Механико-математический факультет
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
кафедра теории чисел

На правах рукописи
УДК 511.4

Герман Олег Николаевич

ГЕОМЕТРИЯ МНОГОМЕРНЫХ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

01.01.06 — математическая логика, алгебра, теория чисел

Диссертация

на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Москва 2013

Содержание

Введение.

Диссертация подготовлена на кафедре теории чисел Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова и является исследованием в области диофантовых приближений.

0.1 Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Теория диофантовых приближений изучает вопросы, связанные с приближением вещественных чисел рациональными. Так, если задана функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, то говорят, что число $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ является f–приближаемым, если существует бесконечно много рациональных чисел p/q, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \leqslant f(q).$$

Соответственно, диофантовой экспонентой $\beta(\theta)$ числа θ называется точная верхняя грань множества чисел γ, таких что θ является $q^{-1-\gamma}$–приближаемым. Из принципа Дирихле легко вывести, что любое иррациональное число является q^{-2}–приближаемым. Если же существует такое $c > 0$, что θ не является cq^{-2}–приближаемым, то говорят, что θ плохо приближаемо. Хорошо известно, что иррациональное число является плохо приближаемым тогда и только тогда, когда его разложение в цепную дробь имеет ограниченные неполные частные.

Данная работа посвящена многомерным обобщениям приведенных выше понятий — диофантовых экспонент, плохо приближаемости, цепных дробей. Можно выделить два классических направления подобных обобщений: в первом в качестве инструмента измерения отклонения используется sup–норма (или ей эквивалентные), а во втором — произведение координат. Так возникают понятия регулярных и равномерных диофантовых экспонент матриц, их мультипликативные аналоги, понятия плохо приближаемых матриц и решеток с положительным норменным минимумом. Важную роль в этой науке играют так называемые теоремы переноса — утверждения, связывающие аппроксимационные свойства матрицы Θ и транспонированной матрицы $\Theta^\intercal$.

Первые многомерные определения интересующих нас объектов были, по–видимому, даны Г. Минковским, Г. Ф. Вороным и Ф. Клейном. Ими же были заложены основания геометрии чисел, методы которой и позволили получить большинство из существующих на данный момент результатов теории многомерных линейных диофантовых приближений. Первые результаты о диофантовых экспонентах были получены в 20-х годах прошлого века А. Я. Хинчиным и В. Ярником. Эти результаты впоследствии улучшались и обобщались К. Малером, Ф. Дайсоном, А. Апфельбеком, а в последние годы — М. Лораном, Я. Бюжо, Д. Руа, Н. Г. Мощевитиным, а также классиком теории диофантовых приближений В. М. Шмидтом. Однако большинство многомерных результатов до сих пор были неточны, для некоторых диофантовых экспонент не было известно неравенств переноса, не было даже доказано такое простое и естественное утверждение, что матрица Θ мультипликативно плохо приближаема тогда и только тогда, когда мультипликативно плохо приближаема $\Theta^\intercal$. А ведь последний вопрос, несомненно, важен, поскольку гипотеза Литтлвуда в точности утверждает, что не существует мультипликативно плохо приближаемых двумерных векторов. В связи с гипотезой Литтлвуда также естественным образом возникают решетки с положительным норменным минимумом, поскольку эта гипотеза следует из трехмерной гипотезы Оппенгейма о произведении линейных форм, которая утверждает, что положительными норменными минимумами обладают только алгебраические решетки. Как оказалось, для изучения решеток с положительными норменными минимумами весьма полезны так называемые полиэдры Клейна — одно из наиболее естественных многомерных обобщений понятия цепной дроби. Положительность норменного минимума решетки обобщает на многомерный случай свойство числа быть плохо приближаемым. А как было сказано выше, иррациональное число плохо приближаемо тогда и только тогда, когда его неполные частные ограничены. Соответственно, естественно ожидать, что свойство решетки иметь положительный норменный минимум должно быть связано с каким-нибудь свойством многомерной цепной дроби. Кроме того, в 80-х годах прошлого века В. И. Арнольд предложил использовать полиэдры Клейна для исследования алгебраических решеток и выдвинул ряд гипотез об этой конструкции, в том числе вопрос о многомерном обобщении теоремы Лагранжа для цепных дробей. Так возникает вопрос о переформулировке гипотезы Оппенгейма для линейных форм в терминах свойств полиэдров Клейна, то есть о том, как связать посредством этих свойств алгебраичность решетки и положительность ее норменного минимума.

В настоящей диссертации сделан вклад в развитие теории диофантовых экспонент, теории плохо приближаемых матриц, теории решеток с положительным норменным минимумом и теории многомерных цепных дробей дающий, в частности, ответы на некоторые из указанных выше вопросов.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. На данный момент они являются лучшими из существующих в данной области. Кроме того, для их обоснования был разработан ряд новых методов. Так, новым является метод работы с двойственными рациональными подпространствами, позволяющий учитывать "равномерный" аспект диофантовых приближений. Новым также является метод, привлекающий одновременно полилинейную алгебру и параметрическую геометрию чисел для исследования промежуточных диофантовых экспонент. Новой является конструкция, обобщающая на многомерный случай понятие неполного частного. Также впервые используется принцип "двойного" переноса.

Методы исследования. В работе используются методы геометрии чисел, выпуклого анализа, линейной алгебры, теории двойственных многогранников, теории алгебраических решеток, а также методы полилинейной алгебры.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, и разработанные в ней методы могут быть применены в задачах, возникающих в контексте классической гипотезы Литтлвуда, гипотезы Оппенгейма о произведении линейных форм, гипотезы Вирзинга о приближении вещественных чисел алгебраическими, а также в ряде других задач теории диофантовых приближений, связанных с диофантовыми экспонентами и многомерными обобщениями цепных дробей. Кроме того, полученные результаты могут весьма эффективно использоваться в учебном процессе — в рамках специальных курсов и специальных семинаров.

0.2 Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Усилена классическая теорема переноса Малера (теорема 2.8 из параграфа 2.1)

2. Доказана теорема переноса для равномерных диофантовых экспонент, усиливающая теоремы Ярника и Апфельбека (теорема 2.1 из параграфа 2.1)

3. Доказана теорема переноса для регулярных и равномерных диофантовых экспонент, усиливающая теоремы Хинчина и Дайсона, а также обобщающая теоремы Лорана и Бюжо (теорема 2.4 из параграфа 2.1)

4. Получены новые неравенства для промежуточных диофантовых экспонент, усиливающие неравенства Ярника, Хинчина и Дайсона (теоремы 2.11, 2.12, 2.13 из параграфа 2.2)

5. Доказана теорема о существовании линейных форм заданного диофантового типа (теорема 2.19 из параграфа 2.4)

6. Доказана теорема переноса для мультипликативных диофантовых приближений (теорема 3.1 из параграфа 3.1)

7. Получен ряд неравенств переноса для мультипликативных диофантовых экспонент, усиливающих результаты Шмидта и Вонга (следствия 20, 21, 22 из теоремы 3.1 из параграфа 3.1)

8. Доказано, что матрица Θ мультипликативно плохо приближаема тогда и только тогда, когда мультипликативно плохо приближаема $\Theta^\intercal$ (следствие 19 теоремы 3.1 из параграфа 3.1)

9. Получен многомерный аналог известного утверждения, что иррациональное число плохо приближаемо тогда и только тогда, когда его неполные частные ограничены (теорема 3.3 из параграфа 3.2)

10. Получен многомерный аналог теоремы Лагранжа о цепных дробях (теоремы 3.5, 3.8, 3.9 из параграфа 3.3)

11. Получена переформулировка гипотезы Оппенгейма для линейных форм в терминах геометрических свойств полиэдров Клейна (параграф 3.4)

12. Получено описание относительных минимумов трехмерной решетки как точек, лежащих на границе полиэдра Клейна этой решетки (теоремы 3.12, 3.13 из параграфа 3.5)

Личный вклад соискателя. Все указанные выше результаты получены соискателем самостоятельно.

Апробация работы. Результаты настоящей диссертации неоднократно докладывались автором на многочисленных международных конференциях и семинарах.

Перечислим конференции:

- V международная конференция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" (Тула, май 2003)

- Международная конференция “23^{rd} Journée Arithmétiques Graz 2003” (Graz, Австрия, июль 2003)
- Международная конференция “Diophantine analysis, uniform distributions and applications” (Минск, Беларусь, август 2003)
- Международная конференция “Analytic methods in Number Theory, Probability and Statistics” (Санкт-Петербург, апрель 2005)
- Международная конференция “24^{th} Journée Arithmétiques Marseilles 2005” (Marseilles, Франция, июль 2005)
- Международная конференция “Analytical and Combinatorial Methods in Number Theory and Geometry” (Москва, май 2006)
- Международный математический конгресс 2006 (Madrid, Испания, август 2006)
- V международная летняя школа “Algebra, Topology, Analysis and Applications” (Львов, Украина, август 2007)
- Международная конференция “Fete of Combinatorics and Computer Science” (Keszthely, Венгрия, август 2008)
- XXXIV Дальневосточная математическая школа “Фундаментальные проблемы математики и информационных наук” (Хабаровск, июнь 2009)
- Международная конференция “26^{th} Journée Arithmétiques Saint-Etienne 2009” (Saint-Etienne, Франция, июль 2009)
- Международная конференция “Geometry, Topology, Algebra and Number Theory, Applications” (Москва, август 2010)
- Международный математический конгресс 2010 (Hyderabad, Индия, август 2010)
- Международная конференция “Diophantine Approximation and Transcendence” (Luminy, Франция, сентябрь 2010)
- Международная конференция “Number Theory and Its Applications” (Debrecen, Венгрия, октябрь 2010)
- Международная конференция “27^{th} Journée Arithmétiques Vilnius 2011” (Вильнюс, Литва, июль 2011)
- Международная конференция “Diophantine Approximation. Current State of Art and Applications” (Минск, Беларусь, июль 2011)
- Международная конференция “Diophantische Approximationen” (Oberwolfach, Германия, апрель 2012)

- Международная конференция “Diophantine Analysis” (Астрахань, июль 2012)
- Ломоносовские чтения в МГУ имени М. В. Ломоносова (2002–2012).

Перечислим теперь семинары:

- Московский семинар по теории чисел под руководством чл.–корр. РАН Ю. В. Нестеренко и д.ф.–м.н. Н. Г. Мощевитина
- Заседание Московского математического общества
- Заседание Санкт-Петербургского математического общества
- Минский городской семинар по теории чисел под руководством д.ф.–м.н. В. И. Берника
- Семинар “Современные проблемы теории чисел” (МИАН) под руководством д.ф.–м.н. С. В. Конягина и д.ф.–м.н. И. Д. Шкредова
- Семинар “Арифметика и геометрия” (МГУ) под руководством д.ф.–м.н. Н. Г. Мощевитина, д.ф.–м.н. А. М. Райгородского
- Семинар “Дискретная геометрия и геометрия чисел” (МГУ) под руководством д.ф.–м.н. Н. П. Долбилина и д.ф.–м.н. Н. Г. Мощевитина
- Общефакультетский семинар математического факультета Университета г. Йорк, Великобритания
- Общефакультетский семинар математического факультета Университета г. Чандигар, Индия
- Общефакультетский семинар математического факультета Университета г. Авейро, Португалия
- Общефакультетский семинар математического факультета Университета г. Билефельд, Германия

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [G1]–[G12] списка использованных источников. Всего по теме диссертации соискателем опубликовано 12 работ.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 150 страницах и состоит из введения, общей характеристики работы, трех глав и списка использованных источников, включающего 75 наименований.

Благодарности. Соискатель считает своим приятным долгом поблагодарить доктора физико–математических наук, профессора Н. Г. Мощевитина за постоянный интерес и внимание к работе, а также чл.–корр. РАН, профессора Ю. В. Нестеренко за неоднократную помощь и поддержку.

Глава 1

Обзор предшествующих результатов

1.1 “Выпуклый” подход

1.1.1 Диофантовы экспоненты

Пусть задана матрица

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n1} & \cdots & \theta_{nm} \end{pmatrix}, \qquad \theta_{ij} \in \mathbb{R}, \quad n+m \geqslant 3,$$

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\Theta\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{1.1}$$

с переменными $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Будем обозначать через $\Theta^\intercal$ транспонированную матрицу. Рассмотрим “транспонированную” систему

$$\Theta^\intercal\mathbf{y} = \mathbf{x}, \tag{1.2}$$

где, как и прежде, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Целочисленные приближения к решениям систем (1.1) и (1.2) тесно связаны, что имеет отражение в разнообразных *теоремах переноса*. В большинстве из них речь идет о соответствующих асимптотиках в терминах *диофантовых экспонент*.

Определение 1.1. Супремум вещественных чисел γ, для которых существует сколь угодно большое t, такое что (соотв. для которых при любом достаточно большом t) система неравенств

$$|\mathbf{x}| \leqslant t, \qquad |\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leqslant t^{-\gamma} \tag{1.3}$$

имеет ненулевое решение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n$, называется *регулярной* (соотв. *равномерной*) *диофантовой экспонентой* матрицы Θ и обозначается $\beta(\Theta)$ (соотв. $\alpha(\Theta)$).

Предлагаемый обзор имеет своей целью ознакомление читателя только с самыми основными достижениями последних десятилетий, имеющими непосредственное отношение к полученным в диссертации результатам, и никоим образом не претендует на полноту описания. Более подробно история теории диофантовых экспонент изложена в замечательных недавних обзорах Вальдшмидта [Wal] и Мощевитина [Mos2].

Регулярные экспоненты. Для $n=1$ имеет место классическая теорема переноса Хинчина (см. [Kh1]):

Теорема 1.1. (Хинчин) *Если $n=1$, то*

$$\frac{\beta(\Theta)}{(m-1)\beta(\Theta)+m} \leqslant \beta(\Theta^\intercal) \leqslant \frac{\beta(\Theta)-m+1}{m}. \tag{1.4}$$

Эти неравенства неулучшаемы (см. [J2] и [J3]), если ограничиваться рассмотрением величин $\beta(\Theta)$ и $\beta(\Theta^\intercal)$. Но если привлечь $\alpha(\Theta)$ и $\alpha(\Theta^\intercal)$, можно доказать нечто более сильное. Соответствующий результат для $n=1$ принадлежит Лорану и Бюжо (см. [Lr2], [BL]). Они доказали следующее.

Теорема 1.2. (Лоран, Бюжо) *Если $n=1$, $m \geqslant 2$, а компоненты Θ линейно независимы вместе с единицей над $\mathbb{Q}$, то*

$$\begin{aligned} \beta(\Theta^\intercal) &\geqslant \frac{(\alpha(\Theta)-1)\beta(\Theta)}{((m-2)\alpha(\Theta)+1)\beta(\Theta)+(m-1)\alpha(\Theta)}, \\ \beta(\Theta^\intercal) &\leqslant \frac{(1-\alpha(\Theta^\intercal))\beta(\Theta)-m+2-\alpha(\Theta^\intercal)}{m-1}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Легко убедиться при помощи неравенств $\alpha(\Theta) \geqslant m$ и $\alpha(\Theta^\intercal) \geqslant 1/m$, справедливых в случае $n=1$, что теорема 1.2 уточняет теорему 1.1.

Теорема 1.1 была обобщена на случай произвольных n, m Дайсоном [Dy] (более простое доказательство было впоследствии получено Хинчиным [Kh2]):

Теорема 1.3. (Дайсон) *Для всех натуральных n, m, не равных одновременно 1, справедливо неравенство*

$$\beta(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{n\beta(\Theta)+n-1}{(m-1)\beta(\Theta)+m}. \tag{1.6}$$

В параграфе 2.1 мы докажем теорему, обобщающую теорему 1.2 и уточняющую теорему 1.3.

Равномерные экспоненты. При $n = m = 1$ величины $\alpha(\Theta)$ и $\alpha(\Theta^{\intercal})$, очевидно, совпадают (и на самом деле равны 1, см. [J4]). В случае $n = 1$, $m = 2$ они также однозначно определяют одна другую. Ярник [J4] доказал следующее замечательное утверждение.

Теорема 1.4. (Ярник) *Если $n = 1$, $m = 2$, а элементы Θ линейно независимы вместе с единицей над $\mathbb{Q}$, то*

$$\alpha(\Theta)^{-1} + \alpha(\Theta^{\intercal}) = 1. \tag{1.7}$$

Ярник [J4] заметил, что при $n = 1$, $m > 2$, $\alpha(\Theta)$ и $\alpha(\Theta^{\intercal})$ более не связаны никаким равенством, по крайней мере, он показал, что в краевом случае $\alpha(\Theta) = \infty$ величина $\alpha(\Theta^{\intercal})$ может равняться любому числу из интервала $[(m-1)^{-1}, 1]$. Однако, он доказал, что при $n = 1$ экспоненты $\alpha(\Theta)$ и $\alpha(\Theta^{\intercal})$ удовлетворяют некоторым неравенствам.

Теорема 1.5. (Ярник) *Если $m \geqslant 3$, а элементы Θ линейно независимы вместе с единицей над $\mathbb{Q}$, то справедливы следующие утверждения:*
(i)

$$\frac{\alpha(\Theta)}{(m-1)\alpha(\Theta)+m} \leqslant \alpha(\Theta^{\intercal}) \leqslant \frac{\alpha(\Theta)-m+1}{m}\,; \tag{1.8}$$

(ii) если $\alpha(\Theta) > m(2m-3)$, то

$$\alpha(\Theta^{\intercal}) \geqslant \frac{1}{m-1}\left(1 - \frac{1}{\alpha(\Theta)-2m+4}\right);$$

(iii) если $\alpha(\Theta) > (m-1)/m$, то

$$\alpha(\Theta^{\intercal}) \geqslant m-2+\frac{1}{1-\alpha(\Theta)}\,.$$

Теорема 1.5 была впоследствии обобщена Апфельбеком [Ap] на случай произвольных n, m.

Теорема 1.6. (Апфельбек) *(i) Всегда справедливы неравенства*

$$\alpha(\Theta^{\intercal}) \geqslant \frac{n\alpha(\Theta)+n-1}{(m-1)\alpha(\Theta)+m}\,. \tag{1.9}$$

(ii) Если $m > 1$ и $\alpha(\Theta) > (2(m+n-1)(m+n-3)+m)/n$, то

$$\alpha(\Theta^{\intercal}) \geqslant \frac{1}{m}\left(n + \frac{n(n\alpha(\Theta)-m)-2n(m+n-3)}{(m-1)(n\alpha(\Theta)-m)+m-(m-2)(m+n-3)}\right).$$

Отметим, что неравенства (1.8) и (1.9) выглядят в точности, как соответствующие неравенства для $\beta(\Theta)$ и $\beta(\Theta^\intercal)$ (см. теоремы 1.1 и 1.3 ниже). Причина в том, что они доказываются при помощи одних и тех же приемов, практически не учитывающих “равномерной” природы $\alpha(\Theta)$.

В параграфе 2.1 мы улучшим теоремы 1.5 и 1.6.

1.1.2 Теорема Малера

В основе многих теорем, связывающих систему (1.1) с транспонированной, лежат утверждения локального характера, наиболее сильным из которых является теорема Малера (см. [Ma1], [Ma2], [C]):

Теорема 1.7. (Малер) *Если* $0 < U < 1 < X$ *и для* $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$ *справедливы неравенства*

$$0 < |\mathbf{x}|_\infty \leqslant X, \qquad |\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}|_\infty \leqslant U, \tag{1.10}$$

то существуют такие $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, *что*

$$0 < |\mathbf{y}|_\infty \leqslant Y, \qquad |\Theta^\intercal\mathbf{y} - \mathbf{x}|_\infty \leqslant V, \tag{1.11}$$

где

$$Y = (d-1)\big(X^m U^{1-m}\big)^{\frac{1}{d-1}}, \quad V = (d-1)\big(X^{1-n} U^n\big)^{\frac{1}{d-1}}, \qquad \text{и} \qquad d = n + m. \tag{1.12}$$

Отметим, что если определить числа β_1 и β_2 равенствами $U = X^{-\beta_1}$, $V = Y^{-\beta_2}$, то из (1.12) мы получим, что

$$\beta_2 = \frac{n\beta_1 + (n-1) - \varkappa}{(m-1)\beta_1 + m + \varkappa}, \qquad \text{где } \varkappa = \frac{(d-1)\ln(d-1)}{\ln X},$$

откуда очевидным образом следует теорема 1.3.

В параграфе 2.1 мы усиливаем теорему 1.7. А именно, мы заменяем коэффициент $d-1$ меньшей величиной, которая стремится к единице при $d \to \infty$ (см. теорему 2.8 ниже). Разумеется, данное улучшение никак не сказывается на диофантовых экспонентах.

1.1.3 Промежуточные экспоненты

Классический подход, изучающий, насколько хорошо пространство решений системы (1.1) приближается целыми точками, дает экспоненты $\alpha(\Theta)$ и $\beta(\Theta)$. Естественно, возникали попытки обобщить данное понятие на случай задачи приближения пространства решений системы (1.1) рациональными подпространствами $\mathbb{R}^{m+n}$ размерности p. Большую работу в этом направлении проделал Шмидт в работе [Sch1]. Самым простым способом обобщить определение 1.1 представляется следующий.

Определение 1.2. Супремум вещественных чисел γ, для которых существует сколь угодно большое t, такое что (соотв. для которых при любом достаточно большом t) система неравенств

$$|\mathbf{x}|_\infty \leqslant t, \qquad |\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}|_\infty \leqslant t^{-\gamma} \tag{1.13}$$

имеет p решений $\mathbf{z}_i = (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \ldots, p$, линейно независимых над $\mathbb{Z}$, называется *p-й регулярной (соотв. равномерной) диофантовой экспонентой первого типа* матрицы Θ и обозначается $\beta_p(\Theta)$ (соотв. $\alpha_p(\Theta)$).

Лораном и Бюжо в работах [Lr1], [BL] было дано отличное от этого определение для случая $m = 1$.

Определение 1.3. Пусть $m = 1$. Супремум вещественных чисел γ, для которых существует сколь угодно большое t, такое что (соотв. для которых при любом достаточно большом t) система неравенств

$$|\mathbf{Z}|_\infty \leqslant t, \qquad |\Theta \wedge \mathbf{Z}|_\infty \leqslant t^{-\gamma} \tag{1.14}$$

имеет ненулевое решение в $\mathbf{Z} \in \wedge^p(\mathbb{Z}^d)$, называется *$p$-й регулярной (соотв. равномерной) диофантовой экспонентой второго типа* матрицы Θ и обозначается $\mathfrak{b}_p(\Theta)$ (соотв. $\mathfrak{a}_p(\Theta)$).

Здесь $d = m + n$, $\mathbf{Z} \in \wedge^p(\mathbb{R}^d)$, $\Theta \wedge \mathbf{Z} \in \wedge^{p+1}(\mathbb{R}^d)$, а пространство $\wedge^q(\mathbb{R}^d)$ при каждом q мы рассматриваем как $\binom{d}{q}$- мерное евклидово пространство с ортонормальным базисом, состоящим из мультивекторов

$$\mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_q}, \qquad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_q \leqslant d,$$

где $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ — столбцы единичной матрицы $d \times d$, и обозначаем через $|\cdot|_\infty$ sup-норму относительно этого базиса.

Лоран обозначал экспоненты $\mathfrak{b}_p(\Theta)$, $\mathfrak{a}_p(\Theta)$ как ω_{p-1}, $\hat{\omega}_{p-1}$, соответственно. Он показал, что при $p = 1$ они совпадают с $\beta(\Theta)$, $\alpha(\Theta)$. Он также сделал замечательное наблюдение о том, что в определении 1.3 не нужно налагать на $\mathbf{Z}$ требование разложимости, что существенно упрощает работу в $\wedge^p(\mathbb{R}^d)$.

При помощи предложенного ими определения Бюжо и Лоран разбили классический принцип переноса Хинчина (см. теорему 1.1) на несколько последовательных неравенств для промежуточных экспонент. А именно, они доказали, что при $m=1$ справедливы равенства $\mathfrak{b}_1(\Theta^\intercal)=\mathfrak{b}_n(\Theta)$ и неравенства

$$\mathfrak{b}_{p+1}(\Theta)\geqslant\frac{(n-p+1)\mathfrak{b}_p(\Theta)+1}{n-p}\,,\qquad \mathfrak{b}_p(\Theta)\geqslant\frac{p\mathfrak{b}_{p+1}(\Theta)}{\mathfrak{b}_{p+1}(\Theta)+p+1}\tag{1.15}$$

для $p=1,\ldots,n-1$. Кроме того, они доказали, что если при $m=1$ система (1.1) не имеет ненулевых целочисленных решений, то $\mathfrak{a}_1(\Theta^\intercal)=\mathfrak{a}_n(\Theta)$ и

$$\mathfrak{b}_2(\Theta)\geqslant\frac{\mathfrak{b}_1(\Theta)+\mathfrak{a}_1(\Theta)}{1-\mathfrak{a}_1(\Theta)}\,,\qquad \mathfrak{b}_{n-1}(\Theta)\geqslant\frac{1-\mathfrak{a}_n^{-1}}{\mathfrak{b}_n(\Theta)^{-1}+\mathfrak{a}_n(\Theta)^{-1}}\,,\tag{1.16}$$

что в комбинации с неравенствами (1.15) позволило им доказать теорему 1.2.

В параграфе 2.2 мы обобщим определение 1.3 на случай произвольных n, m, а также неравенства (1.15) и их аналог для равномерных экспонент, чем, в частности, разобьем теорему Дайсона 1.3 и теоремы 2.1, 2.4, представив их в виде цепочек неравенств для промежуточных диофантовых экспонент.

1.1.4 Параметрическая геометрия чисел

Пусть Λ — d-мерная решетка в $\mathbb{R}^d$ с определителем 1. Обозначим через $\mathcal{B}_\infty^d$ единичный шар в sup-норме, то есть куб с вершинами в точках $(\pm1,\ldots,\pm1)$. Для каждого d-набора $\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\ldots,\tau_d)\in\mathbb{R}^d$ обозначим через $D_{\boldsymbol{\tau}}$ диагональную матрицу $d\times d$ с диагональными элементами $e^{\tau_1},\ldots,e^{\tau_d}$. Будем также использовать обозначение $\lambda_p(M)$ для p-го последовательного минимума компактного симметричного выпуклого тела $M\subset\mathbb{R}^d$ (с центром в точке начала координат) относительно решетки Λ.

Пусть в $\mathbb{R}^d$ задан путь $\mathfrak{T}:s\to\boldsymbol{\tau}(s)$, $s\in\mathbb{R}_+$, такой что

$$\tau_1(s)+\ldots+\tau_d(s)=0,\qquad\text{для всех } s.\tag{1.17}$$

В наших приложениях к диофантовым приближениям нам будет достаточно путей, являющихся лучами с конечной точкой в начале координат и таких, что функции $\tau_1(s),\ldots,\tau_d(s)$ линейны.

Положим $\mathcal{B}(s)=D_{\boldsymbol{\tau}(s)}\mathcal{B}_\infty^d$. Для каждого $p=1,\ldots,d$ рассмотрим функции

$$\psi_p(\Lambda,\mathfrak{T},s)=\frac{\ln(\lambda_p(\mathcal{B}(s)))}{s}\,,\qquad \Psi_p(\Lambda,\mathfrak{T},s)=\sum_{i=1}^{p}\psi_i(\Lambda,\mathfrak{T},s).$$

Определение 1.4. Будем называть величины

$$\underline{\psi}_p(\Lambda,\mathfrak{T})=\liminf_{s\to+\infty}\psi_p(\Lambda,\mathfrak{T},s),\qquad \overline{\psi}_p(\Lambda,\mathfrak{T})=\limsup_{s\to+\infty}\psi_p(\Lambda,\mathfrak{T},s)$$

p-й нижней и *верхней экспонентами Шмидта–Зуммерера первого типа*, соответственно.

Определение 1.5. Будем называть величины

$$\underline{\Psi}_p(\Lambda,\mathfrak{T})=\liminf_{s\to+\infty}\Psi_p(\Lambda,\mathfrak{T},s)\,,\qquad \overline{\Psi}_p(\Lambda,\mathfrak{T})=\limsup_{s\to+\infty}\Psi_p(\Lambda,\mathfrak{T},s)$$

p-й нижней и *верхней экспонентами Шмидта–Зуммерера второго типа*, соответственно.

Часто, когда из контекста ясно, что из себя представляют решетка и путь, мы будем просто писать $\psi_p(s)$, $\Psi_p(s)$, $\underline{\psi}_p$, $\overline{\psi}_p$, $\underline{\Psi}_p$ и $\overline{\Psi}_p$.

При подходящем выборе Λ и $\mathfrak{T}$ эти экспоненты оказываются тесно связанными с классической задачей совместных диофантовых приближений. Шмидт и Зуммерер [SchS1, SchS2] изучали связь между верхними и нижними экспонентами именно для такого выбора решетки и пути. А именно, в качестве Λ и $\mathfrak{T}$ нужно взять Λ_Θ и $\mathfrak{T}_\Theta$, определяемы следующим образом. Положим

$$T_\Theta=\begin{pmatrix} E_m & 0\\ \Theta & E_n\end{pmatrix},\qquad \Lambda_\Theta=T_\Theta^{-1}\mathbb{Z}^d, \tag{1.18}$$

где E_m и E_n — соответствующие единичные матрицы. и определим путь $\mathfrak{T}_\Theta : s\mapsto \boldsymbol{\tau}(s)$ соотношениями

$$\tau_1(s)=\ldots=\tau_m(s)=s,\quad \tau_{m+1}(s)=\ldots=\tau_d(s)=-ms/n. \tag{1.19}$$

В параграфе 2.2 мы покажем, что экспоненты Шмидта–Зуммерера, соответствующие Λ_Θ и $\mathfrak{T}_\Theta$, и промежуточные диофантовы экспоненты матрицы Θ описывают одно и то же явление с двух разных точек зрения и воспользуемся этим подходом для доказательства основных результатов параграфа.

Шмидт и Зуммерер доказали в работе [SchS2] следующую теорему.

Теорема 1.8. *Пусть $\Lambda=\Lambda_\Theta$, $\mathfrak{T}=\mathfrak{T}_\Theta$, где Λ_Θ, $\mathfrak{T}_\Theta$ определены соотношениями* (1.18) *и* (1.19). *Тогда при $m=1$ и любом $p\in\mathbb{Z}$, $1\leqslant p\leqslant d$, справедливы неравенства*

$$(1+\underline{\psi}_p)(1/n-\overline{\psi}_p)\leqslant(1+\underline{\psi}_1)(1/n-\underline{\psi}_p) \tag{1.20}$$

и

$$(1+\overline{\psi}_d)(1/n-\overline{\psi}_p)\leqslant(1+\overline{\psi}_p)(1/n-\underline{\psi}_p), \tag{1.21}$$

при условии, что $1,\theta_1,\ldots,\theta_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, где $\theta_1,\ldots,\theta_n$ — элементы матрицы Θ.

Этот результат позволил им улучшить знаменитое неравенство Ярника для регулярных и равномерных диофантовых экспонент (см. [J5]). Однако предложенное ими доказательство является весьма тяжелым. Оно использует теорию присоединенных тел Малера, а также включает в себя сложный и громоздкий анализ специальных кусочно-линейных функций.

В параграфе 2.3 мы предлагаем в качестве приложения метода, разработанного в параграфах 2.1, 2.2, короткое доказательство основного результата работы [SchS2]. Оно основывается на простом геометрическом наблюдении (лемма 2.13) и не требует привлечения теории присоединенных тел Малера.

