Механико-математический факультет
ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»
кафедра теории чисел

На правах рукописи

УДК 511.4

Герман Олег Николаевич

ГЕОМЕТРИЯ МНОГОМЕРНЫХ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2013

Работа выполнена на кафедре теории чисел Механико-математического факультета ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова».

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:	доктор физико-математических наук БЕРНИК Василий Иванович, главный научный сотрудник Института математики НАН Республики Беларусь
	доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, БЫКОВСКИЙ Виктор Алексеевич, директор Хабаровского отделения ФГБУН Институт прикладной Математики ДВО РАН
	доктор физико-математических наук, профессор ЖУРАВЛЁВ Владимир Георгиевич, профессор кафедры математического анализа физико-математического факультета Владимирского государственного университета им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого

Защита состоится 26 декабря 2013 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.022.03 при Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН по адресу: 119991, Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН

Автореферат разослан «___» _____________ 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.022.03 при МИАН
доктор физико-математических
наук, профессор Н.П. Долбилин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Теория диофантовых приближений изучает вопросы, связанные с приближением вещественных чисел рациональными. Так, если задана функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, то говорят, что число $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ является f–приближаемым, если существует бесконечно много рациональных чисел p/q, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \leqslant f(q).$$

Соответственно, диофантовой экспонентой $\beta(\theta)$ числа θ называется точная верхняя грань множества чисел γ, таких что θ является $q^{-1-\gamma}$–приближаемым. Из принципа Дирихле легко вывести, что любое иррациональное число является q^{-2}–приближаемым. Если же существует такое $c > 0$, что θ не является cq^{-2}–приближаемым, то говорят, что θ плохо приближаемо. Хорошо известно, что иррациональное число является плохо приближаемым тогда и только тогда, когда его разложение в цепную дробь имеет ограниченные неполные частные.

Данная работа посвящена многомерным обобщениям приведенных выше понятий — диофантовых экспонент, плохо приближаемости, цепных дробей. Можно выделить два классических направления подобных обобщений: в первом в качестве инструмента измерения отклонения используется sup–норма (или ей эквивалентные), а во втором — произведение координат. Так возникают понятия регулярных и равномерных диофантовых экспонент матриц, их мультипликативные аналоги, понятия плохо приближаемых матриц и решеток с положительным норменным минимумом. Важную роль в этой науке играют так называемые теоремы переноса — утверждения, связывающие аппроксимационные свойства матрицы Θ и транспонированной матрицы $\Theta^\intercal$.

Первые многомерные определения интересующих нас объектов были, по–видимому, даны Г. Минковским, Г. Ф. Вороным и Ф. Клейном. Ими же были заложены основания геометрии чисел, методы которой и позволили получить большинство из существующих на данный момент результатов теории многомерных линейных диофантовых приближений. Первые результаты о диофантовых экспонентах были получены в 20-х годах прошлого века А. Я. Хинчиным и В. Ярником. Эти результаты впоследствии улучшались и обобщались К. Малером, Ф. Дайсоном, А. Апфельбеком, а в последние годы — М. Лораном, Я. Бюжо, Д. Руа, Н. Г. Мощевитиным, а также классиком теории диофантовых приближений В. М. Шмидтом. Однако большинство многомерных результатов до сих пор были неточны, для некоторых диофантовых экспонент не было известно неравенств переноса, не было даже доказано такое простое и естественное утверждение, что матрица Θ мультипликативно плохо приближаема тогда и только тогда, когда мультипликативно плохо приближаема $\Theta^\intercal$. А ведь последний вопрос, несомненно, важен, поскольку гипотеза Литтлвуда в точности утверждает, что не существует мультипликативно плохо приближаемых двумерных векторов. В связи с гипотезой Литтлвуда также естественным образом возникают решетки с положительным норменным минимумом, поскольку эта гипотеза следует из трехмерной гипотезы Оппенгейма о произведении линейных форм, которая утверждает, что положительными норменными минимумами обладают только алгебраические решетки. Как оказалось, для изучения решеток с положительными норменными минимумами весьма полезны так называемые полиэдры Клейна — одно из наиболее естественных многомерных обобщений понятия цепной дроби. Положительность норменного минимума решетки обобщает на многомерный случай свойство числа быть плохо приближаемым. А как было сказано выше, иррациональное число плохо приближаемо тогда и только тогда, когда его неполные частные ограничены. Соответственно, естественно ожидать, что свойство решетки иметь положительный норменный минимум должно быть связано с каким-нибудь свойством многомерной цепной дроби. Кроме того, в 80-х годах прошлого века В. И. Арнольд предложил использовать полиэдры Клейна для исследования алгебраических решеток и выдвинул ряд гипотез об этой конструкции, в том числе вопрос о многомерном обобщении теоремы Лагранжа для цепных дробей. Так возникает вопрос о переформулировке гипотезы Оппенгейма для линейных форм в терминах свойств полиэдров Клейна, то есть о том, как связать посредством этих свойств алгебраичность решетки и положительность ее норменного минимума.

В настоящей диссертации сделан вклад в развитие теории диофантовых экспонент, теории плохо приближаемых матриц, теории решеток с положительным норменным минимумом и теории многомерных цепных дробей дающий, в частности, ответы на некоторые из указанных выше вопросов.

Научная новизна работы.

Все результаты диссертации являются новыми. На данный момент они являются лучшими из существующих в данной области. Кроме того, для их обоснования был разработан ряд новых методов. Так, новым является метод работы с двойственными рациональными подпространствами, позволяющий учитывать "равномерный" аспект диофантовых приближений. Новым также является метод, привлекающий одновременно полилинейную алгебру и параметрическую геометрию чисел для исследования промежуточных диофантовых экспонент. Новой является конструкция, обобщающая на многомерный случай понятие неполного частного. Также впервые используется принцип "двойного" переноса.

Основные результаты диссертации состоят в следующем :

- Усилена классическая теорема переноса Малера
- Доказана теорема переноса для равномерных диофантовых экспонент, усиливающая теоремы Ярника и Апфельбека
- Доказана теорема переноса для регулярных и равномерных диофантовых экспонент, усиливающая теоремы Хинчина и Дайсона, а также обобщающая теоремы Лорана и Бюжо
- Получены новые неравенства для промежуточных диофантовых экспонент, усиливающие неравенства Ярника, Хинчина и Дайсона
- Доказана теорема о существовании линейных форм заданного диофантового типа
- Доказана теорема переноса для мультипликативных диофантовых приближений
- Получен ряд неравенств переноса для мультипликативных диофантовых экспонент, усиливающих результаты Шмидта и Вонга
- Доказано, что матрица Θ мультипликативно плохо приближаема тогда и только тогда, когда мультипликативно плохо приближаема $\Theta^\intercal$
- Получен многомерный аналог известного утверждения, что иррациональное число плохо приближаемо тогда и только тогда, когда его неполные частные ограничены
- Получен многомерный аналог теоремы Лагранжа о цепных дробях
- Получена переформулировка гипотезы Оппенгейма о произведении линейных форм в терминах геометрических свойств полиэдров Клейна
- Получено описание относительных минимумов трехмерной решетки как точек, лежащих на границе полиэдра Клейна этой решетки

Методы исследования.

