–40.

[70] Azizi S., McDonald J. N., and Cochran D., “Preservation of bandlimitedness under non-affine time warping for multi-dimensional functions”, In: 20th Century Harmonic Analysis – A Celebration, J. S. Byrnes, ed., NATO Science Series, II Mathematics, Physics and Chemistry, 2001, V. 33, Kluwer, p. 369.

[71] Azizi S., McDonald J. N., and Cochran D., “Preservation of bandlimitedness under non-affine time warping for

и, таким образом, наш результат является новым даже в одномерном случае.

Содержание добавления.

Пусть $A_p^+(D)$ $(1 \le p \le \infty)$ — пространство функций

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n, \qquad z \in D,$$

аналитических в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ таких, что последовательность коэффициентов Тейлора $\widehat{f} = \{\widehat{f}(n);\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ принадлежит l^p. Для $f \in A_p^+(D)$ положим $\|f\|_{A_p^+(D)} = \|\widehat{f}\|_{l^p}$.

Аналитическая в D функция m называется l^p -мультипликатором, если для всякой функции $f \in A_p^+(D)$ произведение $m \cdot f$ принадлежит $A_p^+(D)$. Семейство всех таких мультипликаторов мы обозначаем через $M_p^+(D)$. Снабженное естественной нормой

$$\|m\|_{M_p^+(D)} = \sup_{\|f\|_{A_p^+(D)} \le 1} \|m \cdot f\|_{A_p^+(D)},$$

$M_p^+(D)$ является банаховой алгеброй (с обычным умножением функций).

Нас интересует следующий вопрос: какие внутренние функции принадлежат $M_p^+(D)$? Напомним, что аналитическая в D функция I называется внутренней, если $|I(z)| \le 1,\ z \in D$, и $|I(e^{it})| = 1$ почти всюду. Обзор ряда результатов о внутренних функциях и мультипликаторах имеется в статье С. А. Виноградова [72]. (Мы употребляем обозначаения $A_p^+(D)$ и $M_p^+(D)$ вместо использованных Виноградовым обозначений l_A^p и M_A^p.)

Хорошо известно [73], что $M_p^+(D) = M_q^+(D)$ при $1/p + 1/q = 1$, и

$$A_1^+(D) = M_1^+(D) = M_\infty^+(D) \subseteq M_p^+(D) \subseteq M_2^+(D) = H^\infty(D), \tag{12}$$

где $H^\infty(D)$ — пространство Харди ограниченных аналитических функций в D.

Отметим, что поскольку $M_1^+(D) = M_\infty^+(D) = A_1^+(D)$ (см. (12)), внутренние функции в $M_p^+(D)$ при $p = 1,\ \infty$ — это лишь конечные произведения Бляшке с точностью до множителя $\lambda \in \mathbb{C}$ (только такие внутренние функции непрерывны в D вплоть до границы [74]). Случай $p = 2$ тривиален, так как $M_2^+(D)$ совпадает с пространством Харди $H^\infty(D)$ (см. (12)). Таким образом, изучаемый нами вопрос интересен лишь в случае $p \ne 1, \infty, 2$.

В § 1 мы рассматриваем сингулярные внутренние функции. т.е. внутренние функции S, не имеющие нулей в D, такие, что $S(0) > 0$. Всякая такая функция

---

multi-dimensional functions", In: 20th Century Harmonic Analysis – A Celebration, J. S. Byrnes, ed., NATO Science Series, II Mathematics, Physics and Chemistry, 2001, V. 33, Kluwer, p. 369.

[72] Виноградов С. А., "Мультипликативные свойства степенных рядов с последовательностью коэффициентов из l^p", *ДАН СССР*, **254**:6 (1980), 1301–1306.

[73] Никольский Н. К., "О пространствах и алгебрах теплицевых матриц действующих в l^p", *Сиб. матем. ж.*, **7** (1966), 146–158.

[74] Гарнет Дж., *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.

имеет вид

$$S(z) = \exp\left(- \int_{\partial D} \frac{\xi + z}{\xi - z} d\mu(\xi) \right),$$

где μ — положительная сингулярная мера на окружности $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Мера μ называется представляющей мерой функции S. Замкнутый носитель этой меры называется спектром функции S.