1.1.5 Произвольные функции

Если ограничиваться только показательными функциями при изучении асимптотического поведения какой-нибудь величины, то от нашего внимания ускользает промежуточный рост.

Пусть $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — произвольная функция. По аналогии с определением 1.1, дадим следующие определения.

Определение 1.6. Будем называть матрицу Θ *регулярно ψ-аппроксимируемой* (или просто *ψ-аппроксимируемой*), если существует бесконечно много $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, таких что

$$|\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}|_\infty \leqslant \psi(|\mathbf{x}|_\infty).$$

Определение 1.7. Будем называть матрицу Θ *равномерно ψ-аппроксимируемой*, если для каждого достаточно большого t существуют такие $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, что

$$0 < |\mathbf{x}|_\infty \leqslant t, \qquad |\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}|_\infty \leqslant \psi(t).$$

Ясно, что $\beta(\Theta)$ (соотв. $\alpha(\Theta)$) равняется супремуму вещественных чисел γ, таких что Θ регулярно (соотв. равномерно) $t^{-\gamma}$-аппроксимируема.

Теорема 1.7, а также ее усиленная версия 2.8 позволяют доказывать теоремы переноса, улавливающие промежуточный рост. Так, например, основные результаты об экспонентах, доказываемые в параграфе 2.1, получаются как следствия более точных теорем для произвольных функций.

Существует также целый класс задач существования. Ярник рассматривал произвольную невозрастающую функцию $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и произвольную функцию $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющие следующим условиям:

i) $\lambda(x) \to 0 \quad$ при $\quad x \to \infty$;

ii) функции $\psi(x) \cdot x^{1/k}$, $\ k = 1, \ldots, m$, $\ \psi(x) \cdot x^{1+\varepsilon}$ и $\psi(x) \cdot x^{(n-1)/m}$ монотонны;

iii) интеграл $\int_A^{\infty} x^{n-1}(\psi(x))^m dx$ сходится.

Для таких $\psi(x)$ и $\lambda(x)$ Ярник [J6] доказал существование несчетного набора матриц Θ, каждая из которых ψ-аппроксимируема, но не $\lambda\psi$-аппроксимируема. Отметим, что сначала в работе [J1] Ярник доказал аналогичное утверждение в частном случае $n = 1$.

Еще один результат Ярника (см. [J6], Théorème B) представляет из себя более точное утверждение при более сильных ограничениях на функцию $\psi(x)$. А именно, для произвольной функции $\psi(x)$, такой что

i) $\psi(x) \cdot x \to 0 \quad$ при $\quad x \to \infty$;

ii) функции $\psi(x) \cdot x$ и $\psi(x) \cdot x^{(n-1)/m}$ монотонны;

iii) интеграл $\int_A^{\infty} x^{n-1}(\psi(x))^m dx$ сходится;

он доказал доказал существование несчетного набора матриц Θ, каждая из которых ψ-аппроксимируема, но не $(1-\varepsilon)\psi$-аппроксимируема, при любом положительном ε.

Итак, мы видим, что дополнительное условия

$$\psi(x) = o(x^{-1}) \quad \text{при} \quad x \to \infty$$

позволяет доказывать более сильные утверждения о системах линейных форм заданного диофантового типа.

Отметим, что Бересневич, Дикинсон, Велани [BDV] в общей постановке задачи о диофантовых приближениях для систем линейных форм они получили ряд результатов о "точном логарифмическом" порядке приближений.

В параграфе 2.4 мы обсуждаем уточнения результата Ярника для случаев $n = 1$, $m \geqslant 2$ (совместные приближения) и $m = 1$, $n \geqslant 2$ (приближение нуля значениями линейной формы), а также доказываем теорему существования линейной формы заданного диофантового типа для случая $m = 1$, $n = 2$. Стоит отметить, что существует старая нерешенная проблема обобщения утверждения о существовании луча Холла (см. [CF]) на случай совместных приближений и на случай приближения нуля значениями линейной формы, и далее — на общий случай. Эта задача представляется достаточно сложной.

1.2 “Мультипликативный” подход

1.2.1 Гипотеза Литтлвуда

Наиболее известной гипотезой в мультипликативной теории диофантовых приближений, пожалуй, является

Гипотеза Литтлвуда. *Для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ справедливо*

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} m \|m\alpha\| \|m\beta\| = 0, \tag{1.22}$$

где $\|\cdot\|$ означает расстояние до ближайшего целого.

Нетрудно убедиться, что отрицание равенства (1.22) в точности совпадает с утверждением, что матрица–столбец

$$\Theta = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

является мультипликативно плохо приближаемой (см. определение 1.10 ниже). Изучение этого явления естественным образом порождает мультипликативный аналог понятия диофантовой экспоненты. Подробнее об этом мы поговорим в следующем пункте.

Известно также (см. [CS]), что гипотеза Литтлвуда следует из трехмерного варианта следующей гипотезы.

Гипотеза Оппенгейма. *Если $n \geqslant 3$ и $\langle \mathbf{L}_1, \cdot \rangle, \ldots, \langle \mathbf{L}_n, \cdot \rangle$ — n линейно независимых линейных форм на $\mathbb{R}^n$, таких, что*

$$\inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}} |\langle \mathbf{L}_1, \mathbf{x} \rangle \cdot \ldots \cdot \langle \mathbf{L}_n, \mathbf{x} \rangle| > 0, \tag{1.23}$$

то решетка $\big\{ (\langle \mathbf{L}_1, \mathbf{x} \rangle, \ldots, \langle \mathbf{L}_n, \mathbf{x} \rangle) \,\big|\, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \big\}$ — алгебраическая (то есть, подобна по модулю действия диагональных матриц $n \times n$ решетке полного модуля чисто вещественного алгебраического расширения $\mathbb{Q}$ степени n).

Заметим, что обращение гипотезы Оппенгейма является простым следствием теоремы Дирихле об алгебраических единицах (см. [BSh], [Ts]).

В работах [Sk1] и [Sk2] была предпринята попытка доказать гипотезу Оппенгейма, однако в доказательстве имеется весьма существенный пробел. По этой причине обе гипотезы остаются недоказанными.

Плохо приближаемые матрицы и системы линейных форм, удовлетворяющие условию (1.23), суть разные, но одинаково естественные многомерные обобщения плохо приближаемых чисел. Напомним, что число α называется *плохо приближаемым*, если существует такая константа $c > 0$, что

$$|q\alpha - p| \geqslant \frac{c}{q} \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}. \tag{1.24}$$

Общеизвестно, что иррациональное число плохо приближаемо тогда и только тогда, когда его неполные частные ограничены. Это утверждение — проявление тесной связи строения цепной дроби числа с тем, насколько хорошо его можно приблизить рациональными. Но в гипотезе Оппенгейма речь идет о существенно многомерном понятии "плохо приближаемости". Тут мы сталкиваемся с давней задачей о том, как обобщить на многомерный случай понятие цепной дроби. Оказалось, что для обобщения, предложенного более ста лет назад Ф. Клейном [Kl], можно доказать ряд нетривиальных утверждений, помогающих, в частности, по-новому взглянуть на гипотезу Оппенгейма. Подробнее о конструкции Клейна мы поговорим в пункте 1.2.3.

1.2.2 Мультипликативные экспоненты

В параграфе 1.1 мы определили диофантовы экспоненты матрицы Θ (см. определение 1.1). Как уже отмечалось, изменение нормы не влияет на экспоненты, поскольку все нормы в евклидовом пространстве эквивалентны. Однако, замена нормы на невыпуклую функцию расстояния представляется существенным изменением. Нам представляется, что функция расстояния, порожденная средним геометрическим координат, является наиболее интересной из всех невыпуклых функций расстояния, так как такой выбор естественным образом приводит нас к задачам, связанным с проблемой Литтлвуда.

Для каждого вектора $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{R}^k$ положим

$$\Pi(\mathbf{z}) = \left(\prod_{1 \leqslant i \leqslant k} |z_i|\right)^{1/k} \quad \text{и} \quad \Pi'(\mathbf{z}) = \left(\prod_{1 \leqslant i \leqslant k} \max(1, |z_i|)\right)^{1/k}.$$

Определение 1.8. Супремум вещественных чисел γ, для которых существует бесконечно много таких $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, что

$$\Pi(\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leqslant \Pi'(\mathbf{x})^{-\gamma}, \tag{1.25}$$

называется *мультипликативной диофантовой экспонентой* матрицы Θ и обозначается $\beta_{\text{м}}(\Theta)$.

Обычные и мультипликативные экспоненты связаны тривиальными неравенствами

$$\beta(\Theta) \leqslant \beta_{M}(\Theta) \leqslant \begin{cases} m\beta(\Theta), & \text{если } n = 1, \\ +\infty, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{1.26}$$

которые следуют из того факта, что для каждого $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$ справедливо $\Pi(\mathbf{z}) \leqslant |\mathbf{z}|_\infty$, а для каждого $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^k$ справедливо $|\mathbf{z}|_\infty^{1/k} \leqslant \Pi'(\mathbf{z}) \leqslant |\mathbf{z}|_\infty$.

С другой стороны, теорема Минковского о выпуклом теле дает нам еще одну пару тривиальных неравенств

$$\beta_{M}(\Theta) \geqslant \beta(\Theta) \geqslant m/n, \quad \beta_{M}(\Theta^\intercal) \geqslant \beta(\Theta^\intercal) \geqslant n/m. \tag{1.27}$$

Что же касается нетривиальных соотношений для $\beta_{M}(\Theta)$ и $\beta_{M}(\Theta^\intercal)$, до сих пор было известно крайне мало. Шмидт и Ванг [SchW] доказали в 1979-м году, что

$$\beta_{M}(\Theta) = m/n \iff \beta_{M}(\Theta^\intercal) = n/m, \tag{1.28}$$

так же как и в случае обыкновенных диофантовых экспонент (см. [Dy]). Позже, в 1981-м году, Ванг и Ю [WYu] доказали, что оба равенства в (1.28) верны для почти всех Θ относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^{nm}$. Эти равенства тесно связаны со свойством матрицы быть *плохо приближаемой*.

Определение 1.9. Матрица Θ называется *плохо приближаемой*, если

$$\inf_{\substack{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} |\mathbf{x}|_\infty^m |\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}|_\infty^n > 0.$$

Определение 1.10. Матрица Θ называется *мультипликативно плохо приближаемой*, если

$$\inf_{\substack{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \Pi'(\mathbf{x})^m \Pi(\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y})^n > 0.$$

Хорошо известно (см. теорему VIII в книге [C]), что матрица Θ плохо приближаема тогда и только тогда, когда плохо приближаема матрица $\Theta^\intercal$. Что же до мультипликативного аналога данного утверждения, единственным доказанным на данный момент фактом является результат Касселса и Суиннертона–Дайера [CS], заключающийся в том, что если $n = 2$, $m = 1$ и матрица Θ мультипликативно плохо приближаема, то мультипликативно плохо приближаема и матрица $\Theta^\intercal$. Отметим, что существование мультипликативно плохо приближаемых матриц Θ при $n = 2$, $m = 1$ в точности совпадает с отрицанием гипотезы Литтлвуда, так что случай $n+m=3$ представляется наиболее интересным. Однако даже в этом случае упомянутый выше результат Касселса и Суиннертона–Дайера является импликацией только в одну сторону.

В качестве следствия из основной теоремы параграфа 3.1 (теорема 3.1) мы получим, что Θ и $\Theta^\intercal$ одновременно являются мультипликативно плохо приближаемыми при любых n, m, чем заполним существующий пробел.

Еще одним соотношением, связывающим $\beta(\Theta)$ с $\beta(\Theta^\intercal)$ является неравенство Дайсона

$$\beta(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{n\beta(\Theta)+n-1}{(m-1)\beta(\Theta)+m} \tag{1.29}$$

опубликованное Дайсоном [Dy] в 1947-м году (отметим однако, что это неравенство можно легко вывести из работы Малера [Ma1] 1939-го года, см. также [Ma2]), которое обобщает знаменитый принцип переноса Хинчина, сформулированный последним для случая, когда либо n, либо m равно единице (см. [Kh1]). Как заметим в своей работе Бюжо [Bu3], доказательство, приведенное в работе [SchW], позволяет доказать для матриц Θ, удовлетворяющих некоторым ограничениям, неравенство

$$\beta_{{}_M}(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{n\beta_{{}_M}(\Theta)+n-1}{(m-1)\beta_{{}_M}(\Theta)+m}\,. \tag{1.30}$$

В параграфе 3.1, помимо всего прочего, мы покажем (см. следствие 20), что неравенство (1.30) справедливо для всех n, m, без ограничений на Θ.

1.2.3 Полиэдры Клейна

Полигоны Клейна. Существует довольно изящная геометрическая интерпретация цепных дробей (см. [EGH], [Ko2]), которую можно описать следующим образом. Пусть задано число αб $0<\alpha<1$. Рассмотрим двумерную решетку Λ_α с базисом, состоящим из векторов $(1,1-\alpha)$ и $(0,1)$. Выпуклая оболочка ненулевых точек решетки Λ_α с неотрицательными координатами (в исходном единичном базисе $\mathbb{R}^2$) называется *полигоном Клейна.* Целочисленные длины ограниченных ребер полигона Клейна равны соответствующим неполным частным числа α с нечетными индексами, а целочисленные углы между парами смежных ребер равны неполным частным с четными индексами. *Целочисленной длиной* отрезка с концами в точках решетки Λ_α называется количество точек решетки, лежащих во внутренности отрезка, плюс один. *Целочисленным углом* между двумя такими отрезками с общей вершиной называется площадь параллелограмма, натянутого на них, деленная на произведение их целочисленных длин, или иными словами, индекс подрешетки, порожденной примитивными векторами решетки Λ_α, параллельными этим двум отрезкам.

Произвольную двумерную решетку можно задать как

$$\Lambda_{\alpha,\beta} = \Big\{ \big(\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x} \rangle, \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{x} \rangle \big) \;\Big|\; \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \Big\},$$

где $\boldsymbol{\alpha} = (-1, \alpha)$, $\boldsymbol{\beta} = (-1, \beta)$, а α и β — различные вещественные числа. Выпуклая оболочка ненулевых точек решетки $\Lambda_{\alpha,\beta}$ с неотрицательными координатами также называется полигоном Клейна. Нетрудно понять, что комбинаторную структуру границы этого полигона Клейна описывают неполные частные чисел α и β.

Плохо приближаемые числа. Если число α плохо приближаемо, то, как видно из неравенства (1.24), в области

$$\Big\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x_2 > 0,\ |x_1 x_2| < c \Big\}$$

нет ни одной точки решетки Λ_α. Аналогично, если оба числа α и β плохо приближаемы, то решетка $\Lambda_{\alpha,\beta}$ имеет положительный норменный минимум.

Определение 1.11. *Норменным минимумом* n-мерной решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ называется величина

$$N(\Lambda) = \inf_{\mathbf{x} \in \Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}} |\varphi(\mathbf{x})|,$$

где $\varphi(\mathbf{x}) = x_1 \ldots x_n$.

Получаем следующую геометрическую переформулировку эквивалентности плохо приближаемости и ограниченности неполных частных.

Предложение 1. *Следующие два утверждения эквивалентны.*

(1) *Решетка $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ имеет положительный норменный минимум.*

(2) *Целочисленные длины ребер и целочисленные углы между соседними ребрами полигона Клейна решетки Λ равномерно ограничены.*

Теорема Лагранжа. Теорема Лагранжа о цепных дробях заключается в следующем: *число α является квадратичной иррациональностью тогда и только тогда, когда его разложение в цепную дробь периодично, начиная с какого-то момента.*

Геометрически это утверждение можно интерпретировать следующим образом.

Предложение 2. *Следующие два утверждения эквивалентны.*

(1) *Вещественные числа α и β суть сопряженные квадратичные иррациональности.*

(2) *Комбинаторная структура границы полигона Клейна решетки $\Lambda_{\alpha,\beta}$, оснащенная целочисленными длинами ребер и целочисленными углами между соседними ребрами, периодична.*

Отметим, что предложение 2 можно переформулировать, применив к решетке $\Lambda_{\alpha,\beta}$ подходящее линейное преобразование, отображающее ее на решетку $\mathbb{Z}^2$. Соответственно, тогда полигоном Клейна нужно будет назвать и выпуклую оболочку ненулевых точек решетки $\mathbb{Z}^2$, лежащих в конусе с вершиной в точке начала координат. Получим следующее утверждение (см. [Ko2]):

Предложение 3. *Следующие два условия эквивалентны.*

(1) *Конус $\mathcal{C}$ инвариантен относительно действия некоторого оператора из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ с различными действительными положительными собственными значениями.*

(2) *Комбинаторная структура границы полигона Клейна, соответствующего конусу $\mathcal{C}$, оснащенная целочисленными длинами ребер и целочисленными углами между соседними ребрами, периодична.*

Многомерное обобщение. Многомерное обобщение полигонов Клейна было предложено более века назад Ф. Клейном (см. [Kl]). Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная n–мерная решетка с определителем 1.

Определение 1.12. Выпуклые оболочки ненулевых точек n-мерной решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, содержащихся в каждом ортанте, называются *полиэдрами Клейна* решетки Λ.

И соответствующее “двойственное” определение, когда фиксирована решетка и варьируется конус:

Определение 1.13. Пусть $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ — n–мерный симплициальный конус с вершиной в начале координат. Выпуклая оболочка K ненулевых точек решетки $\mathbb{Z}^n$, содержащихся в $\mathcal{C}$, называется *полиэдром Клейна*, соответствующим решетке $\mathbb{Z}^n$ и конусу $\mathcal{C}$.

Везде далее, где будет идти речь о полиэдрах Клейна, кроме параграфа 3.5, мы будем рассматривать только иррациональные решетки Λ, то есть не имеющие в координатных плоскостях ненулевых точек, и иррациональные конусы $\mathcal{C}$, то есть такие, что в плоскостях их граней нет ненулевых целых точек. Тогда, как показано в [Mou], полиэдр Клейна K является обобщенным многогранником, то есть множеством, которое в пересечении с любым многогранником дает многогранник. В этом случае граница K является $(n-1)$–мерной полиэдральной поверхностью, гомеоморфной $\mathbb{R}^{n-1}$ и состоящей из выпуклых $(n-1)$–мерных (обобщенных) многогранников, такой что каждая точка этой поверхности принадлежит не более, чем конечному числу таких многогранников. Некоторые из граней K могут оказаться неограниченными, но только в том случае (см. [G3]), когда решетка, двойственная Λ, не является иррациональной (соотв. конус, двойственный к $\mathcal{C}$, не является иррациональным).

Тогда имеет смысл следующее

Определение 1.14. Граница Π полиэдра Клейна K называется *парусом.*

Ввиду соответствия между неполными частными и целочисленными длинами и углами, описанного выше, в n–мерном случае естественно ожидать, что $(n-1)$–мерные грани паруса (мы будем называть их *гипергранями*) и реберные звезды при вершинах паруса будут играть роль неполных частных.

Несколько лет назад В. И. Арнольд поставил вопрос (см. [Ar3], [Ar2]), какие локальные аффинные инварианты паруса однозначно определяют решетку. В своей изначальной, самой сильной, формулировке данный вопрос остается открытым. Однако в параграфах 3.2 и 3.3 мы продемонстрируем связь между некоторыми локальными инвариантами паруса и положительностью норменного минимума решетки.

Арнольд также предположил, что существуют некоторые локальные аффинные инварианты паруса, периодичность которых влечет существование неединичного оператора из $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, оставляющего конус (а стало быть, и парус) на месте. Таким образом, это дало бы обращение очевидного факта, что полиэдр Клейна, соответствующий собственному конусу оператора из $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, имеет периодическую структуру. Вскоре после постановки задачи стали появляться результаты в этом направлении (см. [Lch1], [Ko1], [Lch2], [Ar1], а также [Lch3]). Особенно интересна работа [Ko1], в которой предложен (без доказательства) многомерный аналог утверждения 3, к сожалению, неверный. В параграфе 3.3 мы устраняем этот пробел.

В заключение отметим, что в двумерном случае два соседних полигона Клейна имеют довольно много общего, ибо целочисленные длины ребер одного из них в точности равны целочисленным углам между смежными ребрами другого (см., например, [Ko2]). Ввиду этого соответствия многие утверждения о цепных дробях допускают "двойственные" формулировки: с одной стороны, можно пользоваться только целочисленными длинами ребер, но тогда придется рассматривать все четыре полигона Клейна, а с другой стороны, можно пользоваться как целочисленными длинами ребер, так и целочисленными углами между смежными ребрами, и тогда можно ограничиться рассмотрением одного из полигонов Клейна. Основной результат параграфа 3.2, (теорема 3.3) представляет собой пример утверждения и полиэдрах Клейна в произвольной размерности, допускающего "двойственные" формулировки.

Глава 2

"Выпуклый" подход

2.1 Диофантовы экспоненты и принцип переноса Хинчина

2.1.1 Формулировки основных результатов

В данном параграфе мы докажем ряд новых неравенств, связывающих величины $\alpha(\Theta)$, $\alpha(\Theta^\intercal)$, $\beta(\Theta)$, $\beta(\Theta^\intercal)$, обобщающих и уточняющих существующие на данный момент. А именно, мы улучшим теоремы 1.5, 1.6, 1.2, 1.3, 1.7.

Равномерные экспоненты. Нашим первым объектом изучения будет связь между $\alpha(\Theta)$ и $\alpha(\Theta^\intercal)$. Мы докажем следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Для всех натуральных n, m, не равных одновременно 1, справедливы неравенства*

$$\alpha(\Theta^\intercal) \geqslant \begin{cases} \dfrac{n-1}{m-\alpha(\Theta)}, & \text{\textit{при}} \ \ \alpha(\Theta) \leqslant 1, \\ \dfrac{n-\alpha(\Theta)^{-1}}{m-1}, & \text{\textit{при}} \ \ \alpha(\Theta) \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Отметим, что, вообще говоря, $\alpha(\Theta)$ и $\alpha(\Theta^\intercal)$ могут принимать значение $+\infty$, и это придает смысл неравенствам 2.1 в том случае, когда какой-нибудь знаменатель оказывается равным нулю.

Каждое утверждение о Θ и $\Theta^\intercal$, очевидно, сохраняет истинность при замене пары (n,Θ) на пару $(m,\Theta^\intercal)$. Следовательно, если зафиксировать n и m так, чтобы выполнялось $n \leqslant m$, $m \neq 1$, то два неравенства в (2.1) разобьются на четыре. В то же время из теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что

$$\alpha(\Theta) \geqslant m/n \quad \text{and} \quad \alpha(\Theta^\intercal) \geqslant n/m, \tag{2.2}$$

откуда заключаем, что одно из упомянутых четырех неравенств пропадает. Получаем следующую переформулировку теоремы 2.1.

Теорема 2.2. *Для всех натуральных n, m, таких что $1 \leqslant n \leqslant m$, $m \neq 1$, справедливо*

$$\alpha(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{n-\alpha(\Theta)^{-1}}{m-1}, \tag{2.3}$$

$$\alpha(\Theta)^{-1} \leqslant \frac{n-\alpha(\Theta^\intercal)}{m-1}, \qquad \text{при} \ \ \alpha(\Theta^\intercal) \leqslant 1, \tag{2.4}$$

$$\alpha(\Theta) \geqslant \frac{m-\alpha(\Theta^\intercal)^{-1}}{n-1}, \qquad \text{при} \ \ \alpha(\Theta^\intercal) \geqslant 1. \tag{2.5}$$

Случай $n = 1$ стоит рассмотреть отдельно, ибо в этом случае $\alpha(\Theta^\intercal) \leqslant 1$, если хотя бы одна компонента Θ иррациональна (см. [J4]), то есть случай (2.5) может выполняться только в случае, когда $\alpha(\Theta^\intercal) = 1$, который уже содержится в (2.4), или когда все компоненты Θ рациональны (в этом случае, очевидно, $\alpha(\Theta^\intercal) = +\infty$). Таким образом, получаем следующее.

Теорема 2.3. *Если $n = 1$, $m \neq 1$ и хотя бы одна компонента Θ иррациональна, то*

$$\alpha(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{1-\alpha(\Theta)^{-1}}{m-1}, \tag{2.6}$$

$$\alpha(\Theta)^{-1} \leqslant \frac{1-\alpha(\Theta^\intercal)}{m-1}. \tag{2.7}$$

Из теоремы 2.3 при $m = 2$, очевидно, следует теорема 1.4. Несложно убедиться (хотя и придется произвести некоторое количество вычислений) в том, что из теоремы 2.3 следует теорема 1.5, а из теоремы 2.1 следует теорема 1.6.

Регулярные экспоненты. Второй результат данного параграфа касается связи между $\beta(\Theta)$ и $\beta(\Theta^\intercal)$. Он обобщает теорему 1.2 и уточняет теорему 1.3. Заключается он в следующем.

Теорема 2.4. *Пусть пространство целочисленных решений системы* (1.1) *не одномерно. Тогда для всех натуральных n, m, не равных одновре-*

менно 1, *справедливы три неравенства*

$$\beta(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{n\beta(\Theta)+n-1}{(m-1)\beta(\Theta)+m}\,, \tag{2.8}$$

$$\beta(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{(n-1)(1+\beta(\Theta))-(1-\alpha(\Theta))}{(m-1)(1+\beta(\Theta))+(1-\alpha(\Theta))}\,, \tag{2.9}$$

$$\beta(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{(n-1)(1+\beta(\Theta)^{-1})-(\alpha(\Theta)^{-1}-1)}{(m-1)(1+\beta(\Theta)^{-1})+(\alpha(\Theta)^{-1}-1)}\,. \tag{2.10}$$

Из неравенств $\beta(\Theta) \geqslant \alpha(\Theta) \geqslant m/n$ следует, что (2.9) сильнее, чем (2.10) тогда и только тогда, когда $\alpha(\Theta) < 1$. Неравенство (2.8) совпадает с (1.6) и является более сильным, чем оба неравенства (2.9), (2.10) тогда и только тогда, когда

$$\alpha(\Theta) < \min\left(\frac{(m-1)\beta(\Theta)+m}{n+m-1}\,,\,\frac{(n+m-1)\beta(\Theta)}{(n-1)+n\beta(\Theta)}\right),$$

чего никогда не бывает при $n=1$ или $m=1$, поскольку $\alpha(\Theta) \geqslant m/n$. Далее, если $n=1$, то $\alpha(\Theta) \geqslant 1$ и неравенство (2.10) становится самым сильным и дает нижнюю оценку в (1.5). Если $m=1$ и хотя бы одна из компонент Θ иррациональна, то $\alpha(\Theta) \leqslant 1$ и неравенство (2.9) становится самым сильным и из него можно вывести верхнюю оценку в (1.5), если заменить m на n, а Θ на $\Theta^\intercal$. Таким образом, теорема 2.4 обобщает теорему 1.2 и уточняет теорему 1.3.

С целью прояснить разбиение на случаи в зависимости от значений $\alpha(\Theta)$ и $\beta(\Theta)$, приведем следующее предложение 4. Мы оставим его без явного доказательства, поскольку его единственная сложность заключается в обилии вычислений, не использующих никаких нетривиальных соображений, кроме неравенства $\beta(\Theta) \geqslant \alpha(\Theta) \geqslant m/n$.

Предложение 4. (*i*) *Если $m=1$ и хотя бы одна из компонент Θ иррациональна, то $1/n \leqslant \alpha(\Theta) \leqslant 1$ и для всех $\beta(\Theta) \geqslant \alpha(\Theta)$ неравенство* (2.9) *не слабее, чем* (2.8) *и* (2.10).

(*ii*) *Пусть $m \neq 1$ и $m/n \leqslant \alpha(\Theta) \leqslant 1$. Если*

$$\alpha(\Theta) \leqslant \beta(\Theta) \leqslant \frac{(d-1)\alpha(\Theta)-m}{m-1}\,,$$

то неравенство (2.9) *не слабее, чем* (2.8) *и* (2.10). *Иначе неравенство* (2.8) *сильнее.*

(*iii*) *Пусть $m \neq 1$ и $1 < \alpha(\Theta) < (d-1)/n$. Если*

$$\alpha(\Theta) \leqslant \beta(\Theta) \leqslant \frac{(n-1)\alpha(\Theta)}{d-1-n\alpha(\Theta)}\,,$$

то (2.10) *не слабее, чем* (2.8) *и* (2.9). *Иначе неравенство* (2.8) *сильнее.*

(*iv*) *Пусть* $m \neq 1$ *и* $\alpha(\Theta) \geqslant (d-1)/n$. *Тогда для всех* $\beta(\Theta) \geqslant \alpha(\Theta)$ *неравенство* (2.10) *не слабее, чем* (2.8) *и* (2.9).

Произвольные функции. Как оказалось, методы, используемые нами в этом параграфе, достаточно точны, чтобы позволить работать не только с диофантовыми экспонентами, но и с произвольными функциями, удовлетворяющими некоторым естественным условиям роста. В данном пункте мы сформулируем соответствующие утверждения (теоремы 2.5 и 2.6), а также выведем из них теоремы 2.1 и 2.4. Мы также сформулируем следствия 1 и 2 в качестве примеров работы с функциями промежуточного роста.

Во всех приводимых ниже утверждениях, существенно используется понятие обратной функции. В том случае, когда функция ψ обратима (как отображение из $\mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R}_+$), мы будем обозначать соответствующую обратную функцию через ψ^-. Тогда $\psi^-(\psi(t)) = \psi(\psi^-(t)) = t$ для всех $t > 0$.

Теорема 2.5. *Пусть* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — *произвольная функция, такая что*

$$t^n\varphi(t)^{m-1} \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{2.11}$$

Пусть $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — *произвольная обратимая убывающая функция, такая что для всех достаточно больших* t *верно одно из двух следующих утверждений:*

(*i*) $t\psi(t)$ *не возрастает и удовлетворяет неравенству*

$$\psi(\Delta_d t^n\varphi(t)^{m-1}) \leqslant (c\Delta_d t)^{-1}, \tag{2.12}$$

(*ii*) $t\psi(t)$ *не убывает и удовлетворяет неравенству*

$$\psi^-(\Delta_d t^{n-1}\varphi(t)^m) \leqslant (c\Delta_d\varphi(t))^{-1}, \tag{2.13}$$

где $d = n + m$, $c = \sqrt{2d(d-1)}$, *а* Δ_d *определяется равенством* (2.18)[1].

Пусть Θ *равномерно* ψ*-аппроксимируема. Тогда* $\Theta^\intercal$ *равномерно* φ*-аппроксимируема.*

Чтобы вывести из теоремы 2.5 теорему 2.1, положим $\psi(t) = t^{-\delta}$, $\varphi(t) = \varkappa t^{-\gamma}$, где $\delta < \alpha(\Theta)$ — положительное вещественное число, сколь угодно

[1]Отметим, что в силу следствия 5 из пункта 2.1.4 величина Δ_d зажата между $\sqrt{1/d}$ и $\sqrt{2/d}$.