В работе используются методы геометрии чисел, выпуклого анализа, линейной алгебры, теории двойственных многогранников, теории алгебраических решеток, а также методы полилинейной алгебры.

Теоретическая и практическая ценность.

Диссертация носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, и разработанные в ней методы могут быть применены в задачах, возникающих в контексте классической гипотезы Литтлвуда, гипотезы Оппенгейма о произведении линейных форм, гипотезы Вирзинга о приближении вещественных чисел алгебраическими, а также в ряде других задач теории диофантовых приближений, связанных с диофантовыми экспонентами и многомерными обобщениями цепных дробей. Кроме того, полученные результаты могут весьма эффективно использоваться в учебном процессе — в рамках специальных курсов и специальных семинаров.

Апробация работы.

Результаты настоящей диссертации неоднократно докладывались автором на многочисленных международных конференциях и семинарах.

Перечислим конференции:

- V международная конференция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" (Тула, май 2003)
- Международная конференция "23$^{\text{rd}}$ Journée Arithmétiques Graz 2003" (Graz, Австрия, июль 2003)
- Международная конференция "Diophantine analysis, uniform distributions and applications" (Минск, Беларусь, август 2003)
- Международная конференция "Analytic methods in Number Theory, Probability and Statistics" (Санкт-Петербург, апрель 2005)
- Международная конференция "24$^{\text{th}}$ Journée Arithmétiques Marseilles 2005" (Marseilles, Франция, июль 2005)
- Международная конференция "Analytical and Combinatorial Methods in Number Theory and Geometry" (Москва, май 2006)
- Международный математический конгресс 2006 (Madrid, Испания, август 2006)
- V международная летняя школа "Algebra, Topology, Analysis and Applications" (Львов, Украина, август 2007)
- Международная конференция "Fete of Combinatorics and Computer Science" (Keszthely, Венгрия, август 2008)
- XXXIV Дальневосточная математическая школа "Фундаментальные проблемы математики и информационных наук" (Хабаровск, июнь 2009)
- Международная конференция "26$^{\text{th}}$ Journée Arithmétiques Saint-Etienne 2009" (Saint-Etienne, Франция, июль 2009)
- Международная конференция "Geometry, Topology, Algebra and Number Theory, Applications" (Москва, август 2010)
- Международный математический конгресс 2010 (Hyderabad, Индия, август 2010)

- Международная конференция “Diophantine Approximation and Transcendence” (Luminy, Франция, сентябрь 2010)
- Международная конференция “Number Theory and Its Applications” (Debrecen, Венгрия, октябрь 2010)
- Международная конференция “27^{th} Journée Arithmétiques Vilnius 2011” (Вильнюс, Литва, июль 2011)
- Международная конференция “Diophantine Approximation. Current State of Art and Applications” (Минск, Беларусь, июль 2011)
- Международная конференция “Diophantische Approximationen” (Oberwolfach, Германия, апрель 2012)
- Международная конференция “Diophantine Analysis” (Астрахань, июль 2012)
- Ломоносовские чтения в МГУ имени М. В. Ломоносова (2002–2012).

Перечислим теперь семинары:

- Московский семинар по теории чисел под руководством чл.–корр. РАН Ю. В. Нестеренко и д.ф.–м.н. Н. Г. Мощевитина
- Заседание Московского математического общества
- Заседание Санкт-Петербургского математического общества
- Минский городской семинар по теории чисел под руководством д.ф.–м.н. В. И. Берника
- Семинар “Современные проблемы теории чисел” (МИАН) под руководством д.ф.–м.н. С. В. Конягина и И. Д. Шкредова
- Семинар “Арифметика и геометрия” (МГУ) под руководством д.ф.–м.н. Н. Г. Мощевитина, д.ф.–м.н. А. М. Райгородского
- Семинар “Дискретная геометрия и геометрия чисел” (МГУ) под руководством д.ф.–м.н. Н. П. Долбилина и д.ф.–м.н. Н. Г. Мощевитина
- Общефакультетский семинар математического факультета Университета г. Йорк, Великобритания
- Общефакультетский семинар математического факультета Университета г. Чандигар, Индия
- Общефакультетский семинар математического факультета Университета г. Авейро, Португалия
- Общефакультетский семинар математического факультета Университета г. Билефельд, Германия

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в 12 работах, список которых приводится в конце автореферата. Все работы опубликованы в журналах, входящих в действующий перечень ВАК.

Структура и объем работы.

Диссертация изложена на 150 страницах и состоит из введения, общей характеристики работы, трех глав и списка использованных источников, включающего 75 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ.

В первой главе диссертации предлагается обзор предшествующих результатов. Вторая глава посвящена "выпуклым" задачам теории многомерных линейных диофантовых приближений, то есть когда отклонение измеряется при помощи sup–нормы, а третья глава — "мультипликативным" задачам, то есть когда вместо sup–нормы рассматривается произведение координат.

Большая часть второй главы посвящена теоремам переноса для диофантовых экспонент. Пусть задана матрица

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n1} & \cdots & \theta_{nm} \end{pmatrix}, \qquad \theta_{ij} \in \mathbb{R}, \quad n+m \geqslant 3,$$

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\Theta\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{1}$$

с переменными $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Будем обозначать через $\Theta^\intercal$ транспонированную матрицу. Рассмотрим "транспонированную" систему

$$\Theta^\intercal\mathbf{y} = \mathbf{x}, \tag{2}$$

где, как и прежде, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1. Супремум вещественных чисел γ, для которых существует сколь угодно большое t, такое что (соотв. для которых при любом достаточно большом t) система неравенств

$$|\mathbf{x}|_\infty \leqslant t, \qquad |\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}|_\infty \leqslant t^{-\gamma} \tag{3}$$

имеет ненулевое решение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n$, называется *регулярной* (соотв. *равномерной*) *диофантовой экспонентой* матрицы Θ и обозначается $\beta(\Theta)$ (соотв. $\alpha(\Theta)$).