Как показал И. Э. Вербицкий [75], сингулярная внутренняя функция

$$S(z) = \exp\left(- a\frac{1+z}{1-z} \right), \qquad a > 0$$

(спектр которой — одноточечное множество $\{1\}$), принадлежит $M_p^+(D)$ лишь в тривиальном случае $p = 2$. Существуют ли вообще сингулярные внутренние функции $S \not\equiv 1$ в $M_p^+(D)$, $p \neq 2$? Ответ на этот вопрос, поставленный С. А. Виноградовым в [76], нам не известен. Тем не менее мы указываем ряд условий, характеризующих массивность замкнутых множеств на окружности, выполнение которых для произвольно взятого множества $E \subseteq \partial D$ означает, что E не может служить спектром никакой сингулярной внутренней функции из $M_p^+(D)$ при $p \neq 2$ (теоремы 1, 2 и их следствия 1, 2, 3). Грубо говоря, это имеет место, если E недостаточно массивно. В частности, из этих условий следует, что если спектр сингулярной внутренней функции S является непустым пористым множеством, то S принадлежит $M_p^+(D)$ лишь при $p = 2$.

В § 2 мы рассматриваем произведения Бляшке, т.е. функции вида

$$B(z) = z^m \prod_{z_n \neq 0} \frac{-|z_n|}{z_n} \frac{z - z_n}{1 - \overline{z_n} z}$$

с нулями $\{z_n\} \subset D$, удовлетворяющими условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty$$

(всякая такая функция является внутренней). Известно, что если нули произведения Бляшке B имеют единственную предельную точку (на ∂D) и накапливаются к ней очень быстро, то $B \in M_p^+(D)$. Точнее, пусть B – произведение Бляшке с нулями $\{z_n\}$, $z_n \to 1$, такими, что

$$\sum_{n:|1-z_n|<\varepsilon} |1 - z_n| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to +0; \tag{13}$$

тогда $B \in \bigcap_{1<p<\infty} M_p^+(D)$. Это теорема Виноградова–Вербицкого (первоначально она была доказана Виноградовым [77] в случае, когда z_n стремятся к 1 некасатель-

[75] Вербицкий И. Э., “О мультипликаторах пространств l_A^p ”. *Функц. анализ и его прил.*, **14**:3 (1980), 67–68.

[76] Vinogradov S. A., “Multiplicative properties of l_A^p”. In: *Linear and Complex Analysis Problem Book*, Lect. Notes in Math., Vol. 1034, Springer-Verlag, 1984, pp. 572–574.

[77] Виноградов С. А., “Мультипликаторы степенных рядов с последовательностью коэффициентов из l^p”. *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **39**(1974), 30–39.

но, и впоследствии распространена на общий случай независимо Виноградовым [78] и Вербицким [79]). Мы рассматриваем произведения Бляшке B с единственной предельной точкой нулей и при некотором дополнительном предположении о расположении нулей получаем условие, необходимое для включения $B \in M_p^+(D)$ (теорема 3). Пользуясь этим условием, мы показываем (теорема 4), что если нули произведения Бляшке стремятся к 1 некасательным образом, оставаясь в замкнутой верхней полуплоскости, то верно утверждение обратное к теореме Виноградова–Вербицкого: в этом случае, если $B \in M_p^+(D)$ при каком-либо $p \neq 2$, то выполняется (13).

Неясно, к каким множествам на ∂D могут накапливаться нули произведений Бляшке, принадлежащих $M_p^+(D)$, $p \neq 2$. Мы строим (теорема 5) произведение Бляшке, принадлежащее $\bigcap_{1<p<\infty} M_p^+(D)$, такое, что множество предельных точек его нулей совершенно.