близкое к $\alpha(\Theta)$,

$$\gamma = \begin{cases} \dfrac{n-1}{m-\delta}, & \text{при } \ \delta < 1, \\ \text{сколь угодно большое вещественное число}, & \text{при } \ \delta = 1,\ m = 1, \\ \dfrac{n-\delta^{-1}}{m-1}, & \text{при } \ \delta \geqslant 1,\ m \neq 1, \end{cases} \tag{2.14}$$

и

$$\varkappa = \begin{cases} \left(c^{\delta}\Delta_d^{\delta-1}\right)^{\frac{1}{m-\delta}}, & \text{при } \ \delta < 1, \\ 1, & \text{при } \ \delta = 1,\ m = 1, \\ \left(c\Delta_d^{1-\delta}\right)^{\frac{1}{(m-1)\delta}}, & \text{при } \ \delta \geqslant 1,\ m \neq 1. \end{cases}$$

Легко проверить, что соотношение (2.11) выполняется. Далее, $t\psi(t) = t^{1-\delta}$ либо не возрастает, либо не убывает, в зависимости от того $\delta \geqslant 1$ или $\delta \leqslant 1$. Кроме того, неравенства (2.12) и (2.13) в нашем случае выполняются со знаками равенства. Таким образом, учитывая, что $\varkappa$ не зависит от t, получаем неравенство $\alpha(\Theta^{\intercal}) \geqslant \gamma$, из которого следует теорема 2.1.

Немного изменив приводимые выше рассуждения, можно убедиться в том, что если функциональный порядок аппроксимации матрицы Θ в логарифм раз лучше, чем $t^{-\alpha(\Theta)}$, то почти то же самое можно сказать и о матрице $\Theta^{\intercal}$. Сформулируем это следующим образом.

Следствие 1. *Пусть* $\alpha(\Theta), \alpha(\Theta^{\intercal}) < +\infty$ *(что исключает случай* $\alpha(\Theta) = m = 1$*) и пусть* Θ *равномерно* $(\ln t)^{-1}t^{-\alpha(\Theta)}$*-аппроксимируема. Тогда* $\Theta^{\intercal}$ *is равномерно* $g(t)t^{-\gamma}$*-аппроксимируема, где*

$$g(t) = \begin{cases} \left(\gamma c^{-\alpha(\Theta)}\Delta_d^{1-\alpha(\Theta)}\ln t\right)^{-\frac{1}{m-\alpha(\Theta)}}, & \textit{при } \ \alpha(\Theta) < 1, \\ (1+\varepsilon)\left(\alpha(\Theta)^{-1}c^{-1}\Delta_d^{\alpha(\Theta)-1}\ln t\right)^{-\frac{1}{(m-1)\alpha(\Theta)}}, & \textit{при } \ \alpha(\Theta) \geqslant 1, \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} \dfrac{n-1}{m-\alpha(\Theta)}, & \textit{при } \ \alpha(\Theta) < 1, \\ \dfrac{n-\alpha(\Theta)^{-1}}{m-1}, & \textit{при } \ \alpha(\Theta) \geqslant 1, \end{cases}$$

$\varepsilon > 0$ *сколь угодно мало, а константы* c *и* Δ_d *— как в теореме 2.5.*

Как было отмечено выше, всегда справедливы неравенства $\alpha(\Theta) \geqslant m/n$ и $\alpha(\Theta^{\intercal}) \geqslant n/m$. Хорошо известно, что $\alpha(\Theta) = m/n$ тогда и только тогда, когда

$\alpha(\Theta^\intercal) = n/m$ (это также следует из теоремы 2.1). Стало быть, если $\alpha(\Theta) = m/n$, функциональный порядок равномерной аппроксимации матрицы Θ в $\ln t$ раз лучше, чем $t^{-\alpha(\Theta)}$, то в силу следствия 1 функциональный порядок равномерной аппроксимации матрицы $\Theta^\intercal$ в $O(\ln^\delta t)$ раз лучше, чем $t^{-\alpha(\Theta^\intercal)}$, где

$$\delta = \frac{n}{m(\max(n,m)-1)}\,.$$

Если $\alpha(\Theta) = +\infty$ (что может быть только при $m \neq 1$), то из теоремы 2.1 следует, что $\alpha(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{n}{m-1}$. Но это не означает, что матрица $\Theta^\intercal$ равномерно $t^{-\frac{n}{m-1}}$-аппроксимируема. Мы можем лишь заключить, что для любого $\varepsilon > 0$ она равномерно $t^{-\frac{n}{m-1}+\varepsilon}$-аппроксимируема. Тем не менее, если удается оценить функциональный порядок аппроксимации матрицы Θ, теорема 2.5 позволяет сказать нечто большее. Например, следующее.

Следствие 2. *Пусть матрица Θ равномерно e^{-t}-аппроксимируема. Тогда $\Theta^\intercal$ равномерно $f(t)$-аппроксимируема, где*

$$f(x) = \Delta_d^{-\frac{1}{m-1}} t^{-\frac{n}{m-1}} \ln(c\Delta_d t)^{\frac{1}{m-1}},$$

а константы c и Δ_d — как в теореме 2.5.

Сформулируем функциональный аналог теоремы 2.4.

Теорема 2.6. *Пусть $\varphi, \psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — произвольная обратимая убывающая функция, такая что $\varphi(t) \geqslant \psi(t)$ для всех $t > 0$. Положим*

$$f_1(t) = \left(ct^m\varphi(t)\psi(t)^{1-m}\right)^{\frac{1}{d-2}}, \qquad f_{-1}(t) = \left(ct^{2-m}\varphi^-(t)\psi^-(t)^{m-1}\right)^{\frac{1}{d-2}},$$

$$g_1(t) = \left(ct^{2-n}\varphi(t)\psi(t)^{n-1}\right)^{\frac{1}{d-2}}, \qquad g_{-1}(t) = \left(ct^{n}\varphi^-(t)\psi^-(t)^{1-n}\right)^{\frac{1}{d-2}},$$

где $d = n+m$ и $c = \sqrt{2d(d-1)}$.

Пусть матрица Θ является ψ-аппроксимируемой и равномерно φ-аппроксимируемой. Тогда справедливы следующие два утверждения:

(i) если f_1 возрастает и обратима, то $\Theta^\intercal$ является $(g_1 \circ f_1^-)$-аппроксимируемой;

(ii) if f_{-1} убывает и обратима, то $\Theta^\intercal$ является $(g_{-1} \circ f_{-1}^-)$-аппроксимируемой.

Чтобы вывести из теоремы 2.6 теорему 2.4, положим $\psi(t) = t^{-\delta}$, $\varphi(t) = t^{-\gamma}$, где δ и γ — положительные действительные числа, сколь угодно близкие к $\beta(\Theta)$ и $\alpha(\Theta)$, соответственно, и такие что $\delta < \beta(\Theta)$, $\gamma < \alpha(\Theta)$, $\gamma \neq 1$.

Тогда при $k=\pm1$

$$f_k(t)=\left(ct^{k(m-1)(1+\delta^k)+1-\gamma^k}\right)^{\frac{1}{d-2}},$$
$$g_k(t)=\left(ct^{-k(n-1)(1+\delta^k)+1-\gamma^k}\right)^{\frac{1}{d-2}}.$$

Единственный случай, когда $f_k(t)$ необратима — случай $m=1$, $\gamma=1$, который мы исключили выбором γ. Таким образом, $f_k(t)$ обратима и можно легко проверить, что f_1 возрастает, f_{-1} убывает и что

$$g_k(f_k^-(t))=c^{\frac{k(n-1)(1+\delta^k)+\gamma^k}{d-2}}t^{-\frac{(n-1)(1+\delta^k)-k(1-\gamma^k)}{(m-1)(1+\delta^k)+k(1-\gamma^k)}}.$$

Отсюда, учитывая, что c не зависит от t, видим, что

$$\beta(\Theta^\intercal)\geqslant\frac{(n-1)(1+\delta^k)-k(1-\gamma^k)}{(m-1)(1+\delta^k)+k(1-\gamma^k)},$$

откуда следует (2.9) и (2.10).

Что касается неравенства (2.8), оно не требует доказательства, ибо в точности совпадает с утверждением теоремы Дайсона 1.3. Таким образом, теорема 2.4 действительно следует из теоремы 2.6.

Оставшаяся часть параграфа устроена следующим образом. В пунктах 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 и 2.1.6 описываются основные конструкции, лежащие в основании доказательств, в пункте 2.1.5 мы улучшаем теорему 1.7, в пунктах 2.1.7 и 2.1.8 мы доказываем теоремы 2.6 и 2.5, соответственно, а в пункте 2.1.9 мы доказываем более сильный вариант теоремы 2.5 для трехмерного случая, с лучшими константами, и сравниваем полученное утверждение с аналогичной теоремой Ярника.

В завершение данного пункта отметим, что хоть определения 1.1, 1.6, 1.7 и теорема 1.7 формулируются для sup-норм в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, наши результаты по существу верны для любых норм в этих пространствах. Ведь выбор норм сказывается лишь на некоторых константах и не существенен с точки зрения диофантовых экспонент.

2.1.2 От $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ к $\mathbb{R}^{n+m}$

Положим $d=n+m$. Если заданы точки $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$, мы будем писать $\mathbf{z}=(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}^d$, и наоборот, если задана точка $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^d$, мы будем обозначать ее первые m координат как $\mathbf{x}$, а последние n — как $\mathbf{y}$. Так мы вкладываем систему (1.1) в $\mathbb{R}^d$.

Обозначим через $\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_d$ столбцы матрицы

$$T = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -\Theta & E_n \end{pmatrix},$$

где E_m и E_n — соответствующие единичные матрицы, и через $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \boldsymbol{\ell}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{\ell}_d$ — столбцы матрицы

$$T' = \begin{pmatrix} E_m & \Theta^\intercal \\ 0 & E_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $T(T')^\intercal = E_d$, то есть базисы $\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_d$ и $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \boldsymbol{\ell}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{\ell}_d$ являются двойственными. Следовательно, подпространства

$$\mathcal{L}^m = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_m), \qquad \mathcal{L}^n = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{\ell}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{\ell}_d)$$

ортогональны. Более того, $\mathcal{L}^m = (\mathcal{L}^n)^\perp$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^m &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \boldsymbol{\ell}_{m+i}, \mathbf{z} \rangle = 0,\ i = 1, \ldots, n\}, \\ \mathcal{L}^n &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \boldsymbol{\ell}_j, \mathbf{z} \rangle = 0,\ j = 1, \ldots, m\}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{L}^m$ совпадает с пространством решений системы $\Theta\mathbf{x} = -\mathbf{y}$, а $\mathcal{L}^n$ — с пространством решений системы $\Theta^\intercal\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Легко проверяется, что изменение знака в (1.1) и сохранение его для транспонированной системы не влияет на определения и теоремы, приведенные в пункте 2.1.1.

Для всех положительных h и r определим параллелепипеды

$$\begin{aligned} M_{h,r} = \Big\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, &|\langle \boldsymbol{\ell}_{m+i}, \mathbf{z} \rangle| \leqslant h, \quad i = 1, \ldots, n, \\ &|\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{z} \rangle| \leqslant r, \quad j = 1, \ldots, m\Big\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \widehat{M}_{h,r} = \Big\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, &|\langle \mathbf{e}_{m+i}, \mathbf{z} \rangle| \leqslant h, \quad i = 1, \ldots, n, \\ &|\langle \boldsymbol{\ell}_j, \mathbf{z} \rangle| \leqslant r, \quad j = 1, \ldots, m\Big\}. \end{aligned}$$

В этих обозначениях определения 1.6 и 1.7 для Θ и $\Theta^\intercal$ можно переформулировать следующим образом.

Предложение 5. *Для произвольной функции $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ справедливы следующие утверждения:*

(i) матрица Θ является ψ-аппроксимируемой, если и только если существуют сколь угодно большие значения $t \in \mathbb{R}$, при которых

$$M_{\psi(t),t} \cap \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\} \neq \varnothing. \tag{2.15}$$

(ii) матрица Θ равномерно ψ-аппроксимируема, если и только если (2.15) *справедливо для всех достаточно больших $t \in \mathbb{R}$.*
(iii) матрица $\Theta^\intercal$ является ψ-аппроксимируемой, если и только если существуют сколь угодно большие значения $t \in \mathbb{R}$, при которых

$$\widehat{M}_{t,\psi(t)} \cap \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\} \neq \varnothing. \tag{2.16}$$

(iv) матрица $\Theta^\intercal$ равномерно ψ-аппроксимируема, если и только если (2.16) *справедливо для всех достаточно больших $t \in \mathbb{R}$.*

Аналогично, теорему 1.7 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 2.7. *Если*

$$M_{U,X} \cap \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\} \neq \varnothing,$$

то

$$\widehat{M}_{Y,V} \cap \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\} \neq \varnothing,$$

где

$$Y = (d-1)\big(X^m U^{1-m}\big)^{\frac{1}{d-1}}, \quad V = (d-1)\big(X^{1-n} U^n\big)^{\frac{1}{d-1}}.$$

Сохраняя существо вопроса, данная точка зрения интерпретирует исходную задачу в терминах аппроксимации подпространства и его ортогонального дополнения одномерными рациональными подпространствами. Такая постановка является классической и позволяет пользоваться различными мощными средствами. Одним из таких инструментов служит следующее наблюдение (см. теорему 1 из параграфа 3 главы VII книги [HP]).

Предложение 6. *Пусть $\mathcal{L}$ — k-мерное подпространство $\mathbb{R}^d$ и пусть $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ — линейно независимые вектора, такие что $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{L}$, $\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_d \in \mathcal{L}^\perp$. Пусть также $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$. Тогда $(A^*)^{-1}\mathcal{L}^\perp = (A\mathcal{L})^\perp$ и*

$$\frac{|\mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_k|}{|\mathbf{v}_{k+1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_d|} = (\det A)^{-1} \frac{|A\mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge A\mathbf{v}_k|}{|(A^*)^{-1}\mathbf{v}_{k+1} \wedge \ldots \wedge (A^*)^{-1}\mathbf{v}_d|}\,.$$

Здесь $|\mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_k|$ обозначает евклидову норму мультивектора $\mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_k \in \wedge^k(\mathbb{R}^d)$ как элемента евклидова $\binom{d}{k}$-мерного пространства с естественным ортонормированным базисом $\{\mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_k}\}$. По формуле Коши–Бине

$|\mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_k|$ равняется (неориентированному) k-мерному объему параллелепипеда, натянутого на $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, то есть

$$|\mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_k| = \det(\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle)^{1/2}. \tag{2.17}$$

Отметим, что в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ верно равенство $A^* = A^\intercal$, то есть в этом базисе $(A^*)^{-1}$ совпадает с матрицей алгебраических дополнений матрица A. Учитывая, что T' является в точности матрицей алгебраических дополнений матрицы T, видим, что если к ортогональным подпространствам $\mathbb{R}^d$, натянутых на соответствующие вектора из набора $\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_d$, применить предложение 6, то мы получим ортогональные подпространства, натянутые на соответствующие вектора из набора $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$, причем с сохранением некой информации об объемах в этих подпространствах.

2.1.3 Определители ортогональных целочисленных решеток

Для каждой решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ будем обозначать через $\det \Lambda$ ее определитель, то есть объем фундаментального параллелепипеда. А именно, если $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ — базис решетки Λ, то $\det \Lambda$ равен k-мерному объему параллелепипеда, натянутого на $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, который в свою очередь равняется $|\mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_k|$, как явствует из (2.17).

Следующее предложение 7, судя по всему, является классическим, но поскольку мы не смогли найти его в литературе в явном виде, приведем его с доказательством.

Предложение 7. *Пусть $\mathcal{L}$ — k-мерное подпространство $\mathbb{R}^d$, такое что решетка $\Lambda = \mathcal{L} \cap \mathbb{Z}^d$ имеет ранг k. Положим $\Lambda^\perp = \mathcal{L}^\perp \cap \mathbb{Z}^d$. Тогда*

$$\det \Lambda = \det \Lambda^\perp.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ — базис решетки Λ, а $\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_d$ — базис решетки $\Lambda^\perp$. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ — как в пункте 2.1.2. Тогда

$$\mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant d} V^{i_1 \ldots i_k} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_k},$$

$$\mathbf{v}_{k+1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_d = \sum_{1 \leqslant i_{k+1} < \ldots < i_d \leqslant d} V^{i_{k+1} \ldots i_d} \mathbf{e}_{i_{k+1}} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_d},$$

где коэффициенты $V^{i_1 \ldots i_k}$ суть взаимно простые целые числа, равно как и коэффициенты $V^{i_{k+1} \ldots i_d}$. С другой стороны, из теоремы 1 параграфа 3 главы VII книги [HP] следует, что числа $|V^{i_1 \ldots i_k}|$ пропорциональны числам $|V^{i_{k+1} \ldots i_d}|$. Это может быть лишь в том случае, когда $|V^{i_1 \ldots i_k}| = |V^{i_{k+1} \ldots i_d}|$ для любого набора попарно различных индексов $i_1, \dots, i_d$. Таким образом, в силу (2.17) получаем:

$$\det \Lambda = |\mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_k| = |\mathbf{v}_{k+1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_d| = \det \Lambda^{\perp}.$$

□

2.1.4 Секционно-двойственное множество

Будем обозначать через $\mathcal{S}^{d-1}$ сферу единичного радиуса в $\mathbb{R}^d$. Для каждого множества $M \subset \mathbb{R}^d$ и каждого $\mathbf{e} \in \mathcal{S}^{d-1}$ будем использовать обозначение $\mathrm{vol}_{\mathbf{e}}(M)$ для $(d-1)$-мерного объема пересечения M с гиперплоскостью, ортогональной вектору $\mathbf{e}$ (разумеется, при условии, что этот объем определен).

Определение 2.1. Пусть M — подмножество $\mathbb{R}^d$, для которого все величины $\mathrm{vol}_{\mathbf{e}}(M)$ корректно определены. Будем называть множество

$$M^{\wedge} = \{\, \lambda\mathbf{e} \mid \mathbf{e} \in \mathcal{S}^{d-1},\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 2^{1-d}\,\mathrm{vol}_{\mathbf{e}}(M)\,\}$$

секционно–двойственным для M.

Из предложения 7 и теоремы Минковского о выпуклом теле немедленно следует

Лемма 2.1. *Пусть M выпукло и центрально-симметрично относительно начала координат $\mathbf{0}$. Пусть $M^{\wedge} \cap \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\} \neq \varnothing$. Тогда $M \cap \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\} \neq \varnothing$.*

Опишем теперь некоторые свойства множества $M^{\wedge}$. Очевидно, $M^{\wedge}$ всегда центрально-симметрично относительно начала координат.

Лемма 2.2. *Если множество M выпукло и центрально-симметрично относительно начала координат, то таковым является и множество $M^{\wedge}$.*

Доказательство. Симметричность $M^{\wedge}$ очевидна. Докажем выпуклость. Пусть $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$ — две произвольные различные ненулевые точки множества $M^{\wedge}$. Рассмотрим произвольную точку $\mathbf{v}_\lambda = (1-\lambda)\mathbf{v}_0 + \lambda\mathbf{v}_1$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Подпространства, ортогональные $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_\lambda$ и $\mathbf{v}_1$, пересекаются по $(d-2)$-мерному подпространству. Стало быть, в силу выпуклости M, справедливо неравенство

$$\mathrm{vol}_{\mathbf{v}_\lambda}(M) \geqslant (1-\lambda)\,\mathrm{vol}_{\mathbf{v}_0}(M) + \lambda\,\mathrm{vol}_{\mathbf{v}_1}(M),$$

откуда видим, что $\mathbf{v}_\lambda \in M^{\wedge}$. Следовательно, $M^{\wedge}$ выпукло. □

Если M выпукло и центрально-симметрично относительно начала координат (а именно для таких множеств мы и будем применять описанную конструкцию, более того, в роли M у нас во всех приложениях будут выступать параллелепипеды), то множество $M^\wedge$ тесно связано с множеством $[M]^{(d-1)}$ — $(d-1)$-м присоединенным телом множества M, рассматривавшихся Малером (см. [Ма3] или [GL]). Множество $[M]^{(d-1)}$ является подмножеством пространства $\wedge^{d-1}(\mathbb{R}^d)$, изоморфного $\mathbb{R}^d$, так что можно считать, что $[M]^{(d-1)}$ лежит в том же пространстве, что и $M^\wedge$. И тогда можно легко проверить, что

$$M^\wedge \subsetneq [M]^{(d-1)} \subsetneq (d-1)M^\wedge.$$

Действительно, если S — пресечение M с $(d-1)$-мерным подпространством $\mathbb{R}^d$, а точки $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{d-1}$ выбраны в S таким образом, чтобы $\det(\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle)$ было максимально, то S является собственным подмножеством параллелепипеда

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i \mathbf{v}_i \,\Big|\, -1 \leqslant \lambda_i \leqslant 1 \Big\}.$$

Далее, $M^\wedge$ при линейных преобразованиях ведет себя точно так же, как $[M]^{(d-1)}$:

Лемма 2.3. *Пусть A — невырожденная матрица $d \times d$ с вещественными компонентами. Тогда $(AM)^\wedge = A'(M^\wedge)$, где A' обозначает матрицу алгебраических дополнений матрицы A.*

Доказательство. Достаточно применить предложение 6 и заметить, что если S — подмножество $(d-1)$-мерного подпространства, натянутого на $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{d-1}$, то отношение $(d-1)$-мерного объема S к $|\mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_{d-1}|$ является линейным инвариантом. $\square$

Будем обозначать через $\mathcal{B}_\infty^d$ единичный шар в sup-норме в пространстве $\mathbb{R}^d$, то есть куб

$$\Big\{ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, |x_i| \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, d \Big\}.$$

Положим

$$\Delta_d = \frac{1}{2^{d-1}\sqrt{d}} \operatorname{vol}_{d-1} \Big\{ \mathbf{x} \in \mathcal{B}_\infty^d \,\Big|\, \sum_{i=1}^{d} x_i = 0 \Big\}, \tag{2.18}$$

где $\operatorname{vol}_{d-1}(\cdot)$ обозначает $(d-1)$-мерную меру Лебега.

Лемма 2.4. $(\mathcal{B}_\infty^d)^\wedge$ *содержит выпуклую оболочку точек, имеющих ровно по две ненулевые координаты, которые при этом равны ± 1, а также точек $(\pm\Delta_d, \ldots, \pm\Delta_d)$.*

Доказательство. Точки $(\pm\Delta_d, \ldots, \pm\Delta_d)$, очевидно лежат в $(\mathcal{B}_\infty^d)^\wedge$. Объем сечения куба $\mathcal{B}_\infty^d$, ортогонального вектору $(1,1,0,\ldots,0)$, равен $2^{d-1}\sqrt{2}$, стало быть, эта точка также лежит в $(\mathcal{B}_\infty^d)^\wedge$. Остальное очевидно. □

Следствие 3. $(\mathcal{B}_\infty^d)^\wedge$ *содержит куб* $\Delta_d\mathcal{B}_\infty^d$.

Следствие 4. $(\mathcal{B}_\infty^d)^\wedge$ *содержит множество. определяемое неравенствами*

$$\sum_{i=1}^d |x_i| \leqslant 2, \qquad |x_j| \leqslant 1, \qquad j = 1, \ldots, d. \tag{2.19}$$

Скажем теперь пару слов об асимптотическом поведении Δ_d. Мы воспользуемся соответствующими наблюдениями для того, чтобы усилить теорему переноса (см. теорему 2.8). Из теорем Ваалера и Болла (см. [Va], [Ba]) следует

Предложение 8. *Объем каждого* $(d-1)$*-мерного центрального сечения куба* $\mathcal{B}_\infty^d$ *ограничен снизу и сверху величинами* 2^{d-1} *и* $2^{d-1}\sqrt{2}$.

Следствие 5. *Справедливы неравенства* $\sqrt{d/2} \leqslant \Delta_d^{-1} \leqslant \sqrt{d}$.

2.1.5 Теорема переноса

Как отмечалось в пункте 1.1.2, множитель $d-1$ в теореме 1.7 можно заменить на меньший, стремящийся при этом к единице при $d \to \infty$. Этим новым множителем является

$$\Delta_d^{-\frac{1}{d-1}}.$$

В силу следствия 5 он меньше, чем $d-1$ при $d \geqslant 3$ и

$$\Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} \to 1 \quad \text{as} \quad d \to \infty.$$

Таким образом, учитывая теорему 2.7, мы видим, что следующая теорема 2.8 усиливает теорему 1.7. Будем отныне пользоваться обозначениями пункта 2.1.2.

Теорема 2.8. *Если*

$$M_{U,X} \cap \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\} \neq \varnothing,$$

то

$$\widehat{M}_{Y,V} \cap \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\} \neq \varnothing,$$

где

$$Y = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} \big(X^m U^{1-m}\big)^{\frac{1}{d-1}}, \quad V = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} \big(X^{1-n} U^n\big)^{\frac{1}{d-1}}. \tag{2.20}$$

Доказательство. Положим

$$A = T\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{E_m}{V} & 0 \\ 0 & \dfrac{E_n}{Y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{E_m}{V} & 0 \\ \dfrac{-\Theta}{V} & \dfrac{E_n}{Y}\end{pmatrix}.$$

Для матрицы алгебраических дополнений A' имеем

$$A' = T'\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{E_m}{Y^nV^{m-1}} & 0 \\ 0 & \dfrac{E_n}{Y^{n-1}V^m}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{E_m}{Y^nV^{m-1}} & \dfrac{\Theta^\intercal}{Y^{n-1}V^m} \\ 0 & \dfrac{E_n}{Y^{n-1}V^m}\end{pmatrix}.$$

Значит, $\widehat{M}_{Y,V} = (A^*)^{-1}\mathcal{B}^d_\infty$ и в силу (2.20),

$$((A')^*)^{-1}B^d_\infty = M_{Y^{n-1}V^m,Y^nV^{m-1}} = \Delta_d^{-1}M_{U,X}.$$

Применяя следствие 3 и лемму 2.3, видим, что

$$M_{U,X}\subset(\widehat{M}_{Y,V})^\wedge.$$

Остается воспользоваться леммой 2.1. $\square$

Стоит отметить, что Малер получил теорему 1.7 как следствие несколько более сильного результата. При помощи своего метода билинейных форм он на самом деле доказал, что во всех неравенствах (1.11), кроме одного, множитель $d-1$ можно опустить. Тогда, в наших терминах, неравенства (1.11) превращаются в

$$\begin{aligned} |\langle\mathbf{e}_{m+i},\mathbf{z}\rangle| &\leqslant \lambda_{m+i}\big(X^mU^{1-m}\big)^{\frac{1}{d-1}}, \quad & i=1,\ldots,n,\\ |\langle\boldsymbol{\ell}_j,\mathbf{z}\rangle| &\leqslant \lambda_j\big(X^{1-n}U^n\big)^{\frac{1}{d-1}}, & j=1,\ldots,m, \end{aligned}\tag{2.21}$$

где ровно одно из чисел λ_k равно $d-1$, а все остальные равны 1.

Такое утверждение непосредственно из теоремы 2.8 не следует, но его можно с легкостью получить, если немного модифицировать доказательство. Действительно, зафиксируем какое-нибудь из λ_k равным $d-1$, обозначим через M параллелепипед, задаваемый неравенствами (2.21), и рассмотрим линейный оператор C, такой что $M = C\mathcal{B}^d_\infty$. Тогда, обозначая через C' матрицу алгебраических дополнений матрицы C, получаем, что

$$\begin{aligned} C'\mathcal{B}^d_\infty = \Big\{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^d\ \Big|\ &|\langle\mathbf{e}_j,\mathbf{z}\rangle|\leqslant\frac{\mu}{\lambda_j}X,\quad j=1,\ldots,m,\\ &|\langle\boldsymbol{\ell}_{m+i},\mathbf{z}\rangle|\leqslant\frac{\mu}{\lambda_{m+i}}U,\quad i=1,\ldots,n\Big\}, \end{aligned}$$

где μ равно произведению всех λ_k. Одно из чисел μ/λ_k равно единице, а все остальные равны $d-1$. Стало быть, в силу следствия 4 и леммы 2.3, справедливо включение $M_{U,X} \subset M^{\wedge}$, поскольку гиперграни многогранника, задаваемого неравенствами (2.19), параллельные координатным гиперплоскостям, суть обобщенные октаэдры, чьи радиусы вписанных сфер равны $(d-1)^{-1/2}$. И вновь, остается применить лемму 2.1.

2.1.6 Основная лемма

В данном пункте мы докажем лемму 2.6, описывающую основной шаг всех последующих доказательств в данном параграфе. Заметим, что лемма 2.6 в некотором роде является двумерным аналогом леммы 2.1.

Как и в пункте 2.1.2, будем обозначать первые m координат точки $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$ как $\mathbf{x}$, а последние n — как $\mathbf{y}$. Мы также будем пользоваться обозначениями $M_{h,r}$ и $\widehat{M}_{h,r}$, введенными в пункте 2.1.2.