Для $n = 1$ имеет место классическая теорема переноса Хинчина[1]:

Теорема A. (Хинчин) *Если $n = 1$, то*

$$\frac{\beta(\Theta)}{(m-1)\beta(\Theta)+m} \leqslant \beta(\Theta^\intercal) \leqslant \frac{\beta(\Theta)-m+1}{m}. \tag{4}$$

[1] A. Ya. Khintchine *Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen.* Rend. Sirc. Mat. Palermo, **50** (1926), 170–195

Эти неравенства неулучшаемы[2,3], если ограничиваться рассмотрением величин $\beta(\Theta)$ и $\beta(\Theta^\intercal)$. Но если привлечь $\alpha(\Theta)$ и $\alpha(\Theta^\intercal)$, можно доказать нечто более сильное. Соответствующий результат для $n = 1$ принадлежит Лорану и Бюжо[4,5]. Они доказали следующее.

Теорема B. (Лоран, Бюжо) *Если $n = 1$, $m \geqslant 2$, а компоненты Θ линейно независимы вместе с единицей над $\mathbb{Q}$, то*

$$\begin{aligned} \beta(\Theta^\intercal) &\geqslant \frac{(\alpha(\Theta)-1)\beta(\Theta)}{((m-2)\alpha(\Theta)+1)\beta(\Theta)+(m-1)\alpha(\Theta)}, \\ \beta(\Theta^\intercal) &\leqslant \frac{(1-\alpha(\Theta^\intercal))\beta(\Theta)-m+2-\alpha(\Theta^\intercal)}{m-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Теорема A была обобщена на случай произвольных n, m Дайсоном[6]:

Теорема C. (Дайсон) *Для всех натуральных n, m, не равных одновременно 1, справедливо неравенство*

$$\beta(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{n\beta(\Theta)+n-1}{(m-1)\beta(\Theta)+m}. \tag{6}$$

В параграфе 2.1 мы доказываем следующую теорему, которая обобщает теорему B и уточняет теорему C:

Теорема 1. *Пусть пространство целочисленных решений системы* (1) *не одномерно. Тогда для всех натуральных n, m, не равных одновременно 1, справедливы три неравенства*

$$\beta(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{n\beta(\Theta)+n-1}{(m-1)\beta(\Theta)+m}, \tag{7}$$

$$\beta(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{(n-1)(1+\beta(\Theta))-(1-\alpha(\Theta))}{(m-1)(1+\beta(\Theta))+(1-\alpha(\Theta))}, \tag{8}$$

$$\beta(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{(n-1)(1+\beta(\Theta)^{-1})-(\alpha(\Theta)^{-1}-1)}{(m-1)(1+\beta(\Theta)^{-1})+(\alpha(\Theta)^{-1}-1)}. \tag{9}$$

Для равномерных экспонент $\alpha(\Theta)$ и $\alpha(\Theta^\intercal)$ Ярник[7] доказал следующее.

---

[2] V. Jarník *Über einen Satz von A. Khintchine.* Prace Mat. Fiz, **43** (1936), 151–166

[3] V. Jarník *Über einen Satz von A. Khintchine, 2.* Acta Arithm., **2** (1936), 1–22

[4] M. Laurent *Exponents of Diophantine approximation in dimension two.* Canad. J. Math., **61** (2009), 165–189

[5] Y. Bugeaud, M. Laurent *On transfer inequalities in Diophantine approximations II.* Math. Z., 265:2 (2010), 249–262

[6] F. J. Dyson *On simultaneous Diophantine approximations.* Proc. London Math. Soc., (2) 49 (1947), 409–420.

[7] V. Jarník *Zum Khintchineschen "Übertragungssatz".* Trav. Inst. Math. Tbilissi, **3** (1938), 193–212

Теорема D. (Ярник) *Если $n = 1$, $m = 2$, а элементы Θ линейно независимы вместе с единицей над $\mathbb{Q}$, то*

$$\alpha(\Theta)^{-1} + \alpha(\Theta^\intercal) = 1. \tag{10}$$

Теорема E. (Ярник) *Если $m \geqslant 3$, а элементы Θ линейно независимы вместе с единицей над $\mathbb{Q}$, то справедливы следующие утверждения:*
(i)

$$\frac{\alpha(\Theta)}{(m-1)\alpha(\Theta)+m} \leqslant \alpha(\Theta^\intercal) \leqslant \frac{\alpha(\Theta)-m+1}{m}\,; \tag{11}$$

(ii) если $\alpha(\Theta) > m(2m-3)$, то

$$\alpha(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{1}{m-1}\left(1-\frac{1}{\alpha(\Theta)-2m+4}\right);$$

(iii) если $\alpha(\Theta) > (m-1)/m$, то

$$\alpha(\Theta^\intercal) \geqslant m-2+\frac{1}{1-\alpha(\Theta)}\,.$$

Теорема E была впоследствии обобщена Апфельбеком[8] на случай произвольных n, m.

Теорема F. (Апфельбек) (*i*) *Всегда справедливы неравенства*

$$\alpha(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{n\alpha(\Theta)+n-1}{(m-1)\alpha(\Theta)+m}\,. \tag{12}$$

(ii) Если $m > 1$ and $\alpha(\Theta) > (2(m+n-1)(m+n-3)+m)/n$, то

$$\alpha(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{1}{m}\left(n+\frac{n(n\alpha(\Theta)-m)-2n(m+n-3)}{(m-1)(n\alpha(\Theta)-m)+m-(m-2)(m+n-3)}\right).$$

В параграфе 2.1 мы доказываем следующую теорему, которая улучшает теоремы E и F:

Теорема 2. *Для всех натуральных n, m, не равных одновременно 1, справедливы неравенства*

$$\alpha(\Theta^\intercal) \geqslant \begin{cases} \dfrac{n-1}{m-\alpha(\Theta)}, & \text{при} \ \ \alpha(\Theta) \leqslant 1, \\[2ex] \dfrac{n-\alpha(\Theta)^{-1}}{m-1}, & \text{при} \ \ \alpha(\Theta) \geqslant 1. \end{cases} \tag{13}$$

---

[8] A. Apfelbeck *A contribution to Khintchine's principle of transfer.* Czech. Math. J., **1**:3 (1951), 119–147

В основе многих теорем, связывающих систему (1) с транспонированной, лежат утверждения локального характера, наиболее сильным из которых является теорема Малера[9,10,11]:

Теорема G. (Малер) *Если* $0 < U < 1 < X$ *и для* $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$ *справедливы неравенства*

$$0 < |\mathbf{x}|_\infty \leqslant X, \qquad |\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}|_\infty \leqslant U, \tag{14}$$