Напомним, что в общем случае спектром внутренней функции I называется множество $\sigma(I)$ всех $\xi \in \mathbb{C}$ таких, что $1/I$ не может быть аналитически продолжена в окрестность точки ξ. Как известно [80], всякая внутренняя функция I допускает факторизацию $I = \lambda BS$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, — постоянная, B — произведение Бляшке, и S — сингулярная внутренняя функция. При этом имеем $\sigma(I) = \overline{\{z_n\}} \cup \overline{\operatorname{supp}}\,\mu$, где $\overline{\{z_n\}}$ — замыкание множества нулей $\{z_n\}$ множителя Бляшке B и $\overline{\operatorname{supp}}\,\mu$ — замкнутый носитель представляющей меры сингулярного множителя S (см. [81]). Отметим, что, как показано в [82], если спектр $\sigma(I)$ внутренней функции I в пересечении с граничной окружностью имеет положительную меру, то $I \notin M_p^+(D)$, каково бы ни было $p \neq 2$. Этот результат следует из свойства существенной непрерывности l^p -мультипликаторов Фурье, полученного автором совместно с А. М. Олевским в [83], см. также [84,85]. В частности, если нули произведения Бляшке B накапливаются к множеству положительной меры, то $B \notin M_p^+(D)$ при $p \neq 2$. По той же причине, если S — сингулярная внутренняя функция такая, что ее спектр имеет положительную меру, то $S \notin M_p^+(D)$ при $p \neq 2$. Если же взять внутреннюю функцию I такую, что ее спектр в пересечении с граничной окружностью ∂D имеет нулевую меру и рассмотреть граничное значение функции I как функцию на окружности $\mathbb{T}$, то имеем $I(e^{it}) = e^{ig(t)}$, где g

---

[78] Виноградов С. А., “Мультипликативные свойства степенных рядов с последовательностью коэффициентов из l^p”, *ДАН СССР*, **254**:6 (1980), 1301–1306.

[79] Вербицкий И. Э., “О мультипликаторах пространств l^p_A ”. *Функц. анализ и его прил.*, **14**:3 (1980), 67–68.

[80] Гарнет Дж., *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.

[81] Никольский Н. К., *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980.

[82] Lebedev V. V., “Spectra of Inner functions and l^p -Multipliers”, in: Complex Analysis, Operators, and Related Topics: The S. A. Vinogradov Memorial Volume, *Operator Theory: Advances and Applications*, **113**, eds.: V. P. Havin, N. K. Nikolski; Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2000, 205–212.

[83] Lebedev V., Olevskiĭ A., “Bounded groups of translation invariant operators”, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, **322** (1996), 143–147.

[84] Lebedev V., Olevskiĭ A., “Idempotents of Fourier multiplier algebra”, *Geometric and Functional Analysis (GAFA)*, **4**:5 (1994), 540–544.

[85] Лебедев В. В., Олевский А. М., “L^p -мультипликаторы Фурье с ограниченными степенями”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:3 (2006), 129–166.

— вещественная функция, гладкая на всяком интервале, дополнительном к множеству F, которое определяется соотношением $\sigma(I) \cap \partial D = \{e^{it},\ t \in F\}$. При этом, если J — интервал, содержащийся в $\mathbb{T} \setminus F$ и находящийся близко от F, то g сильно осциллирует на J, и поведение функции $I(e^{it})$ напоминает поведение экспоненты $e^{i\lambda\varphi(t)}$ с большой частотой λ. Это обстоятельство позволяет использовать при исследовании внутренних функций из $M_p^+(D)$ соображения, используемые при исследовании экспонент $e^{i\lambda\varphi}$.

Благодарность

Я благодарен А. М. Олевскому. Мой интерес к теории функций и гармоническому анализу сформировался под его влиянием.

Я благодарен Е. А. Горину за неизменную моральную поддержку и за замечания, способствовавшие улучшению стиля изложения и организации текста диссертации.

Первоначально теорема 1 главы 1 была получена автором в более слабой форме (правая часть условия (7) имела вид $o((\log\log\log n)^{1/16})$). В доказательстве использовалась теорема Грина–Сандерса [86]. Я благодарен С. В. Конягину, указавшему мне на полученную им совместно с Б. Грином теорему 1.3 работы [87]. Использование этой теоремы вместо теоремы Грина–Сандерса позволило улучшить результат.