Лемма 2.5. *Пусть* $\mathbf{z}_1 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{z}_2 = (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \in \mathbb{R}^d$. *Тогда*

$$|\mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{z}_2| \leqslant \sqrt{2d(d-1)}\max\Big(|\mathbf{x}_1|_\infty|\mathbf{x}_2|_\infty,\ |\mathbf{y}_1|_\infty|\mathbf{y}_2|_\infty,\\ \max\big(|\mathbf{x}_1|_\infty, |\mathbf{x}_2|_\infty\big)\max\big(|\mathbf{y}_1|_\infty, |\mathbf{y}_2|_\infty\big)\Big). \quad (2.22)$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$\mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{z}_2 = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant d} V^{i_1 i_2}\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2}.$$

Пусть $|V^{j_1 j_2}|$ — максимальное число из $|V^{i_1 i_2}|$, $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant d$. Тогда

$$|\mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{z}_2| \leqslant \sqrt{\frac{d(d-1)}{2}}|V^{j_1 j_2}|. \quad (2.23)$$

Величина $|V^{j_1 j_2}|$ равна площади проекции параллелограмма, натянутого на вектора $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ на подпространство $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{e}_{j_1}\mathbf{e}_{j_2})$. Следовательно,

$$|V^{j_1 j_2}| \leqslant \begin{cases} 2|\mathbf{x}_1|_\infty|\mathbf{x}_2|_\infty, & \text{при } j_1 < j_2 \leqslant m, \\ 2|\mathbf{y}_1|_\infty|\mathbf{y}_2|_\infty, & \text{при } j_2 > j_1 > m, \\ 2\max\big(|\mathbf{x}_1|_\infty, |\mathbf{x}_2|_\infty\big)\max\big(|\mathbf{y}_1|_\infty, |\mathbf{y}_2|_\infty\big), & \text{при } j_1 \leqslant m < j_2. \end{cases} \quad (2.24)$$

Эти случаи — единственные возможные, так как $j_1 < j_2$. Из (2.23) и (2.24) получаем (2.22). □

Лемма 2.6. *Пусть h, r, h_1, r_1, h_2, r_2 — положительные вещественные числа и пусть $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — неколлинеарные вектора $\mathbb{Z}^d$. Предположим, что*

$$\mathbf{v}_1 \in M_{h_1,r_1}\,, \qquad \mathbf{v}_2 \in M_{h_2,r_2} \tag{2.25}$$

и

$$\max\Big(r^2 r_1 r_2,\ h^2 h_1 h_2,\ hr\max(r_1,r_2)\max(h_1,h_2)\Big) \leqslant \frac{h^n r^m}{\sqrt{2d(d-1)}}\,. \tag{2.26}$$

Тогда

$$\widehat{M}_{h,r} \cap \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\} \neq \varnothing.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$A = T\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{E_m}{r} & 0 \\ 0 & \dfrac{E_n}{h}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{E_m}{r} & 0 \\ \dfrac{-\Theta}{r} & \dfrac{E_n}{h}\end{pmatrix}$$

и матрицу, обратную к ее сопряженной:

$$(A^*)^{-1} = (A^\intercal)^{-1} = (\det A)^{-1}\cdot T'\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{E_m}{h^n r^{m-1}} & 0 \\ 0 & \dfrac{E_n}{h^{n-1}r^m}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rE_m & h\Theta^\intercal \\ 0 & hE_n\end{pmatrix}.$$

Тогда $\widehat{M}_{h,r} = (A^*)^{-1}\mathcal{B}^d_\infty$. Для каждой из точек

$$\mathbf{z}_k = (\mathbf{x}_k,\mathbf{y}_k) = A^{-1}\mathbf{v}_k, \qquad k=1,2,$$

справедливы равенства

$$|\mathbf{x}_k|_\infty = r\max_{1\leqslant j\leqslant m}|\langle \mathbf{e}_j,\mathbf{v}_k\rangle|, \qquad |\mathbf{y}_k|_\infty = h\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\langle \boldsymbol{\ell}_{m+i},\mathbf{v}_k\rangle|.$$

Отсюда, ввиду (2.25) и (2.26), получаем

$$\begin{aligned}\max\Big(|\mathbf{x}_1|_\infty|\mathbf{x}_2|_\infty,\ |\mathbf{y}_1|_\infty|\mathbf{y}_2|_\infty,\ \max\big(|\mathbf{x}_1|_\infty,|\mathbf{x}_2|_\infty\big)\max\big(|\mathbf{y}_1|_\infty,|\mathbf{y}_2|_\infty\big)\Big) \leqslant \\ \leqslant \max\Big(r^2 r_1 r_2,\ h^2 h_1 h_2,\ hr\max(r_1,r_2)\max(h_1,h_2)\Big) \leqslant \frac{(\det A)^{-1}}{\sqrt{2d(d-1)}}\,.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Положим

$$\mathcal{L} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) \quad \text{и} \quad \Lambda = \mathcal{L}\cap\mathbb{Z}^d.$$

Ясно, что $\operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ — подрешетка решетки Λ, а ее определитель кратен $\det \Lambda$. Применяя предложение 6, лемму 2.5 и неравенство (2.27), получаем, что

$$\frac{|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2|}{2^{2-d} \operatorname{vol}_{d-2}(\mathcal{L}^{\perp} \cap \widehat{M}_{h,r})} = \frac{(\det A) \cdot |\mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{z}_2|}{2^{2-d} \operatorname{vol}_{d-2}((A^{-1}\mathcal{L})^{\perp} \cap \mathcal{B}^d_{\infty})} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2^{2-d} \operatorname{vol}_{d-2}((A^{-1}\mathcal{L})^{\perp} \cap \mathcal{B}^d_{\infty})} \leqslant 1. \quad (2.28)$$

Последнее неравенство верно в силу теоремы Ваалера (см. [Va]), которая утверждает, что объем любого $(d-2)$-мерного центрального сечения куба $\mathcal{B}^d_{\infty}$ не меньше, чем 2^{d-2}. Стало быть,

$$\operatorname{vol}_{d-2}(\mathcal{L}^{\perp} \cap \widehat{M}_{h,r}) \geqslant 2^{d-2} \det \Lambda,$$

откуда ввиду предложения 7 и теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что $\mathcal{L}^{\perp} \cap \widehat{M}_{h,r}$ содержит ненулевую целую точку. □

Лемму 2.6 будет удобнее применять, если сделать следующее наблюдение.

Лемма 2.7. *Если*

$$\max(r_1, r_2) \max(h_1, h_2) \leqslant \frac{h^{n-1} r^{m-1}}{\sqrt{2d(d-1)}}$$

и выполняется хотя бы одно из равенств

$$r_1 r_2 = \frac{h^n r^{m-2}}{\sqrt{2d(d-1)}}, \qquad h_1 h_2 = \frac{h^{n-2} r^m}{\sqrt{2d(d-1)}},$$

то справедливо неравенство (2.26).

Доказательство. Все следует из неравенства

$$r_1 r_2 h_1 h_2 \leqslant \big(\max(r_1, r_2) \max(h_1, h_2)\big)^2.$$

□

2.1.7 Доказательство теоремы 2.6

Лемма 2.8. *Пусть t, Φ, Ψ — произвольные положительные вещественные числа, такие что $\Phi \geqslant \Psi$. Пусть $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — неколлинеарные целочисленные вектора, такие что*

$$\mathbf{v}_1 \in M_{\Phi,t} \quad \textit{and} \quad \mathbf{v}_2 \in M_{\Psi,t}\,. \quad (2.29)$$

Тогда

$$\widehat{M}_{h,r} \cap \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\} \neq \varnothing,$$

где

$$h = \left(ct^m \Phi \Psi^{1-m}\right)^{\frac{1}{d-2}}, \qquad r = \left(ct^{2-n} \Phi \Psi^{n-1}\right)^{\frac{1}{d-2}}, \qquad c = \sqrt{2d(d-1)}.$$

Доказательство. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} h^{n-2} r^m &= c\Phi\Psi, \\ h^{n-1} r^{m-1} &= ct\Phi. \end{aligned}$$

Остается применить неравенство $\Phi \geqslant \Psi$, лемму 2.7 и лемму 2.6. □

Выведем утверждение теоремы 2.6 с $k = 1$ из леммы 2.8. Из предложения 5 следует, что при любом достаточно большом t можно выбрать неколлинеарные вектора $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{Z}^d$, удовлетворяющие (2.29) с $\Psi = \psi(t)$ и $\Phi = \varphi(t)$. Стало быть, если f_1 возрастает и обратима, то $r = g_1(f_1^-(h))$ и $h \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Что и требовалось доказать.

Чтобы доказать утверждение теоремы 2.6 с $k = -1$, нам понадобится "перевернутый" вариант леммы 2.8:

Лемма 2.9. *Пусть t, Φ, Ψ произвольные положительные вещественные числа, такие что $\Phi \geqslant \Psi$. Пусть $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — неколлинеарные целочисленные вектора, такие что*

$$\mathbf{v}_1 \in M_{t,\Phi} \quad \textit{and} \quad \mathbf{v}_2 \in M_{t,\Psi}\,. \tag{2.30}$$

Тогда

$$\widehat{M}_{h,r} \cap \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\} \neq \varnothing,$$

где

$$h = \left(ct^{2-m} \Phi \Psi^{m-1}\right)^{\frac{1}{d-2}}, \qquad r = \left(ct^{n} \Phi \Psi^{1-n}\right)^{\frac{1}{d-2}}, \qquad c = \sqrt{2d(d-1)}.$$

Доказательство. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} h^{n} r^{m-2} &= c\Phi\Psi, \\ h^{n-1} r^{m-1} &= ct\Phi. \end{aligned}$$

И вновь, остается применить неравенство $\Phi \geqslant \Psi$, лемму 2.7 и лемму 2.6. □

Из предложения 5 следует, что для всех достаточно малых t можно выбрать неколлинеарные вектора $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{Z}^d$, удовлетворяющие (2.30) с $\Psi = \psi^-(t)$ и $\Phi = \varphi^-(t)$. Стало быть, если f_{-1} убывает и обратима, то $r = g_{-1}(f_{-1}^-(h))$ и $h \to +\infty$ при $t \to 0$. Утверждение теоремы 2.6 с $k = -1$ доказано.

2.1.8 Доказательство теоремы 2.5

Лемма 2.10. *Пусть φ, ψ — как в теореме 2.5 и пусть h — произвольное положительное вещественное число. Положим*

$$r = \varphi(h) \tag{2.31}$$

и

$$h^* = \Delta_d\, r^m h^{n-1}, \qquad r^* = \Delta_d\, r^{m-1} h^n, \tag{2.32}$$

где Δ_d определяется равенством (2.18).

Предположим, что в интервале

$$\mathcal{I} = [r^*, \max(r^*, \psi^-(h^*))]$$

выполняется одно из условий (i), (ii) теоремы 2.5 и что

$$M_{\psi(t),t} \cap \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\} \neq \varnothing, \qquad \textit{для всех } t \in \mathcal{I}. \tag{2.33}$$

Тогда

$$\widehat{M}_{h,r} \cap \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\} \neq \varnothing. \tag{2.34}$$

Доказательство. Если M_{h^*,r^*} содержит ненулевые целочисленные точки, то (2.34) следует из теоремы 2.8. Следовательно, можно считать, что

$$M_{h^*,r^*} \cap \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\} = \varnothing. \tag{2.35}$$

В частности, в этом случае $r^* < \psi^-(h^*)$.

Рассмотрим минимальное такое $\mu > 1$, что $M_{\mu h^*,\mu r^*}$ содержит ненулевую целочисленную точку $\mathbf{v}$. Если эта точка удовлетворяет неравенству

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{v} \rangle| \leqslant \frac{h}{r} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\langle \boldsymbol{\ell}_{m+i}, \mathbf{v} \rangle|,$$

то обозначим ее $\mathbf{v}_1$ и рассмотрим минимальное такое $\mu' \geqslant \mu$, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ параллелепипед $M_{(\mu-\varepsilon)h^*,\mu' r^*}$ содержит ненулевую целую точку $\mathbf{v}_2$. В противном случае обозначим ее $\mathbf{v}_2$ и, по аналогии, рассмотрим минимальное такое $\mu' \geqslant \mu$, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ параллелепипед $M_{\mu' h^*,(\mu-\varepsilon) r^*}$ содержит ненулевую целую точку $\mathbf{v}_1$. Положим

$$\lambda_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\langle \boldsymbol{\ell}_{m+i}, \mathbf{v}_1 \rangle|, \qquad \lambda_2 = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{v}_2 \rangle|,$$

$$\lambda_1' = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{v}_1 \rangle|, \qquad \lambda_2' = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\langle \boldsymbol{\ell}_{m+i}, \mathbf{v}_2 \rangle|.$$

Тогда $\mathbf{v}_1 \in M_{\lambda_1,\lambda_1'}$, $\mathbf{v}_2 \in M_{\lambda_2',\lambda_2}$, причем по построению точек $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$

$$\lambda_1' \leqslant \frac{h}{r}\lambda_1, \qquad \lambda_1' \leqslant \lambda_2, \qquad \lambda_2' \leqslant \frac{r}{h}\lambda_2, \qquad \lambda_2' \leqslant \lambda_1. \tag{2.36}$$

Далее, ввиду (2.33) и (2.35), имеют место неравенства

$$h^* < \lambda_1 \leqslant \psi(\lambda_2) < \psi(r^*) \quad \text{и} \quad r^* < \lambda_2 \leqslant \psi^-(\lambda_1) < \psi^-(h^*).$$

Из этих неравенств следует, что если выполнено условие (i) теоремы 2.5, то в силу (2.31), (2.32) и (2.12)

$$\lambda_1\lambda_2 \leqslant \lambda_2\psi(\lambda_2) \leqslant r^*\psi(r^*) \leqslant \frac{r^{m-1}h^{n-1}}{\sqrt{2d(d-1)}}\,,$$

а если выполнено (ii), в силу (2.31), (2.32) и (2.13)

$$\lambda_1\lambda_2 \leqslant \lambda_1\psi^-(\lambda_1) = \psi^-(\lambda_1)\psi(\psi^-(\lambda_1)) \leqslant h^*\psi^-(h^*) \leqslant \frac{r^{m-1}h^{n-1}}{\sqrt{2d(d-1)}}\,.$$

Таким образом, в каждом из этих случаев

$$\lambda_1\lambda_2 \leqslant \frac{r^{m-1}h^{n-1}}{\sqrt{2d(d-1)}}\,.$$

Отсюда, учитывая (2.36), получаем (2.26) для $h_1 = \lambda_1$, $r_1 = \lambda_1'$, $h_2 = \lambda_2'$, $r_2 = \lambda_2$. Остается применить лемму 2.6. $\square$

Теперь не составит труда вывести теорему 2.5. Из (2.11), (2.31), (2.32) следует, что $r^* \to \infty$ при $h \to \infty$. Стало быть, при достаточно большом h выполняется либо условие (i), либо условие (ii) теоремы 2.5. Кроме того, при достаточно большом h из предложения 5 следует (2.33). Применяя лемму 2.10, получаем теорему 2.5.

2.1.9 Частный случай $n+m=3$

Ярник [J4] получил теорему 1.4 как следствие более сильного утверждения для произвольных функций. В наших терминах ее можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2.9. (Ярник) *Пусть* $n=1$, $m=2$. *Пусть* $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *— произвольная обратимая убывающая функция, такая что функция* $f(t) =$

$t\psi(t)$ также является обратимой. Пусть ε, δ — произвольные положительные вещественные числа. Тогда выполняются следующие два утверждения:

(i) если $\psi(t) \leqslant \varepsilon t^{-2}$ для всех достаточно больших t, функция $f(t)$ убывает, а матрица Θ равномерно ψ-аппроксимируема, то матрица $\Theta^{\intercal}$ равномерно φ-аппроксимируема, где

$$\varphi(t) = \frac{12(1+\varepsilon+\delta)}{t}\psi^{-}\left(\frac{1}{t}\right); \tag{2.37}$$

(ii) если $\psi(t) \leqslant \varepsilon t^{-1/2}$ для всех достаточно больших t функция $f(t)$ возрастает, а матрица $\Theta^{\intercal}$ равномерно ψ-аппроксимируема, то матрица Θ равномерно φ-аппроксимируема, где

$$\varphi(t) = \frac{4(1+\varepsilon+\delta)}{f^{-}(t/2)}\,. \tag{2.38}$$

Оказывается, что наш метод позволяет улучшить константы в равенствах (2.37) и (2.38). Чтобы сформулировать наилучший результат, который дает в данном случае наш метод, докажем утверждение, более сильное, чем лемма 2.6 в размерности $d=3$. А именно, докажем, что константу в (2.26), равную в данном случае $2\sqrt{3}$, можно заменить на 2.

Лемма 2.11. *Пусть $n+m=3$ и пусть h, r, h_1, r_1, h_2, r_2 положительные вещественные числа, а $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — неколлинеарные вектора решетки $\mathbb{Z}^3$. Предположим, что*

$$\mathbf{v}_1 \in M_{h_1,r_1}\,, \qquad \mathbf{v}_2 \in M_{h_2,r_2} \tag{2.39}$$

и

$$\max\Big(r^2r_1r_2,\ h^2h_1h_2,\ hr\max(r_1,r_2)\max(h_1,h_2)\Big) \leqslant \frac{1}{2}h^n r^m\,. \tag{2.40}$$

Тогда

$$\widehat{M}_{h,r} \cap \mathbb{Z}^3 \backslash \{\mathbf{0}\} \neq \varnothing.$$

Доказательство. Поскольку утверждение леммы симметрично относительно n, m, можно считать, что $n=1$, а $m=2$. Пусть A, $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathcal{L}$ — как в доказательстве леммы 2.6. При помощи элементарных геометрических соображений несложно доказать, что

$$\begin{gathered}\frac{|\mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{z}_2|}{2^{-1}\operatorname{vol}_1((A^{-1}\mathcal{L})^{\perp} \cap \mathcal{B}^d_{\infty})} \leqslant \\ \leqslant 2\max\Big(|\mathbf{x}_1|_\infty|\mathbf{x}_2|_\infty,\ \max\big(|\mathbf{x}_1|_\infty,|\mathbf{x}_2|_\infty\big)\max\big(|\mathbf{y}_1|_\infty,|\mathbf{y}_2|_\infty\big)\Big).\end{gathered} \tag{2.41}$$

Повторяя дословно доказательство леммы 2.6 с применением неравенства (2.41) вместо леммы 2.5, получаем (2.28), то есть то, что и хотели доказать. $\square$

Отметим, что аналогичное уточнение можно сделать для произвольных n, m, если одно из них равно 1.

Теперь, когда у нас есть лемма 2.11, мы можем заменить при $d = 3$ константу c в теореме 2.5 на 2. Из усиленной таким образом теоремы 2.5 следует

Теорема 2.10. *Пусть $n = 1$, $m = 2$. Пусть $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — произвольная обратимая убывающая функция, такая что функция $f(t) = t\psi(t)$ также является обратимой. Тогда выполняются следующие два утверждения:*

(i) если $f(t)$ убывает, а матрица Θ равномерно ψ-аппроксимируема, то матрица $\Theta^\intercal$ равномерно φ-аппроксимируема, где

$$\varphi(t) = \frac{3}{4t}\psi^-\left(\frac{2}{3t}\right);$$

(ii) если $f(t)$ возрастает, а матрица $\Theta^\intercal$ равномерно ψ-аппроксимируема, то матрица Θ равномерно φ-аппроксимируема, где

$$\varphi(t) = \frac{2}{3f^-(t/2)}.$$

Как мы и утверждали, теорема 2.10 сильнее теоремы 2.9. Действительно, утверждение (ii), очевидно, сильнее, а что касается утверждения (i), достаточно отметить, что если функция $f(t) = t\psi(t)$ убывает, то функция $t\psi^-(t) = f(\psi^-(t))$ возрастает, поскольку $\psi^-(t)$ убывает, равно как и $\psi(t)$.

2.2 Промежуточные диофантовы экспоненты

Данный параграф является результатом попытки обобщить классические диофантовы экспоненты на случай задачи приближения пространства решений системы (1.1) рациональными подпространствами $\mathbb{R}^{m+n}$ размерности p.

В пункте 2.2.1 мы предложим определение промежуточных экспонент второго типа, согласующееся с Лорановым. В пункте 2.2.2 мы сформулируем основные наши результаты для этих величин. Пункты 2.2.3, 2.2.4 посвящены экспонентам, естественно возникающих в параметрической геометрии чисел, развитой Шмидтом и Зуммерером в их работе [SchS1]. Эти экспоненты тесно связаны с диофантовыми экспонентами и в пунктах 2.2.5, 2.2.6 мы описываем эту связь. Благодаря этой связи наши результаты можно переформулировать в терминах экспонент Шмидта–Зуммерера, что мы и делаем в пункте 2.2.7. Наконец, в пункте 2.2.8 мы пользуемся этой точкой зрения для того, чтобы доказать теоремы, сформулированные в пункте 2.2.2.

Стоит отметить, что все наши результаты, представляющие известные ранее утверждения в виде цепочек неравенств, получены для экспонент второго типа. В связи с этим возникает вопрос, можно ли доказать нечто подобное для экспонент первого типа. Ответа на этот вопрос пока у нас нет.

2.2.1 Экспоненты Лорана и их обобщение

Положим $d = m + n$. Будем, как и в предыдущем параграфе, обозначать через $\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_d$ столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} E_m & -\Theta^\intercal \\ \Theta & E_n \end{pmatrix},$$

где E_m и E_n — соответствующие единичные матрицы, а $\Theta^\intercal$ — матрица, транспонированная к Θ. Напомним, что пространство $\mathcal{L}^m = \operatorname{span}_\mathbb{R}(\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_m)$ совпадает с пространством решений системы (1.1), причем $(\mathcal{L}^m)^\perp = \mathcal{L}^n = \operatorname{span}_\mathbb{R}(\boldsymbol{\ell}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{\ell}_d)$. Обозначим также через $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ столбцы единичной матрицы E_d.

Чтобы обобщить определение 1.3, положим для каждого $\sigma = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant d$,

$$\mathbf{L}_\sigma = \boldsymbol{\ell}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{\ell}_{i_k}, \tag{2.42}$$

обозначим через $\mathcal{J}_k$ множество всех k-элементных подмножеств множества $\{1, \ldots, m\}$, $k = 0, \ldots, m$, и положим $\mathbf{L}_\varnothing = 1$.

Положим также $k_0 = \max(0, m - p)$.

Определение 2.2. Супремум вещественных чисел γ, для которых существует сколь угодно большое t, такое что (соотв. для которых при любом достаточно большом t) система неравенств

$$\max_{\sigma\in\mathcal{J}_k}|\mathbf{L}_\sigma\wedge\mathbf{Z}|\leqslant t^{1-(k-k_0)(1+\gamma)},\qquad k=0,\ldots,m,\tag{2.43}$$

имеет ненулевое решение в $\mathbf{Z}\in\wedge^p(\mathbb{Z}^d)$ называется *p-й регулярной (соотв. равномерной) диофантовой экспонентой второго типа* матрицы Θ и обозначается $\mathfrak{b}_p(\Theta)$ (соотв. $\mathfrak{a}_p(\Theta)$).

Мы стремились сделать определение 2.2 как можно более простым. Однако с ним будет более удобно работать с точки зрения полилинейной алгебры, если его немного переформулировать. Для этого положим для каждого $\sigma=\{i_1,\ldots,i_k\}$, $1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant d$,

$$\mathbf{E}_\sigma=\mathbf{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathbf{e}_{i_k},\tag{2.44}$$

обозначим через $\mathcal{J}'_k$ множество всех k-элементных подмножеств множества $\{m+1,\ldots,d\}$, $k=0,\ldots,n$, и положим $\mathbf{E}_\varnothing=1$.

Положим также $k_1=\min(m,d-p)$.

Предложение 9. *Неравенства* (2.43) *можно заменить на*

$$\max_{\substack{\sigma\in\mathcal{J}_k\\ \sigma'\in\mathcal{J}'_{d-p-k}}}|\mathbf{L}_\sigma\wedge\mathbf{E}_{\sigma'}\wedge\mathbf{Z}|\leqslant t^{1-(k-k_0)(1+\gamma)},\qquad k=k_0,\ldots,k_1.\tag{2.45}$$

Доказательство. Неравенство (2.43) тривиально при $k>k_1$. Пусть $k\leqslant k_1$. Положим $q=k+p$. Рассмотрим матрицу M размера $d\times q$ со столбцами $\mathbf{m}_1,\ldots,\mathbf{m}_q\in\mathbb{R}^d$ и положим $\mathbf{M}=\mathbf{m}_1\wedge\ldots\wedge\mathbf{m}_q$. Если $\sigma'=\{i_1,\ldots,i_{d-q}\}\in\mathcal{J}'_{d-q}$, то величина

$$|\mathbf{M}\wedge\mathbf{E}_{\sigma'}|=|\det(\mathbf{m}_1,\ldots,\mathbf{m}_q,\mathbf{e}_{i_1},\ldots,\mathbf{e}_{i_{d-q}})|$$

с точностью до знака равна определителю матрицы $(q\times q)$, состоящей из j-х строк матрицы M с $j\notin\sigma'$. Компоненты $\mathbf{M}$ с точностью до знака совпадают с этими определителями, так что

$$|\mathbf{M}|=\max_{\sigma'\in\mathcal{J}'_{d-q}}|\mathbf{M}\wedge\mathbf{E}_{\sigma'}|.\tag{2.46}$$

По линейности соотношение (2.46) останется справедливым, если $\mathbf{M}$ заменить произвольным элементом $\wedge^q(\mathbb{R}^d)$, в частности, $\mathbf{L}_\sigma\wedge\mathbf{Z}$. Следовательно,

$$|\mathbf{L}_\sigma\wedge\mathbf{Z}|=\max_{\sigma'\in\mathcal{J}'_{d-p-k}}|\mathbf{L}_\sigma\wedge\mathbf{Z}\wedge\mathbf{E}_{\sigma'}|,$$

откуда получаем требуемое утверждение. □

При $p = 1$ определение 2.2 совпадает с определением 1.1, то есть $\mathfrak{b}_1(\Theta) = \beta(\Theta) = \beta_1(\Theta)$ и $\mathfrak{a}_1(\Theta) = \alpha(\Theta) = \alpha_1(\Theta)$. Это видно из следующего утверждения.

Предложение 10. *Величина $\beta(\Theta)$ (соотв. $\alpha(\Theta)$) равна супремуму вещественных чисел γ, для которых существует сколь угодно большое t, такое что (соотв. для которых при любом достаточно большом t) система неравенств*

$$|\mathbf{z}| \leqslant t, \qquad |\mathbf{L} \wedge \mathbf{z}| \leqslant t^{-\gamma}, \tag{2.47}$$

где $\mathbf{L} = \boldsymbol{\ell}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{\ell}_m$, имеет ненулевое решение в $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$.

Доказательство. Параллелепипед в $\mathbb{R}^d$, задаваемый неравенствами (1.3), можно записать как

$$M_\gamma(t) = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{z} \rangle| \leqslant t,\ \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\langle \boldsymbol{\ell}_{m+i}, \mathbf{z} \rangle| \leqslant t^{-\gamma} \right\},$$

где $\langle \cdot , \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$.

Векторы $\boldsymbol{\ell}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{\ell}_d$ образуют базис $\mathcal{L}^n$ — ортогонального дополнения к $\mathcal{L}^m$. Отсюда, поскольку евклидова норма мультивектора $\mathbf{L} \wedge \mathbf{z}$ равна $(m+1)$-мерному объему параллелепипеда, натянутого на вектора $\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_m, \mathbf{z}$, получаем, что

$$|\mathbf{L} \wedge \mathbf{z}| \asymp \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\langle \boldsymbol{\ell}_{m+i}, \mathbf{z} \rangle|,$$

где константа зависит лишь от Θ. Кроме того,

$$|\mathbf{z}| \asymp \max \Big(\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{z} \rangle|,\ \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\langle \boldsymbol{\ell}_{m+i}, \mathbf{z} \rangle| \Big),$$

где константа опять же зависит лишь от Θ.

Следовательно, существует положительная константа c, зависящая лишь от Θ, такая что множество $M'_\gamma(t)$, определяемое неравенствами (2.47), удовлетворяет соотношению

$$c^{-1} M_\gamma(t) \subseteq M'_\gamma(t) \subseteq c M_\gamma(t),$$

по крайней мере, при $t \geqslant 1$, $\gamma \geqslant 0$. Откуда немедленно следует требуемое утверждение. $\square$

2.2.2 Основные результаты для промежуточных диофантовых экспонент

В данном параграфе мы обобщим неравенства (1.15) и их аналог для равномерных экспонент на случай произвольных n, m. Мы покажем (см. предложение 18 в пункте 2.2.6), что

$$\mathfrak{b}_p(\Theta^\intercal) = \mathfrak{b}_{d-p}(\Theta), \qquad \mathfrak{a}_p(\Theta^\intercal) = \mathfrak{a}_{d-p}(\Theta), \qquad p = 1, \ldots, d-1, \tag{2.48}$$

и докажем следующую теорему.

Теорема 2.11. *Для каждого $p = 1, \dots, d-2$ верно следующее.*
Если $p \geqslant m$, то

$$(d-p-1)(1+\mathfrak{b}_{p+1}(\Theta)) \geqslant (d-p)(1+\mathfrak{b}_p(\Theta)), \tag{2.49}$$

$$(d-p-1)(1+\mathfrak{a}_{p+1}(\Theta)) \geqslant (d-p)(1+\mathfrak{a}_p(\Theta)). \tag{2.50}$$

Если $p \leqslant m-1$, то

$$(d-p-1)(1+\mathfrak{b}_p(\Theta))^{-1} \geqslant (d-p)(1+\mathfrak{b}_{p+1}(\Theta))^{-1} - n, \tag{2.51}$$

$$(d-p-1)(1+\mathfrak{a}_p(\Theta))^{-1} \geqslant (d-p)(1+\mathfrak{a}_{p+1}(\Theta))^{-1} - n. \tag{2.52}$$

Второй результат данного параграфа обобщает неравенства (1.16). Мы докажем следующую теорему.

Теорема 2.12. *Предположим, что пространство решений системы* (1.1) *не является одномерной решеткой. Тогда для $m = 1$ справедливо неравенство*

$$\mathfrak{b}_2(\Theta) \geqslant \frac{\mathfrak{b}_1(\Theta) + \mathfrak{a}_1(\Theta)}{1 - \mathfrak{a}_1(\Theta)}\,, \tag{2.53}$$

а для $m \geqslant 2$ справедливо неравенство

$$\mathfrak{b}_2(\Theta) \geqslant \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{a}_1(\Theta) - 1}{2 + \mathfrak{b}_1(\Theta) - \mathfrak{a}_1(\Theta)}\,, & \text{\textit{при}} \quad \mathfrak{a}_1(\Theta) \neq \infty, \\[2ex] \dfrac{1 - \mathfrak{a}_1(\Theta)^{-1}}{\mathfrak{b}_1(\Theta)^{-1} + \mathfrak{a}_1(\Theta)^{-1}}\,. \end{cases} \tag{2.54}$$

Неравенство (2.53) в точности совпадает с первым из неравенств (1.16). Из второго неравенства (2.54) в силу соотношений (2.48) следует второе неравенство (1.16).

По теореме 2.11 при $m \geqslant 2$

$$(d-2)(1+\mathfrak{b}_{d-1}(\Theta))^{-1} \leqslant (1+\mathfrak{b}_2(\Theta))^{-1} + m - 2. \tag{2.55}$$

Это неравенство вместе с (2.54) дает (2.9) и (2.10) при $m \geqslant 2$.

Третий результат данного параграфа представляет в виде цепочек неравенств неравенства (2.1). Он заключается в следующем.

Теорема 2.13. *Для* $m=1$ *справедливо неравенство*

$$\mathfrak{a}_2(\Theta) \geqslant (1-\mathfrak{a}_1(\Theta))^{-1} - \frac{n-2}{n-1}\,. \tag{2.56}$$

Для $m \geqslant 2$ *справедливо неравенство*

$$\mathfrak{a}_2(\Theta) \geqslant \begin{cases} \dfrac{n-1}{-n-(d-2)(1-\mathfrak{a}_1(\Theta))^{-1}}\,, & \textit{при} \ \ \mathfrak{a}_1(\Theta) \leqslant 1, \\ \dfrac{m-1}{n+(d-2)(\mathfrak{a}_1(\Theta)-1)^{-1}}\,, & \textit{при} \ \ \mathfrak{a}_1(\Theta) \geqslant 1. \end{cases} \tag{2.57}$$

Покажем, что теорема 2.13 разбивает неравенства (2.1) таким же образом, как теорема 2.12 разбивает неравенства (2.9) и (2.10). Из теоремы 2.11 следует, что при $m=1$

$$1+\mathfrak{a}_n(\Theta) \geqslant (n-1)(1+\mathfrak{a}_2(\Theta)), \tag{2.58}$$

а при $m \geqslant 2$

$$(d-2)(1+\mathfrak{a}_{d-1}(\Theta))^{-1} \leqslant (1+\mathfrak{a}_2(\Theta))^{-1} + m - 2. \tag{2.59}$$

Применяя (2.59) и (2.57), получаем (2.1) при $m \geqslant 2$. Что касается $m=1$, в этом случае $\mathfrak{a}_1(\Theta) \leqslant 1$, так что при $m=1$ из (2.58) и (2.56) действительно следует (2.1).

2.2.3 Экспоненты Шмидта–Зуммерера

В данном пункте, равно как и в следующем, все определения и утверждения даются для произвольных путей и решеток. Следующее предложение и следствия из него обобщают некоторые наблюдения, сделанные в работах [SchS1] и [BL].