то существуют такие $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, *что*

$$0 < |\mathbf{y}|_\infty \leqslant Y, \qquad |\Theta^\intercal\mathbf{y} - \mathbf{x}|_\infty \leqslant V, \tag{15}$$

где

$$Y = (d-1)\big(X^m U^{1-m}\big)^{\frac{1}{d-1}}, \quad V = (d-1)\big(X^{1-n} U^n\big)^{\frac{1}{d-1}}, \quad \text{и} \quad d = n+m. \tag{16}$$

Метод, при помощи которого получаются результаты параграфа 2.1, позволил усилить эту теорему. В том же параграфе мы доказываем, что коэффициент $d-1$ можно заменить меньшей величиной, которая стремится к единице при $d \to \infty$. А именно, мы определяем величину

$$\Delta_d = \frac{1}{2^{d-1}\sqrt{d}} \operatorname{vol}_{d-1} \Big\{ \mathbf{x} \in \mathcal{B}_\infty^d \;\Big|\; \sum_{i=1}^d x_i = 0 \Big\}, \tag{17}$$

где $\mathcal{B}_\infty^d$ обозначает единичный шар в sup-норме в пространстве $\mathbb{R}^d$, а $\operatorname{vol}_{d-1}(\cdot)$ обозначает $(d-1)$–мерную меру Лебега, и доказываем следующую теорему:

Теорема 3. *Если* $0 < U < 1 < X$ *и для* $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$ *справедливы неравенства*

$$0 < |\mathbf{x}|_\infty \leqslant X, \qquad |\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}|_\infty \leqslant U, \tag{18}$$

то существуют такие $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, *что*

$$0 < |\mathbf{y}|_\infty \leqslant Y, \qquad |\Theta^\intercal\mathbf{y} - \mathbf{x}|_\infty \leqslant V, \tag{19}$$

где

$$Y = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}}\big(X^m U^{1-m}\big)^{\frac{1}{d-1}}, \quad V = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}}\big(X^{1-n} U^n\big)^{\frac{1}{d-1}}. \tag{20}$$

[9] K. Mahler *Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen.* Čas. Pešt. Mat. Fys., **68** (1939), 85–92
[10] K. Mahler *On a theorem of Dyson.* Mat. sbornik, **26(68)**:3 (1950), 457–462
[11] J. W. S. Cassels *An introduction to Diophantine approximation.* Cambridge University Press (1957)

Параграф 2.2 посвящен так называемым промежуточным экспонентам — показателям того, насколько хорошо пространство решений системы (1) приближается рациональными подпространствами $\mathbb{R}^d$ размерности p. Рассматриваемые выше экспоненты $\alpha(\Theta)$ и $\beta(\Theta)$ соответствуют частному случаю $p = 1$, а в двойственной постановке — случаю $p = d - 1$. Большую работу в этом направлении проделал Шмидт[12]. Самым простым способом обобщить определение 1 представляется следующий.

Определение 2. Супремум вещественных чисел γ, для которых существует сколь угодно большое t, такое что (соотв. для которых при любом достаточно большом t) система неравенств

$$|\mathbf{x}|_\infty \leqslant t, \qquad |\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}|_\infty \leqslant t^{-\gamma} \tag{21}$$

имеет p решений $\mathbf{z}_i = (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \ldots, p$, линейно независимых над $\mathbb{Z}$, называется *p-й регулярной (соотв. равномерной) диофантовой экспонентой первого типа* матрицы Θ и обозначается $\beta_p(\Theta)$ (соотв. $\alpha_p(\Theta)$).

Лораном и Бюжо[13,14] было дано отличное от этого определение для случая $m = 1$. В параграфе 2.2 мы обобщаем их определение на случай произвольных n, m. Обозначим через $\mathcal{L}$ пространство решений системы (1), т.е.

$$\mathcal{L} = \left\{ \mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \Theta\mathbf{x} = \mathbf{y} \right\}, \quad d = m + n,$$

и положим $k = \max(0, m - p)$.

Определение 3. Супремум вещественных чисел γ, для которых существует сколь угодно большое t, такое что (соотв. для которых при любом достаточно большом t) система неравенств

$$|\mathbf{Z}| \leqslant t, \qquad \max_{\substack{\mathbf{L} \in \wedge^{1+k}(\mathcal{L}) \\ |\mathbf{L}| = 1}} |\mathbf{L} \wedge \mathbf{Z}| \leqslant t^{-\gamma} \tag{22}$$

имеет ненулевое решение в $\mathbf{Z} \in \wedge^p(\mathbb{Z}^d)$, называется *$p$-й регулярной (соотв. равномерной) диофантовой экспонентой второго типа* матрицы Θ и обозначается $\mathfrak{b}_p(\Theta)$ (соотв. $\mathfrak{a}_p(\Theta)$).

[12] W. M. Schmidt *On heights of algebraic subspaces and diophantine approximations.* Annals of Math. **85**:3 (1967), 430–472

[13] M. Laurent *On transfer inequalities in Diophantine Approximation.* В сборнике “Analytic Number Theory, Essays in Honour of Klaus Roth” (под ред. W. W. L. Chen, W. T. Gowers, H. Halberstam, W. M. Schmidt и R. C. Vaughan). Cambridge University Press (2009), 306–314

[14] Y. Bugeaud, M. Laurent *On transfer inequalities in Diophantine approximations II.* Math. Z., 265:2 (2010), 249–262

В параграфе 2.2 мы усиливаем теорему C и теоремы 2, 1, представляя их в виде цепочек неравенств для промежуточных диофантовых экспонент. А именно, мы показываем, что

$$\mathfrak{b}_p(\Theta^\intercal) = \mathfrak{b}_{d-p}(\Theta), \qquad \mathfrak{a}_p(\Theta^\intercal) = \mathfrak{a}_{d-p}(\Theta), \qquad p = 1, \ldots, d-1, \tag{23}$$

и доказываем следующие три теоремы:

Теорема 4. *Для каждого $p = 1, \ldots, d-2$ верно следующее.*
Если $p \geqslant m$, то

$$(d-p-1)(1 + \mathfrak{b}_{p+1}(\Theta)) \geqslant (d-p)(1 + \mathfrak{b}_p(\Theta)), \tag{24}$$

$$(d-p-1)(1 + \mathfrak{a}_{p+1}(\Theta)) \geqslant (d-p)(1 + \mathfrak{a}_p(\Theta)). \tag{25}$$