Я благодарен: Ю. Н. Кузнецовой за помощь в доказательстве леммы 3 главы 1; М. В. Коробкову за обсуждение его результата [88] о множестве значений градиента и М. Л. Гольдману за полезное замечание о вложении слабого пространства l^1 в подходящее пространство Марцинкевича, что позволило сократить доказательство теоремы 3 главы 3.

Часть результатов была получена автором во время работы в отделе функционального анализа института математики Польской академии наук, Варшава, Польша, в 1999 г.. Я благодарен М. Войцеховскому, организовавшему мой визит. Ряд результатов был получен автором во время работы на математическом отделении технологического института штата Джорджия, Атланта, США, в 1999/2000 академическом году. Я благодарен М. Лэйси, организовавшему мой визит.

Работа набрана в $\LaTeX\,2_\varepsilon$ с использованием редактора WinEdt. Я благодарен И. А. Синелобову за техническую помощь.

Я благодарен следующим частным лицам, в течение некоторого времени совместно оказывавшим мне регулярную бескорыстную финансовую помощь: И. А. Синелобову, А. Б. Сивкову и А. А. Маркову. Я благодарен В. А. Овсянникову, спонсировавшего мою поездку на конференцию Geometric Methods in Fourier

[86] Green B., Sanders T., “A quantitative version of the idempotent theorem in harmonic analysis”, *Ann. Math.*, **168**:3 (2008), 1025–1054.

[87] Green B., Konyagin S., “On the Littlewood problem modulo a prime”, *Canad. J. Math.*, **61**:1 (2009), 141–164.

[88] Коробков М. В., “Свойства C^1 -гладких функций, множество значений градиента которых топологически одномерно”, *Докл. РАН*, **430**:1 (2010), 18–20.

and Functional Analysis, Киль, Германия, 10-14 августа, 1998. Я благодарен А. В. Белову, изыскавшему средства для моего участия в конференции Approximation Theory and Fourier Analysis, Барселона, Испания, 12-16 декабря 2011.

Ряд результатов диссертации был получен при частичной поддержке РФФИ; гранты №96-01-01438, №98-01-00529, №02-01-00997, №04-01-00169.

Работы автора по теме диссертации

1. Лебедев В. В., “Внутренние функции и l^p -мультипликаторы”, *Функц. анализ и его прил.*, **32**:4 (1998), 10–21.

2. Lebedev V. V., “Spectra of inner functions and l^p -multipliers”, in: Complex Analysis, Operators, and Related Topics: The S. A. Vinogradov Memorial Volume, *Operator Theory: Advances and Applications*, **113**, eds.: V. P. Havin, N. K. Nikolski; Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2000, 205–212.

3. Лебедев В. В., “Диффеоморфизмы окружности и теорема Берлинга–Хелсона”, *Функц. анализ и его прил.*, **36**:1 (2002), 30–35.

4. Лебедев В. В., “О топологической устойчивости непрерывных функций в некоторых пространствах, связанных с рядами Фурье”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:2 (2010), 131–164.

5. Лебедев В. В., “Количественные оценки в теоремах типа теоремы Берлинга–Хелсона”, *Матем. сб.*, **201**:12 (2010), 103–130.

6. Лебедев В. В., “Оценки в теоремах типа теоремы Берлинга–Хелсона. Многомерный случай”, *Матем. заметки*, **90**:3 (2011), 394–407.

7. Лебедев В. В., “Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Усиление теоремы Берлинга–Хелсона”, *Функц. анализ и его прил.*, **46**:2 (2012), 52–65.

8. Лебедев В. В., “О равномерной сходимости рядов Фурье”, *Матем. заметки*, **91**:6 (2012), 946–949.

9. Лебедев В. В., “О функциях из L^2 с ограниченным спектром”, *Матем. сб.*, **203**:11 (2012), 121–128.

10. Лебедев В. В., “О преобразовании Фурье характеристических функций областей с C^1 -гладкой границей”, *Функц. анализ и его прил.*, **47**:1 (2013), 33–46.