Предложение 11. *Для любых* Λ *и* $\mathfrak{T}$

$$0 \leqslant -\Psi_d(s) = O(s^{-1}). \tag{2.60}$$

В частности,

$$\underline{\Psi}_d = \overline{\Psi}_d = 0. \tag{2.61}$$

Доказательство. В силу (1.17) объемы всех параллелепипедов $\mathcal{B}(s)$ равны 2^d, так что по теореме Минковского о последовательных минимумах

$$\frac{1}{d!} \leqslant \prod_{i=1}^{d} \lambda_i(\mathcal{B}(s)) \leqslant 1.$$

Стало быть,

$$-\frac{\ln(d!)}{s} \leqslant \sum_{i=1}^{d} \psi_i(s) \leqslant 0,$$

откуда немедленно следует (2.60). $\square$

Следствие 6. *Для любого p в пределах $1 \leqslant p \leqslant d-2$ и любого $s > 0$ справедливо неравенство*

$$\frac{p+1}{p}\Psi_p(s) \leqslant \Psi_{p+1}(s) \leqslant \frac{d-p-1}{d-p}\Psi_p(s). \tag{2.62}$$

Доказательство. Ввиду (2.60) из неравенств $\psi_i(s) \leqslant \psi_{i+1}(s)$, $i = 1, \ldots, d-1$, следует, что

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \psi_i(s) \leqslant \psi_{p+1}(s) \leqslant \frac{-1}{d-p}\sum_{i=1}^{p} \psi_i(s),$$

откуда немедленно получаем (2.62). $\square$

Беря $\liminf$ и $\limsup$ от всех трех частей неравенства (2.62), получаем

Следствие 7. *Для любых Λ, $\mathfrak{T}$ и любого p в пределах $1 \leqslant p \leqslant d-2$ справедливы неравенства*

$$\frac{p+1}{p}\underline{\Psi}_p \leqslant \underline{\Psi}_{p+1} \leqslant \frac{d-p-1}{d-p}\underline{\Psi}_p \quad \text{и} \quad \frac{p+1}{p}\overline{\Psi}_p \leqslant \overline{\Psi}_{p+1} \leqslant \frac{d-p-1}{d-p}\overline{\Psi}_p. \tag{2.63}$$

Применяя последовательно (2.63), получаем

Следствие 8. *Для любых Λ и $\mathfrak{T}$*

$$(d-1)\underline{\Psi}_1 \leqslant \underline{\Psi}_{d-1} \leqslant \frac{\underline{\Psi}_1}{d-1} \quad \text{и} \quad (d-1)\overline{\Psi}_1 \leqslant \overline{\Psi}_{d-1} \leqslant \frac{\overline{\Psi}_1}{d-1}. \tag{2.64}$$

Из предложения 11 можно также без труда вывести

Следствие 9. *Для любых Λ и $\mathfrak{T}$*

$$\underline{\Psi}_{d-1} = -\overline{\psi}_d \quad \text{и} \quad \overline{\Psi}_{d-1} = -\underline{\psi}_d. \tag{2.65}$$

Как мы увидим позднее, первое из неравенств (2.64) обобщает неравенства переноса Хинчина и Дайсона.

2.2.4 Экспоненты Шмидта–Зуммерера второго типа с точки зрения полилинейной алгебры

Как и прежде, будем рассматривать пространство $\wedge^p(\mathbb{R}^d)$ как $\binom{d}{p}$-мерное евклидово пространство с ортонормированным базисом, состоящим из поливекторов

$$\mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_p}, \qquad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant d.$$

Упорядочим множество всех p-элементных подмножеств множества $\{1, \ldots, d\}$ лексикографически и обозначим j-е множество как σ_j. Каждому набору $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_d)$ длины d поставим в соответствие набор длины r

$$\widehat{\boldsymbol{\tau}} = \Big(\widehat{\tau}_1, \ldots, \widehat{\tau}_r\Big), \qquad \widehat{\tau}_j = \sum_{i \in \sigma_j} \tau_i, \qquad r = \binom{d}{p}. \tag{2.66}$$

Тогда путь $\mathfrak{T} : s \to \boldsymbol{\tau}(s)$ даст нам при помощи (2.66) путь $\widehat{\mathfrak{T}} : s \to \widehat{\boldsymbol{\tau}}(s)$, также удовлетворяющий соотношению

$$\widehat{\tau}_1(s) + \ldots + \widehat{\tau}_r(s) = 0, \quad \text{ для всех } s.$$

Наконец, с решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ будем ассоциировать решетку $\widehat{\Lambda} = \wedge^p(\Lambda)$, состоящую из всех линейных целочисленных комбинаций поливекторов $\mathbf{v}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_p$, таких что $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \in \Lambda$.

Предложение 12. *Для любых* Λ *и* $\mathfrak{T}$

$$\underline{\Psi}_p(\Lambda, \mathfrak{T}) = \underline{\Psi}_1(\widehat{\Lambda}, \widehat{\mathfrak{T}}) = \underline{\psi}_1(\widehat{\Lambda}, \widehat{\mathfrak{T}}) \quad \text{ и } \quad \overline{\Psi}_p(\Lambda, \mathfrak{T}) = \overline{\Psi}_1(\widehat{\Lambda}, \widehat{\mathfrak{T}}) = \overline{\psi}_1(\widehat{\Lambda}, \widehat{\mathfrak{T}}).$$

Доказательство. Обозначим через $\lambda_i(M)$ последовательный минимум с номером i тела M относительно решетки Λ, если $M \subset \mathbb{R}^d$, и относительно решетки $\widehat{\Lambda}$, если $M \in \wedge^p(\mathbb{R}^d)$.

Матрица $D_{\widehat{\boldsymbol{\tau}}}$ совпадает с p-й присоединенной матрицей для матрицы $D_{\boldsymbol{\tau}}$:

$$D_{\widehat{\boldsymbol{\tau}}} = D_{\boldsymbol{\tau}}^{(p)}.$$

Это означает, что $D_{\widehat{\boldsymbol{\tau}}}\mathcal{B}_\infty^r$ не слишком отличается от p-го присоединенного тела Малера для тела $D_{\boldsymbol{\tau}}\mathcal{B}_\infty^d$ (см. [Ma3]), то есть с некоторой положительной константой c, зависящей только от d,

$$c^{-1} D_{\widehat{\boldsymbol{\tau}}}\mathcal{B}_\infty^r \subset [D_{\boldsymbol{\tau}}\mathcal{B}_\infty^d]^{(p)} \subset c D_{\widehat{\boldsymbol{\tau}}}\mathcal{B}_\infty^r. \tag{2.67}$$

В книге [Sch2] множество $D_{\widehat{\boldsymbol{\tau}}}\mathcal{B}_\infty^r$ называется p-м псевдо-присоединенным параллелепипедом для параллелепипеда $D_{\boldsymbol{\tau}}\mathcal{B}_\infty^d$.

Из теории присоединенных тел Малера следует, что

$$\lambda_1\left([D_{\boldsymbol{\tau}}\mathcal{B}^d_\infty]^{(p)}\right) \asymp \prod_{i=1}^{p}\lambda_i\left(D_{\boldsymbol{\tau}}\mathcal{B}^d_\infty\right) \tag{2.68}$$

где константа зависит лишь от d. Из (2.67) и (2.68) получаем

$$\ln\left(\lambda_1\left(D_{\widehat{\boldsymbol{\tau}}(s)}\mathcal{B}^r_\infty\right)\right) = \sum_{i=1}^{p}\ln\left(\lambda_i\left(D_{\boldsymbol{\tau}(s)}\mathcal{B}^d_\infty\right)\right) + O(1),$$

откуда

$$\psi_1(\widehat{\Lambda},\widehat{\mathfrak{T}},s) = \sum_{i=1}^{p}\psi_i(\Lambda,\mathfrak{T},s) + o(1).$$

Остается взять $\liminf$ и $\limsup$ от обеих частей при $s\to\infty$. $\square$

2.2.5 Диофантовы экспоненты в терминах экспонент Шмидта–Зуммерера

Пусть $\boldsymbol{\ell}_1,\ldots,\boldsymbol{\ell}_d$, $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_d$ — как в пункте 2.2.1. Положим, как и в предыдущем параграфе,

$$T = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ \Theta & E_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(T^{-1})^{\intercal} = \begin{pmatrix} E_m & -\Theta^{\intercal} \\ 0 & E_n \end{pmatrix},$$

то есть, как отмечалось там же, базисы $\boldsymbol{\ell}_1,\ldots,\boldsymbol{\ell}_m,\mathbf{e}_{m+1},\ldots,\mathbf{e}_d$ и $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m,\boldsymbol{\ell}_{m+1},\ldots,\boldsymbol{\ell}_d$ двойственны.

Зададим решетку Λ и путь $\mathfrak{T}$ соотношениями (1.18) и (1.19). То есть

$$\Lambda = T^{-1}\mathbb{Z}^d = \left\{\Big(\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{z}\rangle,\ldots,\langle\mathbf{e}_m,\mathbf{z}\rangle,\langle\boldsymbol{\ell}_{m+1},\mathbf{z}\rangle,\ldots,\langle\boldsymbol{\ell}_d,\mathbf{z}\rangle\Big)^{\intercal}\in\mathbb{R}^d \,\middle|\, \mathbf{z}\in\mathbb{Z}^d\right\} \tag{2.69}$$

и

$$\tau_1(s) = \ldots = \tau_m(s) = s, \quad \tau_{m+1}(s) = \ldots = \tau_d(s) = -ms/n.$$

Экспоненты Шмидта–Зуммерера $\underline{\psi}_p$, $\overline{\psi}_p$, соответствующие таким Λ и $\mathfrak{T}$, и экспоненты β_p, α_p суть две различные точки зрения на одно и тоже явление. То же самое можно сказать об экспонентах $\underline{\Psi}_p$, $\overline{\Psi}_p$ и $\mathfrak{b}_p$, $\mathfrak{a}_p$. Явная связь между ними описывается следующими двумя предложениями, в которых мы пишем β_p, α_p, $\mathfrak{b}_p$, $\mathfrak{a}_p$ вместо $\beta_p(\Theta)$, $\alpha_p(\Theta)$, $\mathfrak{b}_p(\Theta)$, $\mathfrak{a}_p(\Theta)$, считая, что матрица Θ фиксирована.

Предложение 13. *Справедливо равенство*

$$(1+\beta_p)(1+\underline{\psi}_p) = (1+\alpha_p)(1+\overline{\psi}_p) = d/n. \tag{2.70}$$

Доказательство. Параллелепипед в $\mathbb{R}^d$, задаваемый неравенствами (1.3), можно записать как

$$M_\gamma(t) = \Big\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, \max_{1\leqslant j\leqslant m} |\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{z}\rangle| \leqslant t,\ \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\langle \boldsymbol{\ell}_{m+i}, \mathbf{z}\rangle| \leqslant t^{-\gamma} \Big\},$$

где $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$.

Поэтому β_p (соотв. α_p) равняется супремуму вещественных чисел γ, для которых существует сколь угодно большое t, такое что (соотв. для которых при любом достаточно большом t) параллелепипед $M_\gamma(t)$ содержит p линейно независимых целых точек.

Таким образом, рассматривая параллелепипеды

$$P_\gamma(t) = T^{-1}M_\gamma(t) = \Big\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, \max_{1\leqslant j\leqslant m} |\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{z}\rangle| \leqslant t,\ \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\langle \mathbf{e}_{m+i}, \mathbf{z}\rangle| \leqslant t^{-\gamma} \Big\}, \tag{2.71}$$

видим, что

$$\begin{aligned} \beta_p &= \limsup_{t\to+\infty} \big\{ \gamma \in \mathbb{R} \,\big|\, \lambda_p(P_\gamma(t)) = 1 \big\}, \\ \alpha_p &= \liminf_{t\to+\infty} \big\{ \gamma \in \mathbb{R} \,\big|\, \lambda_p(P_\gamma(t)) = 1 \big\}, \end{aligned} \tag{2.72}$$

где $\lambda_p(P_\gamma(t))$ — p-й минимум параллелепипеда $P_\gamma(t)$ относительно решетки Λ.

Но $P_{m/n}(t) = D_{\boldsymbol{\tau}(\ln t)}\mathcal{B}^d_\infty$, то есть

$$\begin{aligned} \underline{\psi}_p(\Lambda, \mathfrak{T}) &= \liminf_{t\to+\infty} \frac{\ln(\lambda_p(P_{m/n}(t)))}{\ln t}, \\ \overline{\psi}_p(\Lambda, \mathfrak{T}) &= \limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln(\lambda_p(P_{m/n}(t)))}{\ln t}. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Несложные вычисления показывают, что

$$P_\gamma(t) = t^{\frac{m-n\gamma}{d}} P_{m/n}\big(t^{\frac{n+n\gamma}{d}}\big),$$

то есть

$$\lambda_p(P_\gamma(t)) = (t')^{\frac{-m+n\gamma}{n+n\gamma}} \lambda_p\big(P_{m/n}(t')\big),$$

где $t' = t^{\frac{n+n\gamma}{d}}$. Следовательно, равенство

$$\lambda_p(P_\gamma(t)) = 1$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$1 - \frac{d}{n + n\gamma} + \frac{\ln(\lambda_p(P_{m/n}(t')))}{\ln t'} = 0.$$

Отсюда ввиду соотношений (2.72), (2.73) получаем, что

$$\beta_p = \limsup_{t\to+\infty} \left\{ \frac{d}{n} \left(1 + \frac{\ln(\lambda_p(P_{m/n}(t)))}{\ln t} \right)^{-1} - 1 \right\} = \frac{d}{n} \left(1 + \underline{\psi}_p \right)^{-1} - 1$$

и

$$\alpha_p = \liminf_{t\to+\infty} \left\{ \frac{d}{n} \left(1 + \frac{\ln(\lambda_p(P_{m/n}(t)))}{\ln t} \right)^{-1} - 1 \right\} = \frac{d}{n} \left(1 + \overline{\psi}_p \right)^{-1} - 1,$$

откуда немедленно следует (2.70). □

Предложение 14. *Пусть* $\varkappa_p = \min(p, \frac{m}{n}(d-p))$. *Тогда*

$$(1 + \mathfrak{b}_p)(\varkappa_p + \underline{\Psi}_p) = (1 + \mathfrak{a}_p)(\varkappa_p + \overline{\Psi}_p) = d/n. \tag{2.74}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{L}_\sigma$, $\mathbf{E}_\sigma$, $\mathcal{J}_k$, $\mathcal{J}'_k$ — как в пункте 2.2.1.

Поскольку $T^{-1}\boldsymbol{\ell}_i = \mathbf{e}_i$ и $T^{-1}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j$ при $1 \leqslant i \leqslant m$ и $m+1 \leqslant j \leqslant d$, имеем

$$(T^{-1})^{(k+k')}(\mathbf{L}_\sigma \wedge \mathbf{E}_{\sigma'}) = \mathbf{E}_\sigma \wedge \mathbf{E}_{\sigma'}, \qquad \text{для каждого } \sigma \in \mathcal{J}_k,\ \sigma' \in \mathcal{J}'_{k'}, \tag{2.75}$$

где $(T^{-1})^{(k+k')}$ — $(k+k')$-я присоединенная матрица для T^{-1}. Далее, поскольку $\Lambda = T^{-1}\mathbb{Z}^d$, имеем

$$\widehat{\Lambda} = \wedge^p(\Lambda) = (T^{-1})^{(p)}(\wedge^p(\mathbb{Z}^d)). \tag{2.76}$$

Отсюда для каждого $\mathbf{Z} \in \wedge^p(\mathbb{Z}^d)$ и каждых $\sigma \in \mathcal{J}_k$, $\sigma' \in \mathcal{J}'_{d-p-k}$ (где k в пределах $k_0 \leqslant k \leqslant k_1$), получаем, что

$$|\mathbf{L}_\sigma \wedge \mathbf{E}_{\sigma'} \wedge \mathbf{Z}| = |(T^{-1})^{(d-p)}(\mathbf{L}_\sigma \wedge \mathbf{E}_{\sigma'}) \wedge (T^{-1})^{(p)}\mathbf{Z}| = |\mathbf{E}_\sigma \wedge \mathbf{E}_{\sigma'} \wedge \mathbf{Z}'|, \tag{2.77}$$

где $\mathbf{Z}' \in \widehat{\Lambda}$. Здесь, помимо равенств (2.75), (2.76), мы воспользовались тем фактом, что для каждых $\mathbf{V} \in \wedge^p(\mathbb{R}^d)$, $\mathbf{W} \in \wedge^{d-p}(\mathbb{R}^d)$ внешнее произведение $\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}$ является вещественным числом и

$$|\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}| = |T^{(p)}\mathbf{V} \wedge T^{(d-p)}\mathbf{W}|,$$

при условии, что $\det T = 1$.

Из равенства (2.77) и предложения 9 заключаем, что $\mathfrak{b}_p$ (соотв. $\mathfrak{a}_p$) равняется супремуму вещественных чисел γ, для которых существует сколь угодно большое t, такое что (соотв. для которых при любом достаточно большом t) система неравенств

$$\max_{\substack{\sigma\in\mathcal{J}_k\\ \sigma'\in\mathcal{J}'_{d-p-k}}} |\mathbf{E}_\sigma\wedge\mathbf{E}_{\sigma'}\wedge\mathbf{Z}| \leqslant t^{1-(k-k_0)(1+\gamma)}, \qquad k=k_0,\dots,k_1, \tag{2.78}$$

имеет ненулевое решение $\mathbf{Z}\in\widehat{\Lambda}$.

Неравенства (2.78) задают параллелепипед

$$\begin{multline}\widehat{P}_\gamma(t)=\Bigg\{\mathbf{Z}\in\wedge^p(\mathbb{R}^d)\ \Bigg|\ \max_{\substack{\sigma\in\mathcal{J}_{m-k}\\ \sigma'\in\mathcal{J}'_{p-m+k}}} |\langle\mathbf{E}_\sigma\wedge\mathbf{E}_{\sigma'},\mathbf{Z}\rangle| \leqslant \\ \leqslant t^{1-(k-k_0)(1+\gamma)},\ k=k_0,\dots,k_1\Bigg\}, \tag{2.79}\end{multline}$$

где $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ — скалярное произведение в $\wedge^p(\mathbb{R}^d)$. По аналогии с соотношениями (2.72) можно написать

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_p&=\limsup_{t\to+\infty}\Big\{\gamma\in\mathbb{R}\ \Big|\ \lambda_1\big(\widehat{P}_\gamma(t)\big)=1\Big\},\\ \mathfrak{a}_p&=\liminf_{t\to+\infty}\Big\{\gamma\in\mathbb{R}\ \Big|\ \lambda_1\big(\widehat{P}_\gamma(t)\big)=1\Big\},\end{aligned} \tag{2.80}$$

где $\lambda_1\big(\widehat{P}_\gamma(t)\big)$ — первый минимум параллелепипеда $\widehat{P}_\gamma(t)$ относительно решетки $\widehat{\Lambda}$.

Рассмотрим путь $\widehat{\mathfrak{T}}$, определяемый по $\mathfrak{T}$ при помощи (2.66). Тогда

$$\widehat{\tau}_j(s)=\sum_{i\in\sigma_j}\tau_i(s),$$

и если $\sigma_j\cap\{1,\dots,m\}\in\mathcal{J}_{m-k}$, то

$$\begin{multline}\widehat{\tau}_j(s)=(m-k)s-\frac{(p-(m-k))m}{n}s= \\ =\left(\frac{d}{n}(k_0-k)+\varkappa_p\right)s=(1-(k-k_0)(1+\gamma_0))\ln t,\end{multline}$$

где

$$t=e^{\varkappa_p s},\qquad \gamma_0=\frac{d}{n\varkappa_p}-1.$$

Стало быть,
$$\widehat{P}_{\gamma_0}(t) = D_{\widehat{\boldsymbol{\tau}}(s)}\mathcal{B}^r_\infty, \tag{2.81}$$
где, как и прежде, $r = \binom{d}{p}$.

Таким образом, аналогично равенствам (2.73), получаем равенства
$$\begin{aligned}
\underline{\psi}_1(\widehat{\Lambda}, \widehat{\mathfrak{T}}) &= \liminf_{t\to+\infty} \frac{\varkappa_p \ln(\lambda_1(\widehat{P}_{\gamma_0}(t)))}{\ln t}\,,\\
\overline{\psi}_1(\widehat{\Lambda}, \widehat{\mathfrak{T}}) &= \limsup_{t\to+\infty} \frac{\varkappa_p \ln(\lambda_1(\widehat{P}_{\gamma_0}(t)))}{\ln t}\,.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Оставшаяся часть доказательства аналогична соответствующей части доказательства предложения 13. Заметим, что
$$\widehat{P}_\gamma(t) = t^{1-\frac{1+\gamma}{1+\gamma_0}}\widehat{P}_{\gamma_0}\big(t^{\frac{1+\gamma}{1+\gamma_0}}\big).$$
Отсюда следует, что
$$\lambda_1\big(\widehat{P}_\gamma(t)\big) = (t')^{1-\frac{1+\gamma_0}{1+\gamma}}\lambda_1\big(\widehat{P}_{\gamma_0}(t')\big),$$
где $t' = t^{\frac{1+\gamma}{1+\gamma_0}}$. Следовательно, равенство
$$\lambda_1\big(\widehat{P}_\gamma(t)\big) = 1$$
справедливо тогда и только тогда, когда
$$1 - \frac{1+\gamma_0}{1+\gamma} + \frac{\ln(\lambda_1(\widehat{P}_{\gamma_0}(t')))}{\ln t'} = 0.$$
Отсюда ввиду соотношений (2.80), (2.82) получаем, что
$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}_p = \limsup_{t\to+\infty}\left((1+\gamma_0)\left(1+\frac{\ln(\lambda_1(\widehat{P}_{\gamma_0}(t)))}{\ln t}\right)^{-1} - 1\right) &=\\
= (1+\gamma_0)\left(1+\varkappa_p^{-1}\underline{\psi}_1(\widehat{\Lambda}, \widehat{\mathfrak{T}})\right)^{-1} - 1&
\end{aligned}$$
и
$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_p = \liminf_{t\to+\infty}\left((1+\gamma_0)\left(1+\frac{\ln(\lambda_1(\widehat{P}_{\gamma_0}(t)))}{\ln t}\right)^{-1} - 1\right) &=\\
= (1+\gamma_0)\left(1+\varkappa_p^{-1}\overline{\psi}_1(\widehat{\Lambda}, \widehat{\mathfrak{T}})\right)^{-1} - 1.&
\end{aligned}$$

Стало быть,

$$(1+\mathfrak{b}_p)(\varkappa_p+\underline{\psi}_1(\widehat{\Lambda},\widehat{\mathfrak{T}}))=(1+\mathfrak{a}_p)(\varkappa_p+\overline{\psi}_1(\widehat{\Lambda},\widehat{\mathfrak{T}}))=d/n.$$

Остается применить предложение 12. $\square$

Замечание 2.1. Из равенства (2.81) следует, что объем параллелепипеда $\widehat{P}_{\gamma_0}(t)$ равен 2^r. Следовательно, по теореме Минковского о выпуклом теле параллелепипед $\widehat{P}_{\gamma_0}(t)$ содержит ненулевую точку решетки $\widehat{\Lambda}$. Отсюда, принимая во внимание (2.80), получаем, что

$$\mathfrak{b}_p\geqslant\mathfrak{a}_p\geqslant\gamma_0=\frac{d}{n\varkappa_p}-1,$$

или, в терминах экспонент Шмидта–Зуммерера,

$$-\varkappa_p\leqslant\underline{\Psi}_p\leqslant\overline{\Psi}_p\leqslant 0.$$

2.2.6 Транспонированная система

Подпространство $\mathcal{L}^n$, натянутое на $\boldsymbol{\ell}_{m+1},\ldots,\boldsymbol{\ell}_d$, совпадает с пространством решений системы

$$-\Theta^\intercal\mathbf{y}=\mathbf{x}.$$

Как мы уже не раз отмечали, оно совпадает с ортогональным дополнением к $\mathcal{L}^m$. Положим

$$\beta_p^*=\beta_p(\Theta^\intercal),\quad \alpha_p^*=\alpha_p(\Theta^\intercal),\quad \mathfrak{b}_p^*=\mathfrak{b}_p(\Theta^\intercal),\quad \mathfrak{a}_p^*=\mathfrak{a}_p(\Theta^\intercal)$$

и будем, как и прежде, из соображений компактности писать β_p, α_p, $\mathfrak{b}_p$, $\mathfrak{a}_p$ вместо $\beta_p(\Theta)$, $\alpha_p(\Theta)$, $\mathfrak{b}_p(\Theta)$, $\mathfrak{a}_p(\Theta)$. Очевидно, экспоненты, соответствующие матрице $\Theta^\intercal$, совпадают с экспонентами, соответствующими матрице $-\Theta^\intercal$. Решетка, построенная для $-\Theta^\intercal$ точно так же, как была построена решетка Λ для матрицы Θ, будет иметь вид

$$\begin{pmatrix}E_n & 0\\ \Theta^\intercal & E_m\end{pmatrix}\mathbb{Z}^d.$$

Но перестановка первых n и последних m координат делает из этой решетки решетку

$$\begin{pmatrix}E_m & \Theta^\intercal\\ 0 & E_n\end{pmatrix}\mathbb{Z}^d=T^\intercal\mathbb{Z}^d=\Lambda^*,$$

двойственную к решетке Λ. По этой причине мы будем ассоциировать с $\Theta^\intercal$ решетку Λ^*. Наиболее естественным способом задать путь, которому будут соответствовать экспоненты Шмидта–Зуммерера, ассоциированные с матрицей $\Theta^{\intercal}$, представляется следующий. Учитывая описанную только что перестановку координат, рассмотрим путь $\mathfrak{T}^* : s \to \boldsymbol{\tau}^*(s)$, определяемый равенствами

$$\tau_1^*(s) = \ldots = \tau_m^*(s) = -ns/m, \quad \tau_{m+1}^*(s) = \ldots = \tau_d^*(s) = s. \tag{2.83}$$

Полагая

$$\underline{\psi}_p^* = \underline{\psi}_p(\Lambda^*, \mathfrak{T}^*), \quad \overline{\psi}_p^* = \overline{\psi}_p(\Lambda^*, \mathfrak{T}^*),$$
$$\underline{\Psi}_p^* = \underline{\Psi}_p(\Lambda^*, \mathfrak{T}^*), \quad \overline{\Psi}_p^* = \overline{\Psi}_p(\Lambda^*, \mathfrak{T}^*),$$

видим, что любое утверждение, доказанное для произвольной матрицы Θ, о величинах β_p, α_p, $\mathfrak{b}_p$, $\mathfrak{a}_p$, $\underline{\psi}_p$, $\overline{\psi}_p$, $\underline{\Psi}_p$, $\overline{\Psi}_p$ остается справедливым при замене Θ на $\Theta^{\intercal}$, сопровождаемой заменой величин n, m, β_p, α_p, $\mathfrak{b}_p$, $\mathfrak{a}_p$, $\underline{\psi}_p$, $\overline{\psi}_p$ на m, n, β_p^*, α_p^*, $\mathfrak{b}_p^*$, $\mathfrak{a}_p^*$, $\underline{\psi}_p^*$, $\overline{\psi}_p^*$, $\underline{\Psi}_p^*$, $\overline{\Psi}_p^*$, соответственно. В частности, имеют место аналоги предложений 13, 14:

Предложение 15. *Справедливо равенство*

$$(1 + \beta_p^*)(1 + \underline{\psi}_p^*) = (1 + \alpha_p^*)(1 + \overline{\psi}_p^*) = d/m. \tag{2.84}$$

Предложение 16. *Пусть* $\varkappa_p^* = \min(p, \frac{n}{m}(d-p))$. *Тогда*

$$(1 + \mathfrak{b}_p^*)(\varkappa_p^* + \underline{\Psi}_p^*) = (1 + \mathfrak{a}_p^*)(\varkappa_p^* + \overline{\Psi}_p^*) = d/m. \tag{2.85}$$

Далее, так же, как и равенства (2.73), можно доказать равенства

$$\underline{\psi}_p^* = \liminf_{t\to+\infty} \frac{\ln(\lambda_p^*(P_{m/n}(t^{-n/m})))}{\ln t}, \qquad \overline{\psi}_p^* = \limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln(\lambda_p^*(P_{m/n}(t^{-n/m})))}{\ln t}, \tag{2.86}$$

где λ_p^* — p-й минимум относительно решетки Λ^*.

Покажем, что величины $\underline{\psi}_p^*$, $\overline{\psi}_p^*$ тесно связаны с величинами $\underline{\psi}_{d-p}$, $\overline{\psi}_{d-p}$ (которые, как и прежде, соответствуют решетке Λ и пути $\mathfrak{T}$, определенным соотношениями (1.18) и (1.19)). Из определения $P_\gamma(t)$ следует, что существует такая положительная константа c, зависящая лишь от Θ, что

$$c^{-1}P_\gamma(t^{-1}) \subseteq P_\gamma(t)^* \subseteq cP_\gamma(t^{-1}),$$

где $P_\gamma(t)^*$ — многогранник, двойственный $P_\gamma(t)$. Кроме того, из теории присоединенных тел Малера следует, что

$$\lambda_p^*(P_\gamma(t)^*)\lambda_{d+1-p}(P_\gamma(t)) \asymp 1,$$

где константа зависит лишь от d. Следовательно,

$$\lambda_p^*(P_\gamma(t^{-1}))\lambda_{d+1-p}(P_\gamma(t)) \asymp 1 \tag{2.87}$$

Применяя (2.86), (2.87) и (2.73) с $d+1-p$ вместо p, получаем

Предложение 17. *Справедливы равенства*

$$\underline{\psi}_p^* = -\frac{n}{m}\overline{\psi}_{d+1-p} \quad \text{и} \quad \overline{\psi}_p^* = -\frac{n}{m}\underline{\psi}_{d+1-p}.$$

Следствие 10. *Справедливо равенство*

$$(1+\beta_p^*)(m - n\overline{\psi}_{d+1-p}) = (1+\alpha_p^*)(m - n\underline{\psi}_{d+1-p}) = d.$$

Доказательство. Следует из предложений 15 и 17. □

Следствие 11. *Справедливы равенства*

$$\alpha_{d+1-p}\beta_p^* = 1 \quad \text{и} \quad \alpha_{d+1-p}^*\beta_p = 1.$$

Доказательство. Следует из предложения 13 и следствия 10. □

Чтобы доказать соответствующее соотношение для экспонент второго типа, пойдем в обратном направлении и докажем

Предложение 18. *Справедливы равенства*

$$\mathfrak{b}_p = \mathfrak{b}_{d-p}^* \quad \text{и} \quad \mathfrak{a}_p = \mathfrak{a}_{d-p}^*.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{L}_\sigma$, $\mathbf{E}_\sigma$, $\mathcal{J}_k$, $\mathcal{J}'_k$ — как в пункте 2.2.1.