Если $p \leqslant m-1$, то

$$(d-p-1)(1 + \mathfrak{b}_p(\Theta))^{-1} \geqslant (d-p)(1 + \mathfrak{b}_{p+1}(\Theta))^{-1} - n, \tag{26}$$

$$(d-p-1)(1 + \mathfrak{a}_p(\Theta))^{-1} \geqslant (d-p)(1 + \mathfrak{a}_{p+1}(\Theta))^{-1} - n. \tag{27}$$

Теорема 5. *Предположим, что пространство решений системы* (1) *не является одномерной решеткой. Тогда для $m = 1$ справедливо неравенство*

$$\mathfrak{b}_2(\Theta) \geqslant \frac{\mathfrak{b}_1(\Theta) + \mathfrak{a}_1(\Theta)}{1 - \mathfrak{a}_1(\Theta)}\,, \tag{28}$$

а для $m \geqslant 2$ справедливо неравенство

$$\mathfrak{b}_2(\Theta) \geqslant \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{a}_1(\Theta) - 1}{2 + \mathfrak{b}_1(\Theta) - \mathfrak{a}_1(\Theta)}\,, & \text{\textit{при}} \ \ \mathfrak{a}_1(\Theta) \neq \infty, \\[2ex] \dfrac{1 - \mathfrak{a}_1(\Theta)^{-1}}{\mathfrak{b}_1(\Theta)^{-1} + \mathfrak{a}_1(\Theta)^{-1}}\,. \end{cases} \tag{29}$$

Теорема 6. *Для $m = 1$ справедливо неравенство*

$$\mathfrak{a}_2(\Theta) \geqslant (1 - \mathfrak{a}_1(\Theta))^{-1} - \frac{n-2}{n-1}\,. \tag{30}$$

Для $m \geqslant 2$ справедливо неравенство

$$\mathfrak{a}_2(\Theta) \geqslant \begin{cases} \dfrac{n-1}{-n - (d-2)(1 - \mathfrak{a}_1(\Theta))^{-1}}\,, & \text{\textit{при}} \ \ \mathfrak{a}_1(\Theta) \leqslant 1, \\[2ex] \dfrac{m-1}{n + (d-2)(\mathfrak{a}_1(\Theta) - 1)^{-1}}\,, & \text{\textit{при}} \ \ \mathfrak{a}_1(\Theta) \geqslant 1. \end{cases} \tag{31}$$

Одним из основных инструментов при доказательстве этих теорем послужила так называемая параметрическая геометрия чисел, открытая несколько лет назад Шмидтом и Зуммерером[15],[16]. Усовершенствование этого подхода позволило, помимо всего прочего, сильно упростить некоторые их доказательства. Так, в параграфе 2.3 мы предлагаем в качестве приложения метода, разработанного в параграфах 2.1, 2.2, короткое доказательство их выдающегося результата о промежуточных экспонентах[17]. Оно основывается на простом геометрическом наблюдении и не требует привлечения теории присоединенных тел Малера.

Заметим теперь, что если ограничиваться только показательными функциями при изучении асимптотического поведения какой-нибудь величины, то от нашего внимания ускользает промежуточный рост. Поэтому естественно для произвольной функции $\psi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ дать следующее определение:

Определение 4. Будем называть матрицу Θ *регулярно* (соотв. *равномерно*) *ψ-аппроксимируемой*, если существует сколь угодно большое t, при котором (соотв. для каждого достаточно большого t) система неравенств

$$0<|\mathbf{x}|_\infty\leqslant t,\qquad |\Theta\mathbf{x}-\mathbf{y}|_\infty\leqslant\psi(t).$$

имеет решение $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{Z}^m\oplus\mathbb{Z}^n$.

В параграфе 2.1, помимо теорем 1, 2, мы доказываем их более сильные аналоги, в которых вместо экспонент рассматриваются произвольные функции, удовлетворяющие некоторым естественным ограничениям на рост. Кроме того, в параграфе 2.4 мы доказываем теорему существования линейной формы заданного диофантового типа для случая $m=1$, $n=2$.

Третья глава диссертации начинается теоремами переноса для так называемых мультипликативных экспонент.

Для каждого вектора $\mathbf{z}=(z_1,\ldots,z_k)\in\mathbb{R}^k$ положим

$$\Pi(\mathbf{z})=\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant k}|z_i|\right)^{1/k}\qquad\text{и}\qquad \Pi'(\mathbf{z})=\left(\prod_{1\leqslant i\leqslant k}\max(1,|z_i|)\right)^{1/k}.$$

Определение 5. Супремум вещественных чисел γ, для которых существует бесконечно много таких $\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^m\backslash\{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y}\in\mathbb{Z}^n$, что

$$\Pi(\Theta\mathbf{x}-\mathbf{y})\leqslant\Pi'(\mathbf{x})^{-\gamma},\tag{32}$$

[15] W. M. Schmidt, L. Summerer *Parametric geometry of numbers and applications.* Acta Arithmetica, **140**:1 (2009), 67–91

[16] W. M. Schmidt, L. Summerer *Diophantine approximation and parametric geometry of numbers.* Monat. Math., (2012), DOI: 10.1007/s00605-012-0391-z

[17] там же

называется *мультипликативной диофантовой экспонентой* матрицы Θ и обозначается $\beta_{\scriptscriptstyle M}(\Theta)$.

Обычные и мультипликативные экспоненты связаны тривиальными неравенствами

$$\beta(\Theta) \leqslant \beta_{\scriptscriptstyle M}(\Theta) \leqslant \begin{cases} m\beta(\Theta), & \text{если } n = 1, \\ +\infty, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{33}$$

$$\beta_{\scriptscriptstyle M}(\Theta) \geqslant \beta(\Theta) \geqslant m/n, \quad \beta_{\scriptscriptstyle M}(\Theta^\intercal) \geqslant \beta(\Theta^\intercal) \geqslant n/m. \tag{34}$$

Что же касается нетривиальных соотношений для $\beta_{\scriptscriptstyle M}(\Theta)$ и $\beta_{\scriptscriptstyle M}(\Theta^\intercal)$, до сих пор было известно крайне мало. Шмидт и Ванг[18] доказали в 1979-м году, что

$$\beta_{\scriptscriptstyle M}(\Theta) = m/n \iff \beta_{\scriptscriptstyle M}(\Theta^\intercal) = n/m, \tag{35}$$

так же как и в случае обыкновенных диофантовых экспонент. Позже, в 1981-м году, Ванг и Ю[19] доказали, что оба равенства в (35) верны для почти всех Θ относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^{nm}$. Эти равенства тесно связаны со свойством матрицы быть *плохо приближаемой*.