Напомним, что базисы $\boldsymbol{\ell}_1,\ldots,\boldsymbol{\ell}_m,\mathbf{e}_{m+1},\ldots,\mathbf{e}_d$ и $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m,\boldsymbol{\ell}_{m+1},\ldots,\boldsymbol{\ell}_d$ двойственны. Поэтому, если $\sigma\in\mathcal{J}_k$, $\sigma'\in\mathcal{J}'_{k'}$, то

$$*(\mathbf{L}_\sigma\wedge\mathbf{E}_{\sigma'}) = \pm\mathbf{E}_{\overline{\sigma}}\wedge\mathbf{L}_{\overline{\sigma}'},$$

где $*$ означает звезду Ходжа,

$$\overline{\sigma} = \{1,\ldots,m\}\backslash\sigma, \qquad \overline{\sigma}' = \{m+1,\ldots,d\}\backslash\sigma',$$

а знак зависит от четности соответствующей перестановки. Следовательно, для любых $\sigma\in\mathcal{J}_k$, $\sigma'\in\mathcal{J}'_{d-p-k}$ и любого $\mathbf{Z}\in\wedge^p(\mathbb{Z}^d)$ мы имеем

$$|\mathbf{L}_\sigma\wedge\mathbf{E}_{\sigma'}\wedge\mathbf{Z}| = |\mathbf{E}_{\overline{\sigma}}\wedge\mathbf{L}_{\overline{\sigma}'}\wedge *\mathbf{Z}|.$$

Таким образом,

$$\max_{\substack{\sigma\in\mathcal{J}_k\\ \sigma'\in\mathcal{J}'_{d-p-k}}} |\mathbf{L}_\sigma \wedge \mathbf{E}_{\sigma'} \wedge \mathbf{Z}| = \max_{\substack{\sigma'\in\mathcal{J}'_{p-m+k}\\ \sigma\in\mathcal{J}_{m-k}}} |\mathbf{L}_{\sigma'} \wedge \mathbf{E}_{\sigma} \wedge *\mathbf{Z}|, \tag{2.88}$$

для любого $\mathbf{Z} \in \wedge^p(\mathbb{Z}^d)$.

Положим $k_0^* = \max(0, n-(d-p))$, $k_1^* = \min(n,p)$. Тогда $k_0^* = k_0 + p - m$, $k_1^* = k_1 + p - m$, а неравенство $k_0 \leqslant k \leqslant k_1$ равносильно неравенству $k_0^* \leqslant p - m + k \leqslant k_1^*$. Стало быть, из (2.88) следует, что (2.45) равносильно

$$\max_{\substack{\sigma'\in\mathcal{J}'_k\\ \sigma\in\mathcal{J}_{p-k}}} |\mathbf{L}_{\sigma'} \wedge \mathbf{E}_\sigma \wedge *\mathbf{Z}| \leqslant t^{1-(k-k_0^*)(1+\gamma)}, \qquad k = k_0^*, \ldots, k_1^*. \tag{2.89}$$

Остается применить предложение 9 и соотношение $*(\wedge^p(\mathbb{Z}^d)) = \wedge^{d-p}(\mathbb{Z}^d)$. □

Следствие 12. *Пусть* $\varkappa_p^{**} = \min(d-p, \frac{m}{n}p) = \frac{m}{n}\varkappa_p^*$. *Тогда*

$$(1+\mathfrak{b}_p^*)(\varkappa_p^{**} + \underline{\Psi}_{d-p}) = (1+\mathfrak{a}_p^*)(\varkappa_p^{**} + \overline{\Psi}_{d-p}) = d/n.$$

Доказательство. Следует из предложений 14 и 18. □

Следствие 13. *Справедливы равенства*

$$\underline{\Psi}_p^* = \frac{n}{m}\underline{\Psi}_{d-p} \quad \text{и} \quad \overline{\Psi}_p^* = \frac{n}{m}\overline{\Psi}_{d-p}\,.$$

Доказательство. Следует из предложения 16 и следствия 12. □

2.2.7 Основные результаты в терминах экспонент Шмидта–Зуммерера

Перепишем неравенство (1.6) в терминах экспонент Шмидта–Зуммерера. Ввиду предложений 18 и 14 оно превращается в

$$\underline{\Psi}_{d-1} \leqslant \frac{\underline{\Psi}_1}{d-1}\,, \tag{2.90}$$

что совпадает с одним из утверждений следствия 8. Но у нас уже есть промежуточный вариант этого неравенства! Это

$$\frac{\underline{\Psi}_{p+1}}{d-p-1} \leqslant \frac{\underline{\Psi}_p}{d-p}\,, \tag{2.91}$$

одно из утверждений следствия 7. Переписывание в терминах промежуточных диофантовых экспонент соответствующих утверждений следствия 7, в котором в качестве Λ и $\mathfrak{T}$ берутся решетка и путь, определяемые соотношениями (1.18), (1.19), дает теорему 2.11.

Как видим, описание разбиения неравенств Дайсона и Апфельбека на промежуточные неравенства в терминах экспонент Шмидта–Зуммерера, данное в следствии 7, гораздо более элегантно выглядит, чем описание в терминах диофантовых экспонент. Еще одна привлекательная черта этого описания заключается в независимости от конкретных значений n и m, если фиксирована их сумма d. Более того, следствие 7 имеет место для всех решеток и путей, в то время как теорема 2.11 привязана к конкретному их выбору.

Переформулируем теперь теоремы 2.12, 2.13 в терминах экспонент Шмидта–Зуммерера. Напомним, что, как мы отмечали в замечании 2.1,

$$-1 \leqslant \underline{\Psi}_1 \leqslant \overline{\Psi}_1 \leqslant 0.$$

Теорема 2.12 переформулируется следующим образом.

Теорема 2.14. *Предположим, что пространство целочисленных решений системы* (1.1) *не является одномерной решеткой. Тогда*

$$\underline{\Psi}_2 \leqslant \begin{cases} 2\underline{\Psi}_1 + d \cdot \dfrac{\overline{\Psi}_1 - \underline{\Psi}_1}{n + n\overline{\Psi}_1}\,, & \textit{при} \ \ \overline{\Psi}_1 \neq -1, \\[2ex] 2\underline{\Psi}_1 + d \cdot \dfrac{\overline{\Psi}_1 - \underline{\Psi}_1}{m - n\overline{\Psi}_1}\,. & \end{cases} \tag{2.92}$$

Теорема 2.13 переформулируется следующим образом.

Теорема 2.15. *Справедливы неравенства*

$$\overline{\Psi}_2 \leqslant \begin{cases} \dfrac{(d-2)\overline{\Psi}_1}{(n-1) + n\overline{\Psi}_1}\,, & \textit{при} \ \ \overline{\Psi}_1 \geqslant \dfrac{m-n}{2n}\,, \\[2ex] \dfrac{(d-2)\overline{\Psi}_1}{(m-1) - n\overline{\Psi}_1}\,, & \textit{при} \ \ \overline{\Psi}_1 \leqslant \dfrac{m-n}{2n}\,. \end{cases} \tag{2.93}$$

Как видим, данная точка зрения позволяет не выделять случай $m = 1$. В следующем пункте мы доказываем теоремы 2.14, 2.15.

2.2.8 Доказательство теорем 2.14, 2.15

Пусть Λ и $\mathfrak{T}$ заданы соотношениями (1.18) и (1.19). Следующее наблюдение является ключевым для доказательства теорем 2.14, 2.15.

Лемма 2.12. *Предположим, что $s, s' \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяют условиям*

$$\lambda_1(\mathcal{B}(s))\mathcal{B}(s) \subseteq \lambda_1(\mathcal{B}(s'))\mathcal{B}(s'), \tag{2.94}$$

$$\lambda_1(\mathcal{B}(s')) = \lambda_2(\mathcal{B}(s')). \tag{2.95}$$

Тогда

$$\psi_2(s) \leqslant \begin{cases} \psi_1(s) + d \cdot \dfrac{\psi_1(s') - \psi_1(s)}{n + n\psi_1(s')}\,, & \text{при} \ \ s' \leqslant s \ \ \text{и} \ \ \psi_1(s') \neq -1, \\ \psi_1(s) + d \cdot \dfrac{\psi_1(s') - \psi_1(s)}{m - n\psi_1(s')}\,, & \text{при} \ \ s' \geqslant s. \end{cases} \tag{2.96}$$

Доказательство. Если $s = s'$, то в силу (2.95) имеем $\psi_1(s) = \psi_2(s)$, откуда следует (2.96). Поэтому можно считать, что $s \neq s'$.

Напомним, что

$$\mathcal{B}(s) = \Big\{\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d)^\intercal \in \mathbb{R}^d \ \Big| \ \max_{1\leqslant j\leqslant m} |z_j| \leqslant e^s, \ \max_{1\leqslant i\leqslant n} |z_i| \leqslant e^{-ms/n}\Big\}.$$

То есть включение (2.94) означает, что

$$\lambda_1(\mathcal{B}(s))e^s \leqslant \lambda_1(\mathcal{B}(s'))e^{s'}, \quad \lambda_1(\mathcal{B}(s))e^{-ms/n} \leqslant \lambda_1(\mathcal{B}(s'))e^{-ms'/n}. \tag{2.97}$$

Применяя первое из неравенств (2.97) при $s' < s$ и второе — при $s' > s$, получаем в обоих случаях, что

$$\lambda_1(\mathcal{B}(s)) < \lambda_1(\mathcal{B}(s')). \tag{2.98}$$

Неравенства (2.97) не могут быть одновременно строгими, ибо это противоречило бы определению первого минимума. Стало быть, в силу неравенства (2.98) заключаем из (2.97), что при $s' < s$

$$\lambda_1(\mathcal{B}(s))e^s = \lambda_1(\mathcal{B}(s'))e^{s'}, \quad \lambda_1(\mathcal{B}(s))e^{-ms/n} < \lambda_1(\mathcal{B}(s'))e^{-ms'/n}, \tag{2.99}$$

а при $s' > s$

$$\lambda_1(\mathcal{B}(s))e^s < \lambda_1(\mathcal{B}(s'))e^{s'}, \quad \lambda_1(\mathcal{B}(s))e^{-ms/n} = \lambda_1(\mathcal{B}(s'))e^{-ms'/n}. \tag{2.100}$$

И на границе $\lambda_1(\mathcal{B}(s))\mathcal{B}(s)$, и на границе $\lambda_1(\mathcal{B}(s'))\mathcal{B}(s')$ есть ненулевые целые точки, в то время как таких точек нет во внутренностях этих параллелепипедов. Но первые m координат каждой из точек решетки Λ суть целые числа (см. (2.69)), поэтому обе части равенства из (2.99) должны быть равны натуральному числу. Что же касается равенства из (2.100), обе его части должны быть меньше единицы, поскольку $\lambda_1(\mathcal{B}(s)) \leqslant 1$ (по теореме Минковского о выпуклом теле). Стало быть,

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathcal{B}(s))e^{s} &= \lambda_1(\mathcal{B}(s'))e^{s'} \geqslant 1, && \text{при } s' < s, \\ \lambda_1(\mathcal{B}(s))e^{-ms/n} &= \lambda_1(\mathcal{B}(s'))e^{-ms'/n} < 1, && \text{при } s' > s, \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} s(1+\psi_1(s)) &= s'(1+\psi_1(s')) \geqslant 0, && \text{при } s' < s, \\ s(\psi_1(s) - m/n) &= s'(\psi_1(s') - m/n) < 0, && \text{при } s' > s. \end{aligned} \tag{2.101}$$

Далее, ясно, что

$$\mathcal{B}(s') \subset \begin{cases} e^{-m(s'-s)/n}\mathcal{B}(s), & \text{при } s' < s, \\ e^{s'-s}\mathcal{B}(s), & \text{при } s' > s. \end{cases}$$

Отсюда в силу (2.95) следует, что

$$\begin{aligned} \lambda_2(\mathcal{B}(s))e^{-ms/n} &\leqslant \lambda_2(\mathcal{B}(s'))e^{-ms'/n} = \lambda_1(\mathcal{B}(s'))e^{-ms'/n}, && \text{при } s' < s, \\ \lambda_2(\mathcal{B}(s))e^{s} &\leqslant \lambda_2(\mathcal{B}(s'))e^{s'} = \lambda_1(\mathcal{B}(s'))e^{s'}, && \text{при } s' > s, \end{aligned}$$

или, иными словами,

$$\begin{aligned} s(\psi_2(s) - m/n) &\leqslant s'(\psi_1(s') - m/n), && \text{при } s' < s, \\ s(1+\psi_2(s)) &\leqslant s'(1+\psi_1(s')), && \text{при } s' > s. \end{aligned} \tag{2.102}$$

Разделим соответствующее неравенство из (2.102) на соответствующее неравенство из (2.101) (исключая, естественно, случай $\psi_1(s') = -1$). Получим (2.96). □

Положим для каждого $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d)^{\intercal} \in \mathbb{R}^d$ и каждого $s > 0$

$$\mu_s(\mathbf{z}) = e^{-s} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |z_i| \qquad \text{и} \qquad \nu_s(\mathbf{z}) = e^{ms/n} \max_{m < i \leqslant d} |z_i|.$$

Тогда

$$\mathcal{B}(s) = \Big\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, \mu_s(\mathbf{z}) \leqslant 1,\ \nu_s(\mathbf{z}) \leqslant 1 \Big\}.$$

Параллелепипед $\lambda_1(\mathcal{B}(s))\mathcal{B}(s)$ не содержит ненулевых точек решетки Λ в своей внутренности и содержит хотя бы одну пару таких точек на границе. Выберем любую из этих точек и обозначим ее $\mathbf{v}_s$. Очевидно, что максимальная из величин $\mu_s(\mathbf{v}_s)$, $\nu_s(\mathbf{v}_s)$ равна $\lambda_1(\mathcal{B}(s))$.

Следствие 14. *Для каждого $s > 0$, такого что*

$$\mu_s(\mathbf{v}_s) = \nu_s(\mathbf{v}_s) = \lambda_1(\mathcal{B}(s)), \tag{2.103}$$

существуют $s', s'' > 0$, такие что

$$s(1+\psi_1(s)) \leqslant s' \leqslant s \leqslant s'' \leqslant s(1-(n/m)\psi_1(s))$$

и

$$\Psi_2(s) \leqslant \begin{cases} 2\psi_1(s) + d \cdot \dfrac{\psi_1(s') - \psi_1(s)}{n + n\psi_1(s')}\,, & \text{при } \ \psi_1(s') \neq -1, \\ 2\psi_1(s) + d \cdot \dfrac{\psi_1(s'') - \psi_1(s)}{m - n\psi_1(s'')}\,. \end{cases} \tag{2.104}$$

Доказательство. Покажем, что из равенства $\mu_s(\mathbf{v}_s) = \lambda_1(\mathcal{B}(s))$ следует существование $s' \leqslant s$, удовлетворяющего условию леммы 2.12. Положим $\lambda = \lambda_1(\mathcal{B}(s))$. Рассмотрим минимальный (по включению) параллелепипед

$$\mathcal{P}_\nu = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \mu_s(\mathbf{z}) \leqslant \lambda,\ \nu_s(\mathbf{z}) \leqslant \nu\lambda \right\},$$

не содержащий в своей внутренности ни одной ненулевой точки решетки Λ. Существование такого параллелепипеда следует из теоремы Минковского о выпуклом теле. Из нее также следует, что $1 \leqslant \nu \leqslant \lambda^{-d/n}$. Значит,

$$\lambda\mathcal{B}(s) \subseteq \mathcal{P}_\nu = \lambda'\mathcal{B}(s'),$$

где $\lambda' = \lambda\nu^{n/d}$, $s' = s - (n/d)\ln\nu$. Для λ', s' справедливы неравенства

$$\lambda' \geqslant \lambda, \qquad s + \ln\lambda \leqslant s' \leqslant s.$$

С другой стороны, на границе параллелепипеда $\mathcal{P}_\nu$ есть неколлинеарные точки решетки Λ, поэтому $\lambda_1(\mathcal{B}(s')) = \lambda_2(\mathcal{B}(s')) = \lambda'$. Стало быть, s, s' удовлетворяют соотношениям (2.94), (2.95).

Рассмотрим теперь равенство $\nu_s(\mathbf{v}_s) = \lambda_1(\mathcal{B}(s))$. По теореме Минковского о выпуклом теле в интервале $1 \leqslant \mu \leqslant \lambda^{-d/m}$ имеется такое μ, что параллелепипед

$$\mathcal{Q}_\mu = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \mu_s(\mathbf{z}) \leqslant \mu\lambda,\ \nu_s(\mathbf{z}) \leqslant \lambda \right\}$$

не содержит в своей внутренности ни одной ненулевой точки решетки Λ, но содержит неколлинеарные точки Λ на своей границе. Стало быть,

$$\lambda\mathcal{B}(s) \subseteq \mathcal{Q}_\mu = \lambda''\mathcal{B}(s''),$$

где $\lambda'' = \lambda\mu^{m/d}$, $s'' = s + (n/d)\ln\mu$. Для λ'', s'' справедливы неравенства

$$\lambda'' \geqslant \lambda, \qquad s \leqslant s'' \leqslant s - (n/m)\ln\lambda.$$

Кроме того, s и s'' также удовлетворяют соотношениям (2.94), (2.95), поскольку $\lambda_1(\mathcal{B}(s'')) = \lambda_2(\mathcal{B}(s'')) = \lambda''$.

Остается применить лемму 2.12. □

Воспользуемся следствием 14, чтобы доказать теорему 2.14.

Сначала отметим, что если у системы (1.1) есть ненулевое целочисленное решение, то у нее есть два неколлинеарных таких решения, так что в этом случае $\overline{\Psi}_1 = \underline{\Psi}_1 = -1$, $\underline{\Psi}_2 = -2$, откуда следует (2.92).

Теперь предположим, что у системы (1.1) нет ненулевых целочисленных решений. Тогда у функции $\psi_1(s)$ бесконечно много локальных минимумов, каждый из них удовлетворяет условию (2.103), а последовательность, составленная из этих минимумов стремится к ∞. Кроме того s' и s'' из следствия 14 стремятся к ∞ при s стремящемся к ∞. Действительно, поскольку система (1.1) не имеет ненулевых целочисленных решений,

$$e^{s(1+\psi_1(s))} = e^s\lambda_1(\mathcal{B}(s)) = \lambda_1(e^{-s}\mathcal{B}(s)) \to \infty \quad \text{as} \quad s \to \infty,$$

так что

$$s(1+\psi_1(s)) \to \infty \quad \text{as} \quad s \to \infty. \tag{2.105}$$

В частности, из (2.105) следует, что $\psi_1(s)$ с какого-то момента становится больше -1 (на самом деле можно показать, что $\psi_1(s) > -1$, начиная со второго локального минимума функции $\psi_1(s)$). Следовательно,

$$\underline{\Psi}_2 \leqslant \liminf \Psi_2(s) \leqslant \begin{cases} 2\liminf \psi_1(s) + d \cdot \limsup \dfrac{\psi_1(s') - \psi_1(s)}{n + n\psi_1(s')}\,, \\[2ex] 2\liminf \psi_1(s) + d \cdot \limsup \dfrac{\psi_1(s'') - \psi_1(s)}{m - n\psi_1(s'')}\,, \end{cases} \tag{2.106}$$

где $\liminf$ и $\limsup$ берутся по множеству всех локальных минимумов функции $\psi_1(s)$. Поскольку $\psi_1(s)$ нигде не принимает положительных значений, оба знаменателя в (2.106), начиная с какого-то момента становятся строго положительными. Стало быть, из (2.106) следует (2.92).

Следствие 15. *Пусть система* (1.1) *не имеет ненулевых целочисленных решений. Тогда для любого $s > 0$ найдется $s' > 0$, такое что*

$s(1+\psi_1(s)) \leqslant s' \leqslant s(1-(n/m)\psi_1(s))$ *и*

$$\Psi_2(s) \leqslant \begin{cases} \dfrac{(d-2)\psi_1(s')}{(n-1)+n\psi_1(s')}\,, & \textit{при} \;\; \psi_1(s') \geqslant \dfrac{m-n}{2n}\,, \\ \dfrac{(d-2)\psi_1(s')}{(m-1)-n\psi_1(s')}\,, & \textit{при} \;\; \psi_1(s') \leqslant \dfrac{m-n}{2n}\,. \end{cases} \tag{2.107}$$

Доказательство. Предположим, что $\mu_s(\mathbf{v}_s) = \lambda_1(\mathcal{B}(s))$. Тогда точно так же, как в доказательстве следствия 14, можно доказать существование такого s', что $s(1+\psi_1(s)) \leqslant s' \leqslant s$ и

$$\Psi_2(s) \leqslant 2\psi_1(s) + d \cdot \frac{\psi_1(s') - \psi_1(s)}{n + n\psi_1(s')}\,, \tag{2.108}$$

исключая случай, когда $\psi_1(s') = -1$. В силу следствия 6

$$\frac{d-1}{d-2}\Psi_2(s) \leqslant \psi_1(s) \leqslant \frac{1}{2}\Psi_2(s). \tag{2.109}$$

Если $\psi_1(s') = -1$, то из (2.109) следует (2.107). Пусть $\psi_1(s') \neq -1$. Тогда, учитывая, что

$$2 - \frac{d}{n + n\psi_1(s')} \geqslant 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \psi_1(s') \geqslant \frac{m-n}{2n}\,,$$

и применяя (2.108) и (2.109), получаем, что

$$\Psi_2(s) \leqslant \begin{cases} 2\psi_1(s')\,, & \text{при} \;\; \psi_1(s') \geqslant \dfrac{m-n}{2n}\,, \\ \dfrac{(d-2)\psi_1(s')}{(m-1)-n\psi_1(s')}\,, & \text{при} \;\; \psi_1(s') \leqslant \dfrac{m-n}{2n}\,. \end{cases} \tag{2.110}$$

Предположим теперь, что $\nu_s(\mathbf{v}_s) = \lambda_1(\mathcal{B}(s))$. Тогда точно так же, как в доказательстве следствия 14, можно доказать существование такого s'', что $s \leqslant s'' \leqslant s(1-(n/m)\psi_1(s))$ и

$$\Psi_2(s) \leqslant 2\psi_1(s) + d \cdot \frac{\psi_1(s'') - \psi_1(s)}{m - n\psi_1(s'')}\,. \tag{2.111}$$

Учитывая, что

$$2 - \frac{d}{m - n\psi_1(s'')} \geqslant 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \psi_1(s'') \leqslant \frac{m-n}{2n}\,,$$

получаем из (2.111) и (2.109), что

$$\Psi_2(s) \leqslant \begin{cases} \dfrac{(d-2)\psi_1(s'')}{(n-1)+n\psi_1(s'')}, & \text{при } \psi_1(s'') \geqslant \dfrac{m-n}{2n}, \\ \\ 2\psi_1(s''), & \text{при } \psi_1(s'') \leqslant \dfrac{m-n}{2n}. \end{cases} \tag{2.112}$$

Поскольку $\psi_1(s')$ и $\psi_1(s'')$ отрицательны,

$$2\psi_1(s') \leqslant \frac{(d-2)\psi_1(s')}{(n-1)+n\psi_1(s')}, \qquad \text{при } \psi_1(s') \geqslant \frac{m-n}{2n},$$

и

$$2\psi_1(s'') \leqslant \frac{(d-2)\psi_1(s'')}{(m-1)-n\psi_1(s'')}, \quad \text{при } \psi_1(s'') \leqslant \frac{m-n}{2n}.$$

Стало быть, из (2.110) и (2.112) следует требуемое утверждение. □

Вывод теоремы 2.15 из следствия 15 еще проще вывода теоремы 2.14 из следствия 14.

Если система (1.1) имеет ненулевое целочисленное решение, то $\overline{\Psi}_1 = -1 < \frac{m-n}{2n}$, и (2.93) следует из (2.63). Предположим теперь, что система (1.1) не имеет ненулевых целочисленных решений. Тогда из (2.105) следует, что s' из следствия 15 стремится к ∞ при s стремящемся к ∞. Следовательно, беря $\limsup$ от обеих частей (2.107), мы получим (2.93).

2.3 Неравенство Шмидта–Зуммерера

В данном параграфе мы докажем теорему 1.8 гораздо проще, чем она доказывается в оригинальной работе [SchS2]. Причем докажем нечто немного более сильное. А именно, мы докажем первую половину теоремы 1.8, то есть неравенство (1.20), при несколько более слабом ограничении на $1, \theta_1, \ldots, \theta_n$, чем их линейная независимость над $\mathbb{Q}$. Оказывается, достаточно потребовать (см. начало пункта 2.3.3), чтобы выполнялось условие

$$\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(1, \theta_1, \ldots, \theta_n) \geqslant p. \tag{2.113}$$

Сначала мы сделаем некое наблюдение локального характера. Затем мы применим это наблюдение для двух случаев: в первом случае мы в качестве Λ и $\mathfrak{T}$ берем решетку и путь, определяемые в (1.18), (1.19), и получаем (1.20); а во втором случае берем решетку и путь, двойственные к выбранным в первом случае, и получаем в каком-то смысле двойственное утверждение. После чего мы применяем соображения переноса, основывающиеся на соотношениях, доказанных в работе [G11], чтобы получить из двойственного утверждения нечто для решетки Λ_Θ и пути $\mathfrak{T}_\Theta$, откуда и будет следовать (1.21).

Прежде всего заметим, что из определения 1.2 немедленно следует, что $\beta_p \geqslant \alpha_p \geqslant 0$. Ввиду этого соображения получаем из предложения 13 следующие тривиальные оценки сверху и снизу для $\underline{\psi}_p$ и $\overline{\psi}_p$.

Предложение 19. *Справедливо неравенство* $-1 \leqslant \underline{\psi}_p \leqslant \overline{\psi}_p \leqslant m/n$.

Позже мы воспользуемся этими оценками.

2.3.1 Основное локальное наблюдение.

В следующей лемме 2.13 мы описываем довольно простой геометрический факт, знание которого позволяет легко доказать теорему 1.8 при помощи техники, разработанной отчасти в работе [G11].

Лемма 2.13. *Пусть Λ — произвольная d-мерная решетка в $\mathbb{R}^d$ и пусть $h_1, \ldots, h_d, \lambda$ — произвольные положительные вещественные числа, $\lambda \geqslant 1$. Рассмотрим параллелепипеды*

$$\mathcal{P}_1 = \Big\{ \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d)^\intercal \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, |z_i| \leqslant h_i,\ i = 1, \ldots, d \Big\},$$
$$\mathcal{P}_2 = \Big\{ \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d)^\intercal \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, |z_i| \leqslant \lambda h_i,\ i = 1, \ldots, d \Big\} = \lambda \mathcal{P}_1,$$
$$\mathcal{P}_3 = \Big\{ \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d)^\intercal \in \mathcal{P}_2 \,\Big|\, |z_1| \leqslant h_1 \Big\}.$$

Предположим, что на границе $\mathcal{P}_1$ содержится точка $\mathbf{v}$ решетки Λ с первой координатой, равной h_1, и что $\mathcal{P}_2$ содержит хотя бы p линейно независимых точек Λ. Тогда параллелепипед $2\mathcal{P}_3$ также содержит хотя бы p линейно независимых точек Λ.

Доказательство. Очевидно, что в параллелепипеде $\mathcal{P}_2$ существуют точки решетки $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p-1}$, такие что $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p-1}$ линейно независимы. Пусть $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)^\intercal$, $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{id})^\intercal$, $i = 1, \dots, p-1$. Можно считать, что $v_{i1} \geqslant 0$ для каждого i. Положим

$$\mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_i - \left[\frac{v_{i1}}{v_1}\right]\mathbf{v}, \qquad i = 1, \dots, p-1.$$

Пусть $\mathbf{v}_i' = (v_{i1}', \dots, v_{id}')^\intercal$. Тогда $0 \leqslant v_{i1}' < v_1 = h_1$ и для каждого $j = 2, \dots, p-1$ мы имеем неравенства

$$|v_{ij}'| \leqslant |v_{ij}| + \left[\frac{v_{i1}}{v_1}\right]|v_i| < 2\lambda h_i,$$

поскольку

$$0 \leqslant \left[\frac{v_{i1}}{v_1}\right] < \lambda.$$

То есть все точки $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1', \dots, \mathbf{v}_{p-1}'$ содержатся в $2\mathcal{P}_3$. Ясно, что они при этом линейно независимы. $\square$

При применении леммы 2.13 для фиксированных Λ и $\mathfrak{T}$ мы будем брать в качестве $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ параллелепипед $\mathcal{B}(s)$, растянутый по всем направлениям в $\lambda_1(\mathcal{B}(s))$ и $\lambda_p(\mathcal{B}(s))$ раз, соответственно. Заметим, что во внутренности параллелепипеда $\lambda_1(\mathcal{B}(s))\mathcal{B}(s)$ ненулевых точек решетки нет, но такие точки есть на его границе. То есть эффект, описанный в лемме 2.13, срабатывает, когда такая точка оказывается на гиперграни, перпендикулярной первой координатной оси, то есть на гиперграни, лежащей в плоскости $z_1 = \lambda_1(\mathcal{B}(s))e^{\tau_1(s)}$. Мы будем называть эту гипергрань *фронтальной.*

Следствие 16. *Пусть $m = 1$. Пусть Λ — произвольная решетка, а $\mathfrak{T}$ — произвольный путь, такой что $\tau_2(s) = \ldots = \tau_d(s) = -\tau_1(s)/n$ для всех s. Тогда для каждого s_0, такого что на фронтальной гиперграни $\lambda_1(\mathcal{B}(s_0))\mathcal{B}(s_0)$ есть точка решетки, справедливы неравенства*

$$1 \leqslant \frac{e^{\tau_1(s_1)}\lambda_p(\mathcal{B}(s_1))}{e^{\tau_1(s_0)}\lambda_1(\mathcal{B}(s_0))} \leqslant 2 \qquad \text{и} \qquad 1 \leqslant \frac{e^{\tau_i(s_1)}\lambda_p(\mathcal{B}(s_1))}{e^{\tau_i(s_0)}\lambda_p(\mathcal{B}(s_0))} \leqslant 2, \qquad i = 2, \dots, d, \tag{2.114}$$

где s_1 определяется соотношением

$$e^{\tau_1(s_1)} = e^{\tau_1(s_0)} \left(\frac{\lambda_1(\mathcal{B}(s_0))}{\lambda_p(\mathcal{B}(s_0))}\right)^{n/d}. \tag{2.115}$$

Доказательство. Положим $h_i = \lambda_1(\mathcal{B}(s_0))e^{\tau_i(s_0)}$, $i = 1,\ldots,d$, и $\lambda = \lambda_p(\mathcal{B}(s_0))/\lambda_1(\mathcal{B}(s_0))$. Из соотношений (1.17) и (2.115) получаем, что

$$e^{\tau_1(s_1)} = \lambda^{n/d}e^{\tau_1(s_0)} \qquad \text{и} \qquad e^{\tau_i(s_1)} = \lambda^{1/d}e^{\tau_i(s_0)}, \qquad i = 2,\ldots,d. \tag{2.116}$$

Определим по $h_1,\ldots,h_d,\lambda$ параллелепипеды $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, как в лемме 2.13. Тогда

$$\mathcal{P}_1 = \lambda_1(\mathcal{B}(s_0))\mathcal{B}(s_0), \quad \mathcal{P}_2 = \lambda_p(\mathcal{B}(s_0))\mathcal{B}(s_0), \quad \mathcal{P}_3 = \lambda_1(\mathcal{B}(s_0))\lambda^{n/d}\mathcal{B}(s_1).$$

Действительно, первые два равенства очевидны, тогда как третье следует из соотношений (2.116). Гомотетичность параллелепипедов $\mathcal{P}_3$ и $\mathcal{B}(s_1)$ довольно важна по существу использует условие, что $\tau_2(s) = \ldots = \tau_d(s)$ для всех s.

По лемме 2.13 в параллелепипеде $2\mathcal{P}_3$ имеется не менее, чем p линейно независимых точек решетки. Стало быть,

$$\lambda_p(\mathcal{B}(s_1))\mathcal{B}(s_1) \subseteq 2\mathcal{P}_3,$$

откуда немедленно следуют верхние оценки (2.114). Нижние же следуют из того факта, что параллелепипед $\lambda_p(\mathcal{B}(s_1))\mathcal{B}(s_1)$ не может быть собственным подмножеством параллелепипеда $\mathcal{P}_3$, который в свою очередь следует из включения

$$\mathcal{P}_3 \subseteq \mathcal{P}_2 = \lambda_p(\mathcal{B}(s_0))\mathcal{B}(s_0)$$

и того факта, что во внутренности параллелепипеда $\lambda_p(\mathcal{B}(s_0))\mathcal{B}(s_0)$ нет p линейно независимых точек решетки. $\square$

Следствие 17. *В предположениях следствия 16, для каждого s_0, такого что на фронтальной гиперграни $\lambda_1(\mathcal{B}(s_0))\mathcal{B}(s_0)$ есть точка решетки, справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} \tau_1(s_0) + s_0\psi_1(s_0) \leqslant \tau_1(s_1) + s_1\psi_p(s_1) \leqslant& \tau_1(s_0) + s_0\psi_1(s_0) + \ln 2, \\ \tau_i(s_0) + s_0\psi_p(s_0) \leqslant \tau_i(s_1) + s_1\psi_p(s_1) \leqslant& \tau_i(s_0) + s_0\psi_p(s_0) + \ln 2, \\ & i = 2,\ldots,d, \end{aligned} \tag{2.117}$$

где s_1 определяется соотношением

$$\tau_1(s_1) = \tau_1(s_0) + \frac{n}{d}s_0\bigl(\psi_1(s_0) - \psi_p(s_0)\bigr). \tag{2.118}$$

Доказательство. Это утверждение непосредственно следует из определения $\psi_i(s)$ и следствия 16. $\square$

2.3.2 Вспомогательное наблюдение.

Пусть выполняются предположения следствия 16. То есть $m = 1$, Λ — произвольная решетка, а $\mathfrak{T}$ — произвольный путь, такой что $\tau_2(s) = \ldots = \tau_d(s) = -\tau_1(s)/n$ для всех s.

Как уже отмечалось, все ненулевые точки решетки, лежащие в параллелепипеде $\lambda_1(\mathcal{B}(s))\mathcal{B}(s)$, собраны на его границе. Предположим, что ни одна из них не лежит на фронтальной гиперграни, то есть в плоскости $z_1 = \lambda_1(\mathcal{B}(s))e^{\tau_1(s)}$. Тогда параллелепипед $\lambda_1(\mathcal{B}(s))\mathcal{B}(s)$ можно сжать вдоль первой координатной оси, пока какая-нибудь из точек решетки, лежащих на его границе, не встретится с фронтальной гипергранью. Более точно, существует такое $\mu < 1$, что во внутренности параллелепипеда

$$\mathcal{P} = \Big\{ \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d)^\intercal \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, |z_1| \leqslant \mu\lambda_1(\mathcal{B}(s))e^{\tau_1(s)}, \\ |z_i| \leqslant \lambda_1(\mathcal{B}(s))e^{\tau_i(s)},\ i = 2, \ldots, d \Big\}$$

нет ненулевых точек решетки, но на фронтальной гиперграни $\mathcal{P}$ такая точка есть. На самом деле эта точка будет лежать на относительной границе фронтальной гиперграни, то есть на грани меньшей размерности. Легко убедиться, что

$$\mathcal{P} = \mu^{1/d}\lambda_1(\mathcal{B}(s))\mathcal{B}(s'),$$

где s' определяется соотношением $e^{\tau_1(s')} = \mu^{n/d}e^{\tau_1(s)}$. Стало быть,

$$\lambda_1(\mathcal{B}(s')) = \mu^{1/d}\lambda_1(\mathcal{B}(s)) < \lambda_1(\mathcal{B}(s))$$

и мы получаем

Предложение 20. *В предположениях следствия 16*

$$\underline{\psi}_1(\Lambda, \mathfrak{T}) = \liminf_{s\to+\infty}{}' \, \psi_p(\Lambda, \mathfrak{T}, s),$$

где $\liminf{}'$ *берется по всем* s*, таким что на фронтальной гиперграни параллелепипеда* $\lambda_1(\mathcal{B}(s))\mathcal{B}(s)$ *есть точка решетки.*

2.3.3 Первый выбор Λ и $\mathfrak{T}$.

Пусть $m = 1$ и $\Lambda = \Lambda_\Theta$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_\Theta$. Предположим, что выполняется условие (2.113). Докажем неравенство (1.20).

Из условия (2.113) следует, что $\lambda_p(\mathcal{B}(s))e^s \to +\infty$ при $s \to +\infty$. Действительно, если $\lambda_p(\mathcal{B}(s))e^s$ ограничено, то $\lambda_p(\mathcal{B}(s))e^{-s/n}$ стремится к нулю, то есть параллелепипеды $\lambda_p(\mathcal{B}(s))\mathcal{B}(s)$ вырождаются при $s \to \infty$ в отрезок конечной длины, лежащий на первой координатной оси, что противоречит иррациональности этой оси относительно решетки Λ.

С другой стороны, если наряду с условием $\lambda_p(\mathcal{B}(s))e^s \to +\infty$ не выполняется условие $\lambda_p(\mathcal{B}(s))e^{-s/n} \to 0$ при $s \to +\infty$, то должно существовать такое $\varepsilon > 0$, что в "трубе"

$$\Big\{\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d)^\intercal \in \mathbb{R}^d \,\Big|\, |z_i| \leqslant \varepsilon,\ i = 2, \dots, d\Big\}$$

нет p линейно независимых точек решетки Λ. Но это возможно лишь в том случае, когда первая координатная ось лежит в некотором подпространстве $\mathbb{R}^d$ размерности меньшей, чем p, рациональном относительно решетки Λ. Что противоречит (2.113).

Таким образом,

$$\lambda_p(\mathcal{B}(s))e^s \to +\infty \quad \text{и} \quad \lambda_p(\mathcal{B}(s))e^{-s/n} \to 0 \quad \text{при} \quad s \to +\infty,$$

то есть

$$s(1 + \psi_p(s)) \to +\infty \quad \text{и} \quad s(1/n - \psi_p(s)) \to +\infty \quad \text{при } s \to +\infty. \tag{2.119}$$

Поскольку $\lambda_1(\mathcal{B}(s)) \leqslant \lambda_p(\mathcal{B}(s))$, то и $\lambda_1(\mathcal{B}(s))e^{-s/n} \to 0$ при $s \to +\infty$. Следовательно, существуют сколь угодно большие значения s, при которых на фронтальной гиперграни параллелепипеда $\lambda_1(\mathcal{B}(s))\mathcal{B}(s)$ есть точка решетки. Для каждого s_0, удовлетворяющего этому условию, следствие 17 дает нам s_1, для которого выполняются соотношения (2.117) и (2.118). Подставим (1.19) в (2.117) и (2.118). Получим

$$\begin{gathered} s_0(1 + \psi_1(s_0)) \leqslant s_1(1 + \psi_p(s_1)) \leqslant s_0(1 + \psi_1(s_0)) + \ln 2, \\ s_0(1/n - \psi_p(s_0)) - \ln 2 \leqslant s_1(1/n - \psi_p(s_1)) \leqslant s_0(1/n - \psi_p(s_0)). \end{gathered} \tag{2.120}$$

и

$$s_1 = s_0\left(1 + \frac{n}{d}\big(\psi_1(s_0) - \psi_p(s_0)\big)\right). \tag{2.121}$$

Из предложения 19 следует, что $\underline{\psi}_1 - \overline{\psi}_p \geqslant -d/n$, где равенство может быть лишь в случае $\underline{\psi}_1 = -1$, $\overline{\psi}_p = 1/n$, в котором неравенство (1.20) тривиально. Поэтому можно считать, что $\underline{\psi}_1 - \overline{\psi}_p > -d/n$, то есть что $\psi_1(s_0) - \psi_p(s_0)$ отделено от $-d/n$ при больших s_0. Тогда из соотношения (2.121) следует, что

$$s_1 \to \infty \quad \text{при} \quad s_0 \to \infty. \tag{2.122}$$

Из соотношений (2.119), (2.120) и (2.122) следует, что все части неравенств (2.120) положительны при больших значениях s_0. Стало быть, неравенства (2.120) дают для больших s_0 неравенство

$$\big(1 + \psi_p(s_1)\big)\big(1/n - \psi_p(s_0) - \tfrac{\ln 2}{s_0}\big) \leqslant \big(1/n - \psi_p(s_1)\big)\big(1 + \psi_1(s_0) + \tfrac{\ln 2}{s_0}\big).$$

Применяя вновь (2.119), получаем, что

$$\big(1+\psi_p(s_1)\big)\big(1/n-\psi_p(s_0)\big) \leqslant \\ \leqslant \big(1+\psi_1(s_0)\big)\big(1/n-\psi_p(s_1)\big)(1+o(1)) \\ \text{при} \ \ s_0\to\infty. \quad (2.123)$$

Ввиду предложения 20 можно выбрать s_0 настолько большим, чтобы $\psi_1(s_0)$ было сколь угодно близко к $\underline{\psi}_1$. Применяя для таких s_0 грубые оценки

$$\psi_p(s_1)\geqslant \underline{\psi}_p+o(1), \qquad \psi_p(s_0)\leqslant \overline{\psi}_p+o(1), \qquad \text{при } s_0\to\infty,$$

получаем из (2.123) требуемое неравенство (1.20).

2.3.4 Второй выбор Λ и $\mathfrak{T}$.

Пусть $m=1$ и $\Lambda=\Lambda_\Theta^*$, $\mathfrak{T}=\mathfrak{T}_\Theta^*$, где

$$\Lambda_\Theta^*=T_\Theta^\intercal\mathbb{Z}^d=\begin{pmatrix} E_m & \Theta^\intercal \\ 0 & E_n\end{pmatrix}\mathbb{Z}^d, \tag{2.124}$$

а $\mathfrak{T}_\Theta^*: s\mapsto \boldsymbol{\tau}^*(s)$ определяется соотношениями

$$\tau_1^*(s)=-ns, \quad \tau_2^*(s)=\ldots=\tau_d^*(s)=s. \tag{2.125}$$

Ясно, что решетка Λ_Θ^* двойственна решетке Λ_Θ. Следовательно, в силу линейной независимости $1,\theta_1,\ldots,\theta_n$ над $\mathbb{Q}$ в решетке Λ нет ненулевых точек с нулевой первой координатой. Стало быть,

$$\lambda_p(\mathcal{B}(s))e^{-ns}\to 0 \quad \text{and} \quad \lambda_p(\mathcal{B}(s))e^{s}\to +\infty \quad \text{as} \quad s\to+\infty,$$

то есть

$$s(n-\psi_p(s))\to+\infty \quad \text{and} \quad s(1+\psi_p(s))\to+\infty \quad \text{as } s\to+\infty. \tag{2.126}$$

Кроме того, существуют сколь угодно большие значения s, при которых на фронтальной гиперграни параллелепипеда $\lambda_1(\mathcal{B}(s))\mathcal{B}(s)$ есть точки решетки Λ. Для каждого s_0, удовлетворяющего этому условию, следствие 17 дает нам s_1, для которого выполняются соотношения (2.117) b (2.118). Подставим (2.125) в (2.117) и (2.118). Получим

$$\begin{gathered} s_0(n-\psi_1(s_0))-\ln 2\leqslant s_1(n-\psi_p(s_1))\leqslant s_0(n-\psi_1(s_0)), \\ s_0(1+\psi_p(s_0))\leqslant s_1(1+\psi_p(s_1))\leqslant s_0(1+\psi_p(s_0))+\ln 2. \end{gathered} \tag{2.127}$$

и

$$s_1 = s_0\Big(1+\frac{1}{d}\big(\psi_p(s_0)-\psi_1(s_0)\big)\Big). \tag{2.128}$$

В этом случае сразу получаем, что

$$s_1 \to \infty \quad \text{as} \quad s_0 \to \infty, \tag{2.129}$$

поскольку $\psi_p(s_0) \geqslant \psi_1(s_0)$. Из соотношений (2.126), (2.127) и (2.129) следует, что все части неравенств (2.127) положительны при больших значениях s_0. Стало быть, неравенства (2.127) дают для больших s_0 неравенство

$$\big(1+\psi_p(s_1)\big)\big(n-\psi_1(s_0)-\tfrac{\ln 2}{s_0}\big) \leqslant \big(n-\psi_p(s_1)\big)\big(1+\psi_p(s_0)+\tfrac{\ln 2}{s_0}\big).$$

Применяя вновь (2.126), получаем, что

$$\begin{aligned}\big(1+\psi_p(s_1)\big)\big(n-\psi_1(s_0)\big) &\leqslant \\ &\leqslant \big(1+\psi_p(s_0)\big)\big(n-\psi_p(s_1)\big)(1+o(1)) \\ &\qquad\qquad \text{as} \ \ s_0\to\infty. \end{aligned} \tag{2.130}$$

Ввиду предложения 20 можно выбрать s_0 настолько большим, чтобы $\psi_1(s_0)$ было сколь угодно близко к $\underline{\psi}_1$. Применяя для таких s_0 грубые оценки

$$\psi_p(s_1) \geqslant \underline{\psi}_p + o(1), \qquad \psi_p(s_0) \leqslant \overline{\psi}_p + o(1), \qquad \text{при } s_0\to\infty,$$

получаем из (2.130) неравенство

$$\big(1+\underline{\psi}_p\big)\big(n-\underline{\psi}_1\big) \leqslant \big(1+\overline{\psi}_p\big)\big(n-\underline{\psi}_p\big),$$

или, исключая обращение к контексту,

$$\begin{aligned}\big(1+\underline{\psi}_p(\Lambda_\Theta^*,\mathfrak{T}_\Theta^*)\big)\big(n-\underline{\psi}_1(\Lambda_\Theta^*,\mathfrak{T}_\Theta^*)\big) &\leqslant \\ &\leqslant \big(1+\overline{\psi}_p(\Lambda_\Theta^*,\mathfrak{T}_\Theta^*)\big)\big(n-\underline{\psi}_p(\Lambda_\Theta^*,\mathfrak{T}_\Theta^*)\big), \end{aligned} \tag{2.131}$$

2.3.5 Соображения переноса.

Пусть $m=1$. В работе [G11] доказано следующее утверждение.

Предложение 21. *Справедливы соотношения*

$$\underline{\psi}_p(\Lambda_\Theta^*,\mathfrak{T}_\Theta^*) = -n\overline{\psi}_{d+1-p}(\Lambda_\Theta,\mathfrak{T}_\Theta) \quad \text{и} \quad \overline{\psi}_p(\Lambda_\Theta^*,\mathfrak{T}_\Theta^*) = -n\underline{\psi}_{d+1-p}(\Lambda_\Theta,\mathfrak{T}_\Theta)\,.$$

Применяя предложение 21 к неравенству (2.131), получаем для каждого $p = 1, \ldots, d$ неравенство

$$\begin{aligned}\big(1/n - \overline{\psi}_{d+1-p}(\Lambda_\Theta, \mathfrak{T}_\Theta)\big)\big(1 + \overline{\psi}_d(\Lambda_\Theta, \mathfrak{T}_\Theta)\big) \leqslant \\ \leqslant \big(1/n - \underline{\psi}_{d+1-p}(\Lambda_\Theta, \mathfrak{T}_\Theta)\big)\big(1 + \overline{\psi}_{d+1-p}(\Lambda_\Theta, \mathfrak{T}_\Theta)\big). \quad (2.132)\end{aligned}$$

Поскольку неравенство (2.132) верно для всех p, можно заменить в нем $d + 1 - p$ на p. Что немедленно дает нам неравенство (1.21).

2.4 Линейные формы заданного диофантового типа

В данном параграфе будем для каждого $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ обозначать через $|\mathbf{x}|$ его евклидову норму

$$|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|_2 = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2},$$

а через $|\mathbf{x}|_\infty$ — sup-норму

$$|\mathbf{x}|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

Будем также обозначать через $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$ скалярное произведение $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$. При фиксированном $\boldsymbol{\alpha}$ получаем линейную форму $\langle \boldsymbol{\alpha}, \cdot \rangle$.

В следующих двух пунктах мы обсуждаем уточнения результата Ярника для случаев $n = 1$, $m \geqslant 2$ (совместные приближения) и $m = 1$, $n \geqslant 2$ (приближение нуля значениями линейной формы).

2.4.1 Совместные приближения

Будем в данном пункте пользоваться обозначением

$$\varphi(t) = \frac{\psi(t)}{t^{1/m}}.$$

Оказывается, в теореме Ярника, обсуждавшейся в пункте 1.1.5, можно убрать требование монотонности. Это наблюдение в случае совместных приближений (см. также [J1], Satz 5) приводит к следующей теореме.

Теорема 2.16. *Пусть m — натуральное число. Пусть $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — произвольная убывающая функция, $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — произвольная убывающая к нулю функция, а интеграл*

$$\int_A^\infty \frac{(\psi(x))^m}{x} dx$$

сходится. Тогда найдется несчетное количество таких $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, что для любого достаточно большого натурального q справедливо неравенство

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \|q\alpha_i\| \geqslant \frac{\lambda(q)\psi(q)}{q^{1/m}},$$

но при этом неравенство

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \|q\alpha_i\| \leqslant \frac{\psi(q)}{q^{1/m}}$$

имеет бесконечно много решений в натуральных q.

Ахунжанов и Мощевитин [AM], обобщив подход работы [Mos1], доказали следующую теорему.

Теорема 2.17. *Пусть m — натуральное число. Существуют вычислимые положительные константы A_m, B_m, такие что для любой невозрастающей функции $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющей условию $\psi(1) \leqslant A_m$, найдется несчетное количество векторов $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, таких что для любого натурального q справедливо неравенство*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} \|q\alpha_i\| \geqslant \frac{\psi(q)}{q^{1/m}} \left(1 - B_m\psi(q)\right),$$

но при этом неравенство

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} \|q\alpha_i\| \leqslant \frac{\psi(q)}{q^{1/m}} \left(1+B_m\psi(q)\right)$$

имеет бесконечно много решений в натуральных q.

2.4.2 Линейные формы

Будем в данном пункте пользоваться обозначением

$$\varphi(t) = \frac{\psi(t)}{t^n}.$$

Теорема Ярника, обсуждавшаяся в пункте 1.1.5, в случае линейной формы дает следующую теорему.

Теорема 2.18. *Пусть n — натуральное число. Пусть $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — произвольная убывающая функция, $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — произвольная убывающая к нулю функция, а интеграл*

$$\int_A^\infty \frac{\psi(x)}{x} dx$$

сходится. Тогда найдется несчетное количество таких $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, таких что $|\mathbf{x}|$ достаточно велико, справедливо неравенство

$$\|\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}\rangle\| \geqslant \frac{\lambda(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|_\infty^n},$$

но при этом неравенство

$$\|\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}\rangle\| \leqslant \frac{\psi(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|_\infty^n}$$

имеет бесконечно много решений в $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$.

Сформулируем теперь основной результат данного параграфа. Для простоты мы ограничиваемся случаем $n = 2$ и пользуемся евклидовой нормой, хотя скорее всего аналогичное утверждение верно для любой нормы.

Теорема 2.19. *Существуют вычислимые положительные константы A, B, такие что для любой невозрастающей функции $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющей условию $\psi(1) \leqslant A$, найдется несчетное количество векторов $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2$, таких что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ справедливо неравенство*

$$\|\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x} \rangle\| \geqslant \frac{\psi(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|^2}(1 - B\psi(|\mathbf{x}|)),$$

но при этом неравенство

$$\|\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x} \rangle\| \leqslant \frac{\psi(|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|^2}(1 + B\psi(|\mathbf{x}|))$$

имеет бесконечно много решений в $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2$.

2.4.3 Наилучшие приближения

Определение 2.3. Точка $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ называется *наилучшим приближением* для $\langle \boldsymbol{\alpha}, \cdot \rangle$, если

$$\|\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m} \rangle\| < \|\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m}' \rangle\|$$

для любого $\mathbf{m}' \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, такого что $|\mathbf{m}'| < |\mathbf{m}|$, и

$$\|\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m} \rangle\| \leqslant \|\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m}' \rangle\|$$

для любого $\mathbf{m}' \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\pm\mathbf{m}\}$, такого что $|\mathbf{m}'| = |\mathbf{m}|$.

Множество всех наилучших приближений для $\langle \boldsymbol{\alpha}, \cdot \rangle$ бесконечно тогда и только тогда, когда координаты $\boldsymbol{\alpha}$ линейно независимы вместе с единицей над $\mathbb{Q}$. В этом случае множество всех наилучших приближений разбивается на пары отличающихся знаком векторов, таких что вектора из разных пар имеют разные нормы. Упорядочим эти пары по возрастанию нормы и получим последовательность $\{\pm\mathbf{m}_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Положим

$$\gamma = \frac{18}{9 - \sqrt{2}} \approx 2.373\,. \tag{2.133}$$

Теорема 2.19 вытекает из следующей, более точной, теоремы, которая и составляет главный результат данного параграфа. В этой теореме рассматривается *вся* последовательность наилучших приближений и *каждое* из них дает требуемый порядок приближения.

Теорема 2.20. *Пусть $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — произвольная невозрастающая функция, удовлетворяющая условию $\psi(1) \leqslant (9\gamma)^{-1}$. Тогда существует такое $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2$, что для любого наилучшего приближения $\mathbf{m}_k$ линейной формы $\langle \boldsymbol{\alpha}, \cdot \rangle$ справедливо неравенство*

$$\psi(|\mathbf{m}_k|) - 4\gamma\psi(|\mathbf{m}_k|)^2 < \|\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m}_k \rangle\| \cdot |\mathbf{m}_k|^2 \leqslant \psi(|\mathbf{m}_k|) + \gamma\psi(|\mathbf{m}_k|)^2. \quad (2.134)$$

Более того, существует континуум таких $\boldsymbol{\alpha}$.

Отметим, что техника, при помощи которой доказывается теорема 2.20, родственна технике, развитой в работе [G2].

2.4.4 Доказательство теоремы 2.20

Описание множества линейных форм, для которых данная точка $\mathbf{m}$ является наилучшим приближением. Пусть $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2$ примитивная точка. Тогда множество тех $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2$, для которых $\mathbf{m}$ является наилучшим приближением линейной формы $\langle \boldsymbol{\alpha}, \cdot \rangle$, содержится во множестве

$$\mathfrak{S} = \bigcap_{\substack{\mathbf{m}' \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}, \pm\mathbf{m}\} \\ |\mathbf{m}'| \leqslant |\mathbf{m}|}} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \|\langle \mathbf{m}, \mathbf{x} \rangle\| \leqslant \|\langle \mathbf{m}', \mathbf{x} \rangle\| \right\} \quad (2.135)$$

и при этом содержит его внутренность. Как легко видеть, каждое из участвующих в пересечении (2.135) множеств просто напросто является параллелограммом. Кроме того, одна из диагоналей каждого из параллелограммов лежит на целочисленном уровне формы $\langle \mathbf{m}, \cdot \rangle$, а объединение всех таких диагоналей совпадает с объединением всех целочисленных уровней этой формы. Следовательно, все связные компоненты множества $\operatorname{int} \mathfrak{S}$ суть открытые выпуклые многоугольники. Никакой из этих многоугольников не может быть слишком маленьким. Для того, чтобы это увидеть, нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 2.14. *Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{Z}^2$ и пусть $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно не зависимы. Пусть также $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^2$, $\langle \mathbf{b}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \in \mathbb{Z}$, $\langle \mathbf{c}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \in \mathbb{Z}$. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{Z}$ (евклидово) расстояние от $\boldsymbol{\alpha}$ до прямой, задаваемой уравнением $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \lambda$, целочисленно кратно величине*

$$\frac{1}{|\mathbf{a}| |\det(\mathbf{b}, \mathbf{c})|} .$$

Доказательство. Индекс $\mathbb{Z}^2$ как подрешетки решетки, двойственной к решетке $\operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, равен $|\det(\mathbf{b}, \mathbf{c})|$. Следовательно, $\det(\mathbf{b}, \mathbf{c})\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^2$, то есть

$$\langle \mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \in \frac{\mathbb{Z}}{|\det(\mathbf{b}, \mathbf{c})|} .$$

Остается заметить, что евклидово расстояние между двумя соседними целочисленными уровнями формы $\langle\mathbf{a},\mathbf{x}\rangle$ равно $1/|\mathbf{a}|$. $\square$

Все линейные формы, задающие границу связной компоненты множества $\operatorname{int}\mathfrak{S}$, имеют либо целые, либо полуцелые коэффициенты. Стало быть, следующее утверждение, которое легко вывести из леммы 2.14, как раз и говорит о том, что никакая из таких компонент не может быть слишком маленькой.

Следствие 18. *Пусть* $\mathbf{a}\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}^2$, $\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{Z}^2$ *и пусть* $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *линейно не зависимы. Пусть также* $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^2$, $\langle\mathbf{b},\boldsymbol{\alpha}\rangle\in\mathbb{Z}$, $\langle\mathbf{c},\boldsymbol{\alpha}\rangle\in\mathbb{Z}$. *Тогда для любого* $\lambda\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ *(евклидово) расстояние от* $\boldsymbol{\alpha}$ *до прямой, задаваемой уравнением* $\langle\mathbf{a},\mathbf{x}\rangle=\lambda$, *целочисленно кратно величине*

$$\frac{1}{2|\mathbf{a}||\det(\mathbf{b},\mathbf{c})|}\,.$$

Замена базиса. Следующее утверждение является основанием главного шага в доказательстве теоремы 2.20.

Лемма 2.15. *Пусть* $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{Z}^2$ *и* $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^2$ *удовлетворяют соотношениям* $\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{b}\rangle\in\mathbb{Z}$, $\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{c}\rangle=\langle\boldsymbol{\beta},\mathbf{c}\rangle\in\mathbb{Z}$, *а* $\langle\boldsymbol{\beta},\mathbf{a}\rangle$ *равняется ближайшему к* $\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{a}\rangle$ *целому числу (если* $\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{a}\rangle=1/2$, *можно взять любое из них). Пусть также* $\mathbf{b},\mathbf{c}$ *линейно независимы,* $\mathbf{a},\mathbf{c}$ *линейно независимы,*

$$\big\{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^2\,\big|\,\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x}\rangle\in\mathbb{Z}\big\}=\operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{b},\mathbf{c})\tag{2.136}$$

и

$$\|\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{a}\rangle\|=|\det(\mathbf{b},\mathbf{c})|^{-1}.\tag{2.137}$$

Тогда

$$\big\{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^2\,\big|\,\langle\boldsymbol{\beta},\mathbf{x}\rangle\in\mathbb{Z}\big\}=\operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{a},\mathbf{c})\tag{2.138}$$

и

$$\|\langle\boldsymbol{\beta},\mathbf{b}\rangle\|=|\det(\mathbf{a},\mathbf{c})|^{-1}.\tag{2.139}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2)$, $\mathbf{c}=(c_1,c_2)$. Положим $a_3=-\langle\boldsymbol{\beta},\mathbf{a}\rangle$, $b_3=-\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{b}\rangle$, $c_3=-\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{c}\rangle=-\langle\boldsymbol{\beta},\mathbf{c}\rangle$.

Докажем, что вектора

$$\overline{\mathbf{a}}=(a_1,a_2,a_3),\quad\overline{\mathbf{b}}=(b_1,b_2,b_3),\quad\overline{\mathbf{c}}=(c_1,c_2,c_3)$$

образуют базис $\mathbb{Z}^3$. Из соотношения (2.136) следует, что все целые точки, содержащиеся в подпространстве π_α, натянутом на вектора $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$, принадлежат решетке

$$\operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}}).$$

Это значит, что $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ можно дополнить до базиса $\mathbb{Z}^3$. Стало быть, решетка $\mathbb{Z}^3$ разбивается на "слои", содержащиеся в двумерных плоскостях, параллельных π_α. Более того, любые две соседние плоскости высекают на вертикальной координатной оси отрезок длины $|\det(\mathbf{b},\mathbf{c})|^{-1}$. Применяя теперь равенство (2.137) и тот факт, что a_3 равняется ближайшему к $-\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{a}\rangle$ целому числу, получаем, что точка $\overline{\mathbf{a}}$ лежит в соседней с π_α плоскости. Следовательно, $\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}}$ образуют базис $\mathbb{Z}^3$.

Таким образом, все целые точки плоскости π_β, натянутой на вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$, принадлежат

$$\operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{c}}),$$

откуда немедленно следует равенство (2.138). Как и прежде, $\mathbb{Z}^3$ разбивается на "слои", содержащиеся в двумерных плоскостях, параллельных π_β, таких что любые две соседние плоскости высекают на вертикальной координатной оси отрезок длины $|\det(\mathbf{a},\mathbf{c})|^{-1}$. Замечая, что точка $\overline{\mathbf{b}}$ лежит в соседней с π_β плоскости, получаем равенство (2.139). $\square$

Шаг индукции. Чтобы доказать теорему 2.20, мы построим последовательность вложенных полукругов $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$, общая точка $\boldsymbol{\alpha}$ которых удовлетворяет требуемому утверждению. Будем называть множество Ω *полукругом радиуса R с центром в точке* $\mathbf{x}$, если Ω является пересечением замкнутого круга радиуса R с центром в точке $\mathbf{x}$ и замкнутой полуплоскости, на границе которой лежит $\mathbf{x}$.

Следующая лемма доказывает шаг индукции.

Лемма 2.16. *Пусть $k\in\mathbb{Z}_+$, $\psi_k,\psi_{k+1}\in\mathbb{R}_+$, $\psi_k,\psi_{k+1}\leqslant(9\gamma)^{-1}$ и пусть $\mathbf{m}_k,\mathbf{m}_{k+1}\in\mathbb{Z}^2$. Пусть $\Omega_k\subset\mathbb{R}^2$ — полукруг радиуса*

$$R_k=(2|\mathbf{m}_{k+1}||\det(\mathbf{m}_k,\mathbf{m}_{k+1})|)^{-1}$$

с центром в точке $\boldsymbol{\alpha}_k$ и опорной прямой

$$\ell_k=\big\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\,\big|\,\langle\mathbf{x},\mathbf{m}_k\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha}_k,\mathbf{m}_k\rangle\big\}.$$

Пусть выполнены следующие условия:

1) $\langle\mathbf{m}_k,\mathbf{m}_{k+1}\rangle\leqslant 0$;

2) $\big\{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^2\,\big|\,\langle\boldsymbol{\alpha}_k,\mathbf{x}\rangle\in\mathbb{Z}\big\}=\operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{m}_k,\mathbf{m}_{k+1})$;

3) *для любого $\boldsymbol{\alpha}\in\Omega_k$ и любого $\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^2\setminus\operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{m}_k,\mathbf{m}_{k+1})$, такого что $|\mathbf{m}|<|\mathbf{m}_{k+1}|$, справедливо неравенство*

$$\|\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{m}_k\rangle\|<\|\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{m}\rangle\|;$$

4) $\gamma < \dfrac{|\det(\mathbf{m}_k, \mathbf{m}_{k+1})|}{|\mathbf{m}_k|^2} < 3\gamma$;

5) $(2\gamma\psi_k)^{-1/2} \leqslant \dfrac{|\mathbf{m}_{k+1}|}{|\mathbf{m}_k|} < (\gamma\psi_k)^{-1/2}$.