Определение 6. Матрица Θ называется *плохо приближаемой*, если

$$\inf_{\substack{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{Z}^m\oplus\mathbb{Z}^n \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} |\mathbf{x}|_\infty^m |\Theta\mathbf{x}-\mathbf{y}|_\infty^n > 0.$$

Определение 7. Матрица Θ называется *мультипликативно плохо приближаемой*, если

$$\inf_{\substack{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{Z}^m\oplus\mathbb{Z}^n \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \Pi'(\mathbf{x})^m \Pi(\Theta\mathbf{x}-\mathbf{y})^n > 0.$$

Хорошо известно[20], что матрица Θ плохо приближаема тогда и только тогда, когда плохо приближаема матрица $\Theta^\intercal$. Что же до мультипликативного аналога данного утверждения, единственным доказанным на данный момент фактом является результат Касселса и Суиннертона–Дайера[21], заключающийся в том, что если $n = 2$, $m = 1$ и матрица Θ мультипликативно плохо

[18] W. M. Schmidt, Y. Wang *A note on a transference theorem of linear forms.* Sci. Sinica, **22**:3 (1979), 276–280

[19] Y. Wang, K. Yu *A note on some metrical theorems in Diophantine approximation.* Chinese Ann. Math., **2** (1981), 1–12

[20] см. теорему VIII в книге J. W. S. Cassels *An introduction to Diophantine approximation.* Cambridge University Press (1957)

[21] J. W. S. Cassels, H. P. F. Swinnerton-Dyer *On the product of three homogeneous linear forms and indefinite ternary quadratic forms.* Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 248 (1955), 73–96

приближаема, то мультипликативно плохо приближаема и матрица $\Theta^\intercal$. Отметим, что существование мультипликативно плохо приближаемых матриц Θ при $n = 2$, $m = 1$ в точности совпадает с отрицанием гипотезы Литтлвуда, так что случай $n+m = 3$ представляется наиболее интересным. Однако даже в этом случае упомянутый выше результат Касселса и Суиннертона–Дайера является импликацией только в одну сторону.

Основным результатом параграфа 3.1 является следующая теорема, весьма похожая на теорему Малера, описывающую принцип переноса в случае обыкновенных диофантовых приближений (теорема G). Особенно же она похожа на усиленную ее версию — теорему 3 и так же, как эта теорема, использует величину Δ_d, определяемую равенством (17).

Теорема 7. *Если* $0 < U < 1 \leqslant X$ *и для* $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$ *справедливы неравенства*

$$\Pi'(\mathbf{x}) \leqslant X, \qquad \Pi(\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leqslant U, \tag{36}$$

то существуют такие $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$, *что*

$$\Pi'(\mathbf{y}) \leqslant Y, \qquad \Pi(\Theta^\intercal\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leqslant V, \tag{37}$$

$$|\Theta^\intercal\mathbf{y} - \mathbf{x}|_\infty \leqslant \Delta_d V^m Y^n, \tag{38}$$

где

$$Y = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} \left(X^m U^{1-m}\right)^{\frac{1}{d-1}}, \quad V = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} \left(X^{1-n} U^n\right)^{\frac{1}{d-1}}, \tag{39}$$

и $d = n + m$.

В качестве следствия из этой теоремы мы получаем, что Θ и $\Theta^\intercal$ одновременно являются мультипликативно плохо приближаемыми при любых n, m, чем заполняется существующий пробел.

Кроме того, из теоремы 7 выводится неравенство

$$\beta_{\scriptscriptstyle M}(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{n\beta_{\scriptscriptstyle M}(\Theta) + n - 1}{(m-1)\beta_{\scriptscriptstyle M}(\Theta) + m}, \tag{40}$$

являющееся точным аналогом неравенства Дайсона (см. теорему C). На возможность доказательства неравенства (40) при некоторых ограничениях на матрицу Θ указывал Бюжо[22], однако до сих пор оно оставалось недоказанным.

Теорема 7 обладает также довольно неожиданным отличием от теоремы 3, которое некоторым образом смешивает задачи обыкновенных и мультипликативных приближений и тем самым позволяет доказать неравенства, связывающие обыкновенные и мультипликативные экспоненты в случае, когда либо

[22] Y. Bugeaud *Multiplicative Diophantine exponents.* “Dynamical systems and Diophantine Approximation”, Proceedings of the conference held at the Institut Henri Poincaré, Société mathématique de France

n, либо m равно единице. Некоторые соотношения такого рода приводятся в параграфе 3.1.

Параграфы 3.2–3.5 посвящены исследованию так называемых полиэдров Клейна, которые позволяют взглянуть с иной точки зрения на явление плохо приближаемости.

Так, к примеру, положительность норменного минимума решетки

$$\Lambda_{\alpha,\beta} = \Big\{ \big(\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x} \rangle, \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{x} \rangle \big) \ \Big| \ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \Big\},$$

где $\boldsymbol{\alpha} = (-1, \alpha)$, $\boldsymbol{\beta} = (-1, \beta)$, а α и β — различные вещественные числа, эквивалентна тому, что оба числа α и β являются плохо приближаемыми.

Определение 8. *Норменным минимумом* d-мерной решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ называется величина

$$N(\Lambda) = \inf_{\mathbf{x} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}} |\varphi(\mathbf{x})|,$$

где $\varphi(\mathbf{x}) = x_1 \ldots x_d$ — произведение координат точки $\mathbf{x}$.

Выпуклая оболочка ненулевых точек решетки $\Lambda_{\alpha,\beta}$ с неотрицательными координатами называется *полигоном Клейна*. Комбинаторную структуру границы этого полигона Клейна описывают неполные частные чисел α и β. А именно, целочисленные длины ребер полигона Клейна и целочисленные углы между парами его смежных ребер равны соответствующим неполным частным чисел α и β. *Целочисленной длиной* отрезка с концами в точках решетки называется количество точек решетки, лежащих во внутренности отрезка, плюс один. *Целочисленным углом* между двумя такими отрезками с общей вершиной называется площадь параллелограмма, натянутого на них, деленная на произведение их целочисленных длин, или иными словами, индекс подрешетки, порожденной примитивными векторами решетки, параллельными этим двум отрезкам.

Стало быть, общеизвестное утверждение о том, что *иррациональное число плохо приближаемо тогда и только тогда, когда его неполные частные ограничены*, можно переформулировать геометрически:

Предложение 1. *Следующие два утверждения эквивалентны.*

(1) *Решетка $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ имеет положительный норменный минимум.*

(2) *Целочисленные длины ребер и целочисленные углы между соседними ребрами полигона Клейна решетки Λ равномерно ограничены.*

В этих терминах можно переформулировать и теорему Лагранжа о цепных дробях, которая утверждает, что *число α является квадратичной иррациональностью тогда и только тогда, когда его разложение в цепную дробь периодично, начиная с какого-то момента*:

Предложение 2. *Следующие два утверждения эквивалентны.*

(1) *Вещественные числа α и β суть сопряженные квадратичные иррациональности.*

(2) *Комбинаторная структура границы полигона Клейна решетки $\Lambda_{\alpha,\beta}$, оснащенная целочисленными длинами ребер и целочисленными углами между соседними ребрами, периодична.*

В параграфах 3.2 и 3.3 мы обобщаем предложения 1 и 2 на многомерный случай. Мы используем в качестве многомерного обобщения полигонов Клейна конструкцию, предложенную более века назад Ф. Клейном[23]. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная d–мерная решетка с определителем 1.

Определение 9. Выпуклые оболочки ненулевых точек d-мерной решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, содержащихся в каждом ортанте, называются *полиэдрами Клейна* решетки Λ.

И соответствующее "двойственное" определение, когда фиксирована решетка и варьируется конус:

Определение 10. Пусть $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ — d–мерный симплициальный конус с вершиной в начале координат. Выпуклая оболочка K ненулевых точек решетки $\mathbb{Z}^d$, содержащихся в $\mathcal{C}$, называется *полиэдром Клейна*, соответствующим решетке $\mathbb{Z}^d$ и конусу $\mathcal{C}$.

Если решетка Λ иррациональна, то есть не имеет в координатных плоскостях ненулевых точек, или, иначе, если иррационален конус $\mathcal{C}$, то есть $\mathcal{C}$ не имеет в плоскостях своих граней ненулевых целых точек, то, как показал Муссафир[24], полиэдр Клейна K является обобщенным многогранником, то есть множеством, которое в пересечении с любым многогранником дает многогранник. В этом случае граница K является $(d-1)$–мерной полиэдральной поверхностью, гомеоморфной $\mathbb{R}^{d-1}$ и состоящей из выпуклых $(d-1)$–мерных (обобщенных) многогранников, такой что каждая точка этой поверхности принадлежит не более, чем конечному числу таких многогранников. Некоторые из граней K могут оказаться неограниченными, но только в том случае[25], когда решетка, двойственная Λ, не является иррациональной (соотв. конус, двойственный к $\mathcal{C}$, не является иррациональным).

Тогда имеет смысл следующее

Определение 11. Граница Π полиэдра Клейна K называется *парусом.*

---

[23] F. Klein *Uber eine geometrische Auffassung der gewohnlichen Kettenbruchentwichlung.* Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, **3** (1895), 357–359

[24] J.–O. Moussafir *Convex hulls of integral points.* Zapiski nauch. sem. POMI, **256** (2000)

[25] О. Н. Герман *Паруса и норменные минимумы решеток.* Мат. Сборник, **196**:3 (2005), 31–60

Ввиду соответствия между неполными частными и целочисленными длинами и углами, описанного выше, в d–мерном случае естественно ожидать, что $(d-1)$–мерные грани паруса (мы будем называть их *гипергранями*) и реберные звезды при вершинах паруса будут играть роль неполных частных. В качестве численной характеристики таких многомерных “неполных частных” мы будем рассматривать их “детерминанты”.

Определение 12. Пусть F — произвольная гипергрань паруса Π и пусть $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ — вершины F. *Детерминантом гиперграни* F будем называть величину

$$\det F = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_d \leqslant k} |\det(\mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_d})|\,.$$

Определение 13. Пусть вершина $\mathbf{v}$ паруса Π инцидентна k ребрам. Пусть $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_k$ — примитивные вектора решетки Λ, параллельные этим ребрам. *Детерминантом реберной звезды* $\mathrm{St}_{\mathbf{v}}$ вершины $\mathbf{v}$ будем называть величину

$$\det \mathrm{St}_{\mathbf{v}} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_d \leqslant k} |\det(\mathbf{r}_{i_1}, \ldots, \mathbf{r}_{i_d})|\,.$$

Ясно, что при $d = 2$, то есть когда парус одномерен, детерминанты ребер паруса равны их целочисленным длинам, а детерминанты реберных звезд вершин равны целочисленным углам между соответствующими ребрами.

В параграфе 3.2 мы доказываем следующую теорему, обобщающую на многомерный случай предложение 1:

Теорема 8. *Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ — произвольная иррациональная d–мерная решетка. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $N(\Lambda) > 0$.

(2) *Детерминанты гиперграней всех 2^d парусов, соответствующих решетке Λ, равномерно ограничены (то есть ограничены константой, не зависящей от грани).*

(3) *Детерминанты гиперграней и реберных звезд вершин паруса, соответствующего решетке Λ и положительному ортанту, равномерно ограничены (то есть ограничены константой, не зависящей ни от грани, ни от реберной звезды).*

В параграфе 3.3 обобщается на многомерный случай предложение 2. Для этого рассматривается множество $\mathfrak{A}_0$ таких аффинных операторов $\mathbf{A}$, что $\mathbf{A} : \mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x}) + \mathbf{a}$, $A \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$, $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d$, и A удовлетворяет следующим двум свойствам:

$(P1)$: Все собственные значения оператора A отличны от единицы.

$(P2)$: Если $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ — собственное значение оператора A, то все остальные собственные значения, кроме комплексно–сопряженного к α, отличны по модулю от α.

Затем определяется $\mathfrak{A}_0$–периодическая раскраска цепочек вершин паруса и доказывается

Теорема 9. *Пусть парус* Π *соответствует решетке* $\mathbb{Z}^d$ *и иррациональному конусу* $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$*. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

(1) *существует неединичный оператор* $A \in \mathfrak{A}_0$ *такой, что* $A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$*;*

(2) *существует неограниченная в обе стороны (как подмножество* $\mathbb{R}^d$*)* $\mathfrak{A}_0$*–периодическая цепочка* $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *вершин паруса* Π*.*

Кроме того, в параграфа 3.3 поясняется, что в случае $d = 3$ множество $\mathfrak{A}_0$ можно заменить на все $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$, что делает формулировку значительно более естественной. Это наблюдение весьма полезно: именно случай $d = 3$ является наиболее интересным, поскольку он соответствует случаю гипотезы Литтлвуда.

Гипотеза Литтлвуда. *Для любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *справедливо*

$$\inf_{m\in\mathbb{N}} m\|m\alpha\|\|m\beta\| = 0, \tag{41}$$

где $\|\cdot\|$ *означает расстояние до ближайшего целого.*

Нетрудно убедиться, что отрицание равенства (41) в точности совпадает с утверждением, что матрица–столбец

$$\Theta = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

является мультипликативно плохо приближаемой (см. определение 7).

Известно также[26], что гипотеза Литтлвуда следует из трехмерного варианта следующей гипотезы.

Гипотеза Оппенгейма. *Если* $d \geqslant 3$ *и* $\langle \mathbf{L}_1, \cdot\rangle, \dots, \langle \mathbf{L}_d, \cdot\rangle$ — d *линейно независимых линейных форм на* $\mathbb{R}^d$*, таких что*

$$\inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^d\backslash\{\mathbf{0}\}} |\langle \mathbf{L}_1, \mathbf{x}\rangle \cdot \ldots \cdot \langle \mathbf{L}_d, \mathbf{x}\rangle| > 0, \tag{42}$$

[26] J. W. S. Cassels, H. P. F. Swinnerton-Dyer *On the product of three homogeneous linear forms and indefinite ternary quadratic forms.* Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 248 (1955), 73–96

то решетка $\big\{(\langle \mathbf{L}_1, \mathbf{x}\rangle, \ldots, \langle \mathbf{L}_d, \mathbf{x}\rangle) \bigm| \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d\big\}$ *— алгебраическая (то есть, подобна по модулю действия диагональных матриц* $d \times d$ *решетке полного модуля чисто вещественного алгебраического расширения* $\mathbb{Q}$ *степени* d*).*

Заметим, что обращение гипотезы Оппенгейма является простым следствием теоремы Дирихле об алгебраических единицах[27,28].

В работах Скубенко[29,30] была предпринята попытка доказать гипотезу Оппенгейма, однако в доказательстве имеется весьма существенный пробел. По этой причине обе гипотезы остаются недоказанными.

В параграфе 3.4 при помощи теорем 8, 9 гипотеза Оппенгейма переформулируется в терминах свойств полиэдров Клейна. Наиболее просто соответствующая формулировка выглядит для $d = 3$. Определим граф $\mathcal{G}(\Pi)$ паруса Π: в качестве вершин возьмем множество пар $(F, \mathbf{v})$, где F — грань паруса и $\mathbf{v}$ — вершина F; две различные вершины $(F, \mathbf{v})$ и $(G, \mathbf{w})$ графа $\mathcal{G}(\Pi)$ соединяем ребром, если, во–первых, отрезок $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ является общим ребром граней F и G, и во–вторых, обход грани F от $\mathbf{v}$ к $\mathbf{w}$ является положительным (относительно внешней нормали к полиэдру Клейна). Очевидно, что граф $\mathcal{G}(\Pi)$ планарный и в любой его вершине сходятся ровно три ребра. Можно естественным образом определить аффинную раскраску графа $\mathcal{G}(\Pi)$. Применяя теоремы 8, 9, получаем следующее.

Переформулировка трехмерной гипотезы Оппенгейма. *Пусть* $\langle \mathbf{L}_1, \cdot\rangle$, $\langle \mathbf{L}_2, \cdot\rangle$, $\langle \mathbf{L}_3, \cdot\rangle$ *— линейно независимые иррациональные линейные формы на* $\mathbb{R}^3$ *и*

$$\mathcal{C} = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \bigm| \langle \mathbf{L}_i, \mathbf{x}\rangle \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3\big\}.$$

Пусть раскраска графа $\mathcal{G}(\Pi)$ *паруса* Π*, соответствующего решетке* $\mathbb{Z}^3$ *и конусу* $\mathcal{C}$*, имеет лишь конечное число цветов. Тогда существует неограниченная в обе стороны (в естественной метрике графа* $\mathcal{G}(\Pi)$*) периодически раскрашенная цепочка вершин графа* $\mathcal{G}(\Pi)$*.*

И наконец, в параграфе 3.5 доказывается, что в трехмерном случае множество относительных минимумов решетки совпадает с множеством вершин парусов решетки, объединенным с множеством специальных точек, лежащих внутри треугольных граней парусов.

---

[27] З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич *Теория чисел.* Москва, "Наука" (1964)

[28] H. Tsuchihashi *Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities.* Tohoku Math. Journal, **35** (1983), 607–639

[29] Б. Ф. Скубенко *Минимумы разложимой кубической формы от трех переменных.* Зап. науч. сем. ЛОМИ, **168** (1988)

[30] Б. Ф. Скубенко *Минимумы разложимых форм степени* n *от* n *переменных при* $n \geqslant 3$. Зап. науч. сем. ЛОМИ, **183** (1990)

Соискатель считает своим приятным долгом поблагодарить доктора физико–математических наук, профессора Н. Г. Мощевитина за постоянный интерес и внимание к работе, а также чл.–корр. РАН, профессора Ю. В. Нестеренко за неоднократную помощь и поддержку.

РАБОТЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1 О. Н. Герман *Паруса и базисы Гильберта.* Труды МИРАН, **239** (2002) 98–105.

2 О. Н. Герман, *Асимптотические направления для наилучших приближений n-мерной линнейной формы.* Мат. заметки, **75**:1 (2004), 55–70.

3 О. Н. Герман *Паруса и норменные минимумы решеток.* Мат. Сборник, **196**:3 (2005), 31–60.

4 О. Н. Герман *Полиэдры Клейна и норменные минимумы решеток.* ДАН, Серия матем., **406**:3 (2006), 38–41.

5 О. Н. Герман *Полиэдры Клейна и относительные минимумы решеток*, Мат. заметки **79**:4 (2006) 546–552.

6 O. N. German *Klein polyhedra and lattices with positive norm minima*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, **19** (2007), 157–190.

7 О. Н. Герман, Е. Л. Лакштанов *О многомерном обобщении теоремы Лагранжа для цепных дробей*, Известия РАН. Сер. матем., **72**:1 (2008), 51–66.

8 O. N. German, N. G. Moshchevitin *Linear forms of a given Diophantine type*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, **22** (2010), 383–396.

9 O. N. German *Transference inequalities for multiplicative Diophantine exponents*, Труды МИРАН, **275** (2011), 216–228.

10 O. N. German *On Diophantine exponents and Khintchine's transference principle.* Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory, **2**:2 (2012), 22–51.

11 O. N. German *Intermediate Diophantine exponents and parametric geometry of numbers.* Acta Arithmetica, **154** (2012), 79–101.

12 O. N. German, N. G. Moshchevitin *A simple proof of Schmidt-Summerer's inequality.* Monat. Math., **170** (2013), 361–370.