Тогда существует вектор $\mathbf{m}_{k+2} \in \mathbb{Z}^2$, *линейно независимый с вектором* $\mathbf{m}_{k+1}$, *и полукруг* $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$ *радиуса*

$$R_{k+1} = (2|\mathbf{m}_{k+2}||\det(\mathbf{m}_{k+1}, \mathbf{m}_{k+2})|)^{-1}$$

с центром в точке $\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ *и опорной прямой*

$$\ell_{k+1} = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{m}_{k+1}\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}_{k+1}, \mathbf{m}_{k+1}\rangle\big\},$$

удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\langle \mathbf{m}_{k+1}, \mathbf{m}_{k+2}\rangle \leqslant 0$;

2) $\langle \boldsymbol{\alpha}_{k+1}, \mathbf{m}_{k+1}\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}_k, \mathbf{m}_{k+1}\rangle$ *и* $\big\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \,\big|\, \langle \boldsymbol{\alpha}_{k+1}, \mathbf{x}\rangle \in \mathbb{Z}\big\} = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{m}_{k+1}, \mathbf{m}_{k+2})$;

3) *для любого* $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega_{k+1}$ *и любого* $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{m}_{k+1}, \mathbf{m}_{k+2})$, *такого что* $|\mathbf{m}| < |\mathbf{m}_{k+2}|$, *справедливо неравенство*

$$\|\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m}_{k+1}\rangle\| < \|\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m}\rangle\|;$$

4) *для любого* $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega_{k+1}$ *и любого* $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}, \pm\mathbf{m}_k\}$, *такого что* $|\mathbf{m}| < |\mathbf{m}_{k+1}|$, *справедливо неравенство*

$$\|\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m}_k\rangle\| < \|\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m}\rangle\|;$$

5) $(2\gamma\psi_{k+1})^{-1/2} \leqslant \dfrac{|\mathbf{m}_{k+2}|}{|\mathbf{m}_{k+1}|} < (\gamma\psi_{k+1})^{-1/2}$.

6) $\psi_k^{-1} \leqslant \dfrac{|\det(\mathbf{m}_{k+1}, \mathbf{m}_{k+2})|}{|\mathbf{m}_k|^2} < \psi_k^{-1} + 3\gamma$.

Доказательство. Обозначим через $\tilde{\Omega}_k$ круг, от которого Ω_k является половиной, и через $\tilde{\Omega}_{k+1}$ — соответствующий круг для Ω_{k+1}, который нам предстоит построить.

Определим δ_k следующим образом. Положим $\delta_k = 1$, если для любого $\mathbf{x} \in \Omega_k$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{m}_k\rangle \leqslant \langle \boldsymbol{\alpha}_k, \mathbf{m}_k\rangle,$$

и положим $\delta_k = -1$, если для любого $\mathbf{x} \in \Omega_k$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{m}_k\rangle \geqslant \langle \boldsymbol{\alpha}_k, \mathbf{m}_k\rangle.$$

Поскольку прямая ℓ_k является опорной к Ω_k, величина δ_k корректно определена. Следовательно,

$$\delta_k \langle \mathbf{x}, \mathbf{m}_k \rangle \leqslant \delta_k \langle \boldsymbol{\alpha}_k, \mathbf{m}_k \rangle$$

для любого $\mathbf{x} \in \Omega_k$.

Существует ровно одна точка $\mathbf{w}$ в параллелограмме, натянутом на $\mathbf{m}_k$ и $\mathbf{m}_{k+1}$, такая что дробная часть $\langle \boldsymbol{\alpha}_k, \mathbf{w} \rangle$ минимальна и положительна, то есть

$$\{\langle \boldsymbol{\alpha}_k, \mathbf{w} \rangle\} = |\det(\mathbf{m}_k, \mathbf{m}_{k+1})|^{-1}.$$

Обозначим через $\mathbf{m}_{k+1}^{\perp}$ целую точку, такую что $\langle \mathbf{m}_{k+1}^{\perp}, \mathbf{m}_{k+1} \rangle = 0$, $|\mathbf{m}_{k+1}^{\perp}| = |\mathbf{m}_{k+1}|$ и $\langle \mathbf{m}_{k+1}^{\perp}, \mathbf{m}_k \rangle > 0$. Рассмотрим точку

$$\mathbf{v} = \left(\psi_k^{-1} \frac{|\mathbf{m}_k|^2}{|\mathbf{m}_{k+1}|^2} \right) \delta_k \mathbf{m}_{k+1}^{\perp} - \sqrt{(2\gamma\psi_{k+1})^{-1} - \left(\psi_k^{-1} \frac{|\mathbf{m}_k|^2}{|\mathbf{m}_{k+1}|^2} \right)^2} \mathbf{m}_{k+1}.$$

Подмножество аффинной плоскости решетки

$$\mathbf{w} + \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{m}_k, \mathbf{m}_{k+1}),$$

состоящее из точек $\mathbf{x}$, таких что величина $\langle \mathbf{x} - \mathbf{v}, \delta_k \mathbf{m}_{k+1}^{\perp} \rangle$ минимальна и неотрицательна, лежит на прямой, параллельной $\mathbf{m}_{k+1}$. Определим $\mathbf{m}_{k+2}$ как точку этого множества, такую что величина $\langle \mathbf{m}_{k+2} - \mathbf{v}, -\mathbf{m}_{k+1} \rangle$ минимальна и неотрицательна. Отметим, что ввиду определения точки $\mathbf{m}_{k+1}^{\perp}$ знак коэффициента λ_1 в разложении $\mathbf{m}_{k+2} = \lambda_1 \mathbf{m}_k + \lambda_2 \mathbf{m}_{k+1}$ равен знаку δ_k, то есть

$$\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} = \delta_k. \tag{2.140}$$

Мы воспользуемся этим наблюдением, когда будем определять Ω_{k+1}. А сейчас обратимся к утверждениям 5) и 6), ибо для их доказательства не нужно ни Ω_{k+1}, ни α_{k+1}.

Учитывая определение точки $\mathbf{m}_{k+2}$, видим, что утверждение 5) следует из неравенств

$$|\mathbf{v}|^2 \leqslant |\mathbf{m}_{k+2}|^2 < |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{m}_{k+1}|^2 + \left(\frac{\langle \mathbf{m}_k, \mathbf{m}_{k+1}^{\perp} \rangle}{|\mathbf{m}_{k+1}^{\perp}|} \right)^2 < |\mathbf{v}|^2 + \frac{|\mathbf{m}_{k+1}|^2}{2\gamma\psi_{k+1}},$$

последнее из которых следует из соотношения

$$\frac{\langle \mathbf{m}_k, \mathbf{m}_{k+1}^{\perp} \rangle}{|\mathbf{m}_{k+1}^{\perp}|^2} = \frac{|\det(\mathbf{m}_k, \mathbf{m}_{k+1})|}{|\mathbf{m}_{k+1}|^2} < 6\gamma^2 \psi_k$$

и условия $\psi_k, \psi_{k+1} \leqslant (9\gamma)^{-1}$.

Что касается утверждения 6), оно следует из неравенств

$$\psi_k^{-1}\frac{|\mathbf{m}_k|^2}{|\mathbf{m}_{k+1}|^2} \leqslant \frac{\langle \mathbf{m}_{k+2}, \mathbf{m}_{k+1}^{\perp}\rangle}{|\mathbf{m}_{k+1}^{\perp}|^2} < \psi_k^{-1}\frac{|\mathbf{m}_k|^2}{|\mathbf{m}_{k+1}|^2} + \frac{|\det(\mathbf{m}_k, \mathbf{m}_{k+1}|}{|\mathbf{m}_{k+1}|^2} \leqslant$$
$$\leqslant \psi_k^{-1}\frac{|\mathbf{m}_k|^2}{|\mathbf{m}_{k+1}|^2} + \frac{3\gamma|\mathbf{m}_k|^2}{|\mathbf{m}_{k+1}|^2} \leqslant (\psi_k^{-1} + 3\gamma)\frac{|\mathbf{m}_k|^2}{|\mathbf{m}_{k+1}|^2}\,.$$

Действительно, поскольку

$$\frac{|\det(\mathbf{m}_{k+1}, \mathbf{m}_{k+2})|}{|\mathbf{m}_{k+1}|^2} = \frac{\langle \mathbf{m}_{k+2}, \mathbf{m}_{k+1}^{\perp}\rangle}{|\mathbf{m}_{k+1}^{\perp}|^2},$$

имеет место неравенство

$$\psi_k^{-1} \leqslant \frac{|\det(\mathbf{m}_{k+1}, \mathbf{m}_{k+2})|}{|\mathbf{m}_k|^2} < \psi_k^{-1} + 3\gamma.$$

Определим теперь $\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ и Ω_{k+1} и докажем оставшиеся утверждения. Определим $\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ равенствами

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_{k+1}, \mathbf{m}_{k+1}\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}_k, \mathbf{m}_{k+1}\rangle, \tag{2.141}$$

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_{k+1}, \mathbf{m}_{k+2}\rangle = [\langle \boldsymbol{\alpha}_k, \mathbf{m}_{k+2}\rangle]. \tag{2.142}$$

Заметим, что по лемме 2.15 для таким образом выбранных $\mathbf{m}_{k+2}$ и $\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ справедливо утверждение 2) леммы. Из леммы 2.15 также следует, что расстояние от $\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ до ℓ_k равно

$$(|\mathbf{m}_k||\det(\mathbf{m}_{k+1}, \mathbf{m}_{k+2})|)^{-1},$$

откуда в свою очередь следует, что

$$|\boldsymbol{\alpha}_{k+1} - \boldsymbol{\alpha}_k| = \frac{|\mathbf{m}_{k+1}|}{|\det(\mathbf{m}_k, \mathbf{m}_{k+1})\det(\mathbf{m}_{k+1}, \mathbf{m}_{k+2})|}\,.$$

Стало быть,

$$|\boldsymbol{\alpha}_{k+1} - \boldsymbol{\alpha}_k| + R_{k+1} =$$
$$= \frac{2|\mathbf{m}_{k+1}|^2}{|\det(\mathbf{m}_{k+1}, \mathbf{m}_{k+2})|}R_k + \frac{|\det(\mathbf{m}_k, \mathbf{m}_{k+1})|}{|\det(\mathbf{m}_{k+1}, \mathbf{m}_{k+2})|}\frac{|\mathbf{m}_{k+1}|}{|\mathbf{m}_{k+2}|}R_k <$$
$$< \frac{2}{\gamma}R_k + 3\gamma\psi_k\sqrt{2\gamma\psi_{k+1}}R_k < R_k.$$

Здесь мы воспользовались уже доказанными утверждениями 5) и 6), условием 4) леммы, условием $\psi_k, \psi_{k+1} \leqslant (9\gamma)^{-1}$ и определением γ. Таким образом,

$$\tilde{\Omega}_{k+1} \subset \tilde{\Omega}_k.$$

Более того, $\tilde{\Omega}_{k+1}$ содержится либо в Ω_k, либо в $\tilde{\Omega}_k \backslash \Omega_k$, поскольку

$$R_{k+1} < (|\mathbf{m}_k| |\det(\mathbf{m}_{k+1}, \mathbf{m}_{k+2})|)^{-1},$$

а правая часть этого неравенства, как уже отмечалось ранее, равна расстоянию от $\boldsymbol{\alpha}_{k+1}$ до ℓ_k.

Докажем, что $\tilde{\Omega}_{k+1} \subset \Omega_k$. В силу (2.142) имеет место неравенство

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_{k+1}, \mathbf{m}_{k+2} \rangle < \langle \boldsymbol{\alpha}_k, \mathbf{m}_{k+2} \rangle,$$

так что если $\mathbf{m}_{k+2} = \lambda_1 \mathbf{m}_k + \lambda_2 \mathbf{m}_{k+1}$, то ввиду равенства (2.141)

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_{k+1}, \lambda_1 \mathbf{m}_k \rangle < \langle \boldsymbol{\alpha}_k, \lambda_1 \mathbf{m}_k \rangle,$$

откуда, учитывая (2.140), получаем, что

$$\delta_k \langle \boldsymbol{\alpha}_{k+1}, \mathbf{m}_k \rangle < \delta_k \langle \boldsymbol{\alpha}_k, \mathbf{m}_k \rangle.$$

То есть

$$\tilde{\Omega}_{k+1} \subset \Omega_k.$$

Чтобы определить Ω_{k+1}, остается выбрать между двух частей круга $\tilde{\Omega}_{k+1}$, отделенных друг от друга прямой ℓ_{k+1}. Из следствия 18 и определения R_{k+1} получаем, что утверждение 3) леммы верно для любого $\boldsymbol{\alpha} \in \tilde{\Omega}_{k+1}$, так что при выборе двух половинок $\tilde{\Omega}_{k+1}$ достаточно требовать лишь выполнения утверждения 4).

Из указанных двух половин круга $\tilde{\Omega}_{k+1}$ выберем в качестве Ω_{k+1} ту, которая ближе к прямой ℓ_k.

Докажем утверждение 4). Заметим сначала, что при любом $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega_k$ линейная форма $\langle \boldsymbol{\alpha}, \cdot \rangle$ не принимает целых значений ни в какой точке множества $\mathbb{Z}^2 \backslash \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{m}_k, \mathbf{m}_{k+1})$, чья норма не превосходит $|\mathbf{m}_{k+1}|$. В то же время для любого $\mathbf{m} \in \pm \mathbf{w} + \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{m}_k, \mathbf{m}_{k+1})$ справедливо равенство

$$\|\langle \boldsymbol{\alpha}_k, \mathbf{m} \rangle\| = |\det(\mathbf{m}_k, \mathbf{m}_{k+1})|^{-1}.$$

Отсюда, учитывая условия 4) и 5) леммы, заключаем, что для любого $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega_k$ и любого $\mathbf{m} \in \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{m}_k, \mathbf{m}_{k+1})$, такого что $|\mathbf{m}| \leqslant |\mathbf{m}_{k+1}|$, справедливо равенство

$$\big|\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m} \rangle - \langle \boldsymbol{\alpha}_k, \mathbf{m} \rangle\big| < 1/2.$$

Это означает, что для любого $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega_k$, неколлинеарного с $\boldsymbol{\alpha}_k$, и любых двух точек $\mathbf{m}', \mathbf{m}'' \in \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{m}_k, \mathbf{m}_{k+1})$, таких что $|\mathbf{m}'|, |\mathbf{m}''| \leqslant |\mathbf{m}_{k+1}|$, отношение

$$\|\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m}' \rangle\| \Big/ \|\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m}'' \rangle\|$$

равно отношению расстояний от точек $\mathbf{m}'$ и $\mathbf{m}''$ до прямой

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x} \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}_k, \mathbf{x} \rangle \right\}. \tag{2.143}$$

Ввиду выбора Ω_{k+1} и условия 1) леммы, каким бы ни было $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega_{k+1}$, точки $\pm\mathbf{m}_k$ находятся ближе к прямой (2.143), чем любая другая ненулевая точка множества $\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{m}_k, \mathbf{m}_{k+1})$, чья норма меньше, чем $|\mathbf{m}_{k+1}|$. Отсюда следует утверждение 4). $\square$

Опишем теперь базу индукции. Положим $\psi_1 = \psi(1)$ и

$$\mathbf{m}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{m}_2 = \left(\left\lceil \sqrt{(2\gamma\psi_1)^{-1} - \gamma^2} \right\rceil, 3 \right), \quad \boldsymbol{\alpha}_1 = \left(0, 3^{-1}\right).$$

Легко проверяется, что для этих точек выполняются условия 1), 2), 4), 5) леммы 2.16. Полагая

$$R_1 = (2|\mathbf{m}_2||\det(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)|)^{-1},$$

выбирая в качестве Ω_1 любой из соответствующих полукругов и учитывая следствие 18, видим, что все условия леммы 2.16 выполнены. Что и дает основание индукции.

Положим $\psi_k = \psi(|\mathbf{m}_k|)$ и применим лемму 2.16 последовательно для $k = 2, 3, 4, \ldots$. Это можно сделать, поскольку из условия 5) и утверждения 6) леммы 2.16 для фиксированного $k \in \mathbb{N}$ следует условие 4) той же леммы с $k+1$ вместо k. Таким образом получим последовательность $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ вложенных полукругов с общей точкой $\boldsymbol{\alpha}$ и последовательность точек $\{\mathbf{m}_k\}_{k=1}^{\infty}$. Из утверждения 4) леммы 2.16 следует, что для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ пара $\pm\mathbf{m}_k$ является k-й парой наилучших приближений для линейной формы $\langle \boldsymbol{\alpha}, \cdot \rangle$, тогда как в силу утверждений 5) и 6) для каждого $k \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$\psi_k^{-1} \leqslant \frac{|\det(\mathbf{m}_{k+1}, \mathbf{m}_{k+2})|}{|\mathbf{m}_k|^2} < \psi_k^{-1} + 3\gamma < (\psi_k - 3\gamma\psi_k^2)^{-1}$$

и

$$R_{k+1}|\mathbf{m}_k|^3 \leqslant \left(2(2\gamma\psi_{k+1})^{-1/2}(2\gamma\psi_k)^{-1/2}\psi_k^{-1} \right)^{-1} \leqslant \gamma\psi_k^2.$$

Стало быть, для всех $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega_{k+1}$

$$\psi_k - 4\gamma\psi_k^2 < \|\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m}_k \rangle\| \cdot |\mathbf{m}_k|^2 \leqslant \psi_k + \gamma\psi_k^2,$$

что доказывает теорему 2.20.

Замечание 2.2. Похожим образом из леммы 2.16 можно вывести несколько иное утверждение. А именно, в предположениях теоремы 2.20 можно доказать существование континуума линейных форм $\langle \boldsymbol{\alpha}, \cdot \rangle$, наилучшие приближения $\mathbf{m}_k$ которых удовлетворяют условию

$$\psi(k) - 4\gamma\psi(k)^2 < \|\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{m}_k \rangle\| \cdot |\mathbf{m}_k|^2 \leqslant \psi(k) + \gamma\psi(k)^2.$$

Для этого нужно просто положить $\psi_k = \psi(k)$ и повторить рассуждение, доказывающее теорему 2.20.

Замечание 2.3. В теореме 2.20 можно было бы написать более точные константы. Однако тогда доказательство стало бы более громоздким, поэтому мы решили пожертвовать константами ради ясности изложения.

Глава 3

“Мультипликативный” подход

3.1 Мультипликативные экспоненты

3.1.1 Формулировка основной теоремы

Основная теорема данного параграфа (теорема 3.1) весьма похожа на теорему Малера, описывающую принцип переноса в случае обыкновенных диофантовых приближений (теорема 1.7, см. также [Ma1], [Ma2], [C]). Особенно же она похожа на усиленную ее версию — теорему 2.8 и так же, как эта теорема, использует величину Δ_d, определяемую равенством (2.18).

Однако, теорема 3.1 обладает довольно неожиданным отличием, которое некоторым образом смешивает задачи обыкновенных и мультипликативных приближений и тем самым позволяет доказать неравенства, связывающие обыкновенные и мультипликативные экспоненты в случае, когда либо n, либо m равно единице.

Теорема 3.1. *Если $0 < U < 1 \leqslant X$ и для $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$ справедливы неравенства*

$$\Pi'(\mathbf{x}) \leqslant X, \qquad \Pi(\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leqslant U, \tag{3.1}$$

то существуют такие $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$, что

$$\Pi'(\mathbf{y}) \leqslant Y, \qquad \Pi(\Theta^\intercal\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leqslant V, \tag{3.2}$$

$$|\Theta^\intercal\mathbf{y} - \mathbf{x}|_\infty \leqslant \Delta_d V^m Y^n, \tag{3.3}$$

где

$$Y = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} \left(X^m U^{1-m}\right)^{\frac{1}{d-1}}, \quad V = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} \left(X^{1-n} U^n\right)^{\frac{1}{d-1}}, \tag{3.4}$$

и $d = n + m$.

3.1.2 Следствия

Следствие 19. *Матрица Θ мультипликативно плохо приближаема тогда и только тогда, когда мультипликативно плохо приближаема матрица $\Theta^{\intercal}$.*

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует, что если неравенство

$$\Pi'(\mathbf{x})^m \Pi(\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y})^n \leqslant C,$$

где $C < 1$, имеет решение $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, то существуют такие $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$, что

$$\Pi'(\mathbf{y})^n \Pi(\Theta^{\intercal}\mathbf{y} - \mathbf{x})^m \leqslant \Delta_d^{-\frac{d}{d-1}} C^{\frac{1}{d-1}}.$$

Отсюда, полагая

$$\mu_1 = \inf_{\substack{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \Pi'(\mathbf{x})^m \Pi(\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y})^n$$

и

$$\mu_2 = \inf_{\substack{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n \\ \mathbf{y} \neq \mathbf{0}}} \Pi'(\mathbf{y})^n \Pi(\Theta^{\intercal}\mathbf{y} - \mathbf{x})^m,$$

получаем неравенства

$$\Delta_d^d \mu_2^{d-1} \leqslant \mu_1 \leqslant \Delta_d^{-\frac{d}{d-1}} \mu_2^{\frac{1}{d-1}}.$$

В частности, $\mu_1 > 0$ тогда и только тогда, когда $\mu_2 > 0$. $\square$

Следствие 20.

$$\beta_{M}(\Theta^{\intercal}) \geqslant \frac{n\beta_{M}(\Theta) + n - 1}{(m-1)\beta_{M}(\Theta) + m}.$$

Доказательство. Пусть γ — положительное вещественное число, $\gamma < \beta_{M}(\Theta)$. По условию существует бесконечно много пар $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, таких что

$$\Pi(\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leqslant \Pi'(\mathbf{x})^{-\gamma}. \tag{3.5}$$

Если бесконечно много таких пар имеют одинаковую $\mathbf{x}$-компоненту, то для такого $\mathbf{x}$ вектор $\Theta\mathbf{x}$ обязан иметь хотя бы одну целую компоненту. Но тогда все пары, целочисленно кратные рассматриваемым, удовлетворяют (1.25). Следовательно, можно рассмотреть последовательность пар $\mathbf{x}_i \in \mathbb{Z}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y}_i \in \mathbb{Z}^n$, $i \in \mathbb{Z}_+$, таких что

$$\Pi'(\mathbf{x}_i) = t_i > 1, \quad \Pi(\Theta\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i) \leqslant t_i^{-\gamma}, \quad t_i \to \infty \ \text{ as } \ i \to \infty.$$

Применяя теорему 3.1, получаем последовательность пар $\mathbf{x}'_i \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y}'_i \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, таких что

$$\Pi'(\mathbf{y}'_i) \leqslant \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} t_i^{\frac{(m-1)\gamma+m}{d-1}}, \quad \Pi(\Theta^\intercal \mathbf{y}'_i - \mathbf{x}'_i) \leqslant \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} t_i^{-\frac{n\gamma+(n-1)}{d-1}}. \tag{3.6}$$

Стало быть, для каждого i

$$\Pi(\Theta^\intercal \mathbf{y}'_i - \mathbf{x}'_i) \leqslant \Pi'(\mathbf{y}'_i)^{-\gamma_i}, \tag{3.7}$$

где

$$\gamma_i = \frac{n\gamma + (n-1) + \varkappa_i}{(m-1)\gamma + m - \varkappa_i}, \quad \varkappa_i = \frac{\ln \Delta_d}{\ln t_i}.$$

Если пары $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{y}'_i)$ совпадают для бесконечного числа значений индекса i, то для таких повторяющихся пар вектор $\Theta^\intercal \mathbf{y}'_i - \mathbf{x}'_i$ обязан иметь нулевую компоненту, так как правая часть второго неравенства (3.6) стремится к нулю при i стремящемся к бесконечности. Но тогда верно неравенство (3.7) с парой $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{y}'_i)$, замененной на любою пару, целочисленно кратную $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{y}'_i)$. Стало быть, можно считать, что среди пар $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{y}'_i)$ бесконечно много различных. Откуда немедленно следует, что

$$\beta_{\scriptscriptstyle M}(\Theta^\intercal) \geqslant \sup_{\gamma < \beta_M(\Theta)} \limsup_{i \in \mathbb{Z}_+} \gamma_i = \frac{n\beta_{\scriptscriptstyle M}(\Theta) + (n-1)}{(m-1)\beta_{\scriptscriptstyle M}(\Theta) + m}.$$

$\square$

Заметим, что в доказательстве следствия 20 мы вообще не пользовались неравенством (3.3). Но при $n = 1$ неравенство $\Pi'(\mathbf{y}) \leqslant Y$ для ненулевого целого $\mathbf{y}$ означает в точности, что $|\mathbf{y}| \leqslant Y$, что в совокупности с неравенством (3.3) дает некоторую информацию об обыкновенных диофантовых приближениях для матрицы $\Theta^\intercal$. А именно, имеет место

Следствие 21. *Если $n = 1$, то*

$$\beta(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{\beta_{\scriptscriptstyle M}(\Theta) - m}{(m-1)\beta_{\scriptscriptstyle M}(\Theta) + m}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Пусть γ — как в доказательстве следствия 19. Точно так же, как и там, можно получить последовательность пар $\mathbf{x}'_i \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y}'_i \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbf{0}\}$, таких что

$$|\mathbf{y}'_i| \leqslant \Delta_d^{-\frac{1}{m}} t_i^{\frac{(m-1)\gamma+m}{m}}, \quad |\Theta^\intercal \mathbf{y}'_i - \mathbf{x}'_i|_\infty \leqslant \Delta_d^{-\frac{1}{m}} t_i^{\frac{m-\gamma}{m}},$$

где $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Тогда для каждого i будем иметь

$$|\Theta^\intercal \mathbf{y}'_i - \mathbf{x}'_i|_\infty \leqslant |\mathbf{y}'_i|^{-\gamma_i},$$

где теперь

$$\gamma_i = \frac{\gamma - m + \varkappa_i}{(m-1)\gamma + m - \varkappa_i}\,, \quad \varkappa_i = \frac{\ln \Delta_d}{\ln t_i}\,.$$

Стало быть,

$$\beta(\Theta^{\intercal}) \geqslant \sup_{\gamma < \beta_{M}(\Theta)} \limsup_{i \in \mathbb{Z}_+} \gamma_i = \frac{\beta_{M}(\Theta) - m}{(m-1)\beta_{M}(\Theta) + m}\,.$$

$\square$

Неравенство (3.8) сильнее тривиальной оценки $\beta(\Theta^{\intercal}) \geqslant 1/m$ при $\beta_{M}(\Theta) > m + m^2$ и сильнее неравенства Хинчина

$$\beta(\Theta^{\intercal}) \geqslant \frac{\beta(\Theta)}{(m-1)\beta(\Theta) + m}$$

при $\beta_{M}(\Theta) > m\beta(\Theta) + m$.

Из следствий 20 и 21 получаем

Следствие 22. *Если $m = 1$, то*

$$\beta_{M}(\Theta) \geqslant \beta(\Theta) \geqslant \frac{n\beta_{M}(\Theta) - 1}{n(n-1)\beta_{M}(\Theta) + n^2 - n + 1}\,. \tag{3.9}$$

Неравенство (3.9) сильнее тривиальной оценки $\beta(\Theta) \geqslant 1/n$ при $\beta_{M}(\Theta) > n + 1/n$.

Нет никаких оснований полагать, что неравенства (3.8) или (3.9) нельзя улучшить. Например, последнее получено “двойным переносом”, то есть переходом к двойственному пространству и обратно. Естественно ожидать, что при таком методе должно что-то теряться. Чтобы это продемонстрировать, приведем еще одно следствие для $m = 1$, $n = 2$, то есть для случая гипотезы Литтлвуда. Будем, как обычно, обозначать через $\|\cdot\|$ расстояние до ближайшего целого.

Следствие 23. *Пусть заданы вещественные числа α, β. Если существует бесконечно много таких $q \in \mathbb{Z}_+$, что*

$$q\,\|q\alpha\|\,\|q\beta\| \leqslant \mu,$$

то существует бесконечно много таких $q \in \mathbb{Z}_+$, что

$$q\,\|q\alpha\|\,\|q\beta\| \leqslant (4/3)^{9/4}\mu^{1/4}, \tag{3.10}$$

$$\max(\|q\alpha\|, \|q\beta\|) \leqslant (4/3)^{5/4}\mu^{1/4}. \tag{3.11}$$

Как было замечено Н. Г. Мощевитиным, подобное утверждение можно доказать непосредственно при помощи теоремы Дирихле, даже с обеими константами в (3.10) и (3.11) равными 1, что лишь усиливает утверждение. Однако, неясно, можно ли улучшить показатель 1/4 в каком-нибудь из неравенств (3.10), (3.11), или хотя бы заменить $\mu^{1/4}$ на $o(\mu^{1/4})$. Так что, если этот показатель улучшить все-таки нельзя, любопытно, что он получается даже методом “двойного переноса”.

3.1.3 Произвольные функции

Если ограничиваться только показательными функциями при изучении асимптотического поведения какой-нибудь величины, то от нашего внимания ускользает промежуточный рост. Однако теорема 3.1 позволяет работать не только с (мультипликативными) диофантовыми экспонентами, но также и с произвольными функциями, удовлетворяющими некоторым естественным условиям роста. В данном пункте мы сформулируем соответствующее утверждение и приведем пример того, как можно “переносить” информацию о промежуточном росте.

Пусть $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — произвольная функция. По аналогии с определением 1.6 дадим

Определение 3.1. Будем называть матрицу Θ *мультипликативно ψ-аппроксимируемой*, если существует бесконечно много таких $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, что

$$\Pi(\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leqslant \psi(\Pi'(\mathbf{x})). \tag{3.12}$$

Так же, как $\beta(\Theta)$ равно супремуму тех γ, при которых Θ является $t^{-\gamma}$-аппроксимируемой, $\beta_{_M}(\Theta)$ равно супремуму тех γ, при которых Θ является мультипликативно $t^{-\gamma}$-аппроксимируемой.

Теорема 3.2. *Пусть $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — произвольная функция, такая что*

$$\psi(t) < 1 \qquad \textit{для всех достаточно больших } t,$$

и пусть

$$t^{\frac{1-n}{n}}\psi(t) \to 0 \qquad \textit{при} \qquad t \to \infty.$$

Предположим, что функция

$$f(t) = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} \left(t^m \psi(t)^{1-m}\right)^{\frac{1}{d-1}}$$

обратима. Положим

$$g(t) = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} \left(t^{1-n} \psi(t)^n\right)^{\frac{1}{d-1}},$$

и
$$\varphi(t) = g(f^-(t)),$$
где f^- обозначает функцию, обратную к f.

Пусть матрица Θ мультипликативно ψ-аппроксимируема. Тогда матрица $\Theta^\intercal$ мультипликативно φ-аппроксимируема.

Доказательство. По условию существует бесконечно много пар $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m\backslash\{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, удовлетворяющих неравенству (3.12). Если бесконечно много таких пар имеют одну и ту же $\mathbf{x}$-компоненту, то для такого $\mathbf{x}$ вектор $\Theta\mathbf{x}$ обязан иметь целочисленную компоненту. Но тогда все пары, целочисленно кратные этим парам, будут удовлетворять неравенству (3.12). Поэтому найдется такая последовательность пар $\mathbf{x}_i \in \mathbb{Z}^m\backslash\{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y}_i \in \mathbb{Z}^n$, $i \in \mathbb{Z}_+$, что
$$\Pi'(\mathbf{x}_i) = t_i, \quad \Pi(\Theta\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i) \leqslant \psi(t_i), \quad t_i \to \infty \ \text{ при } \ i \to \infty.$$
Для такой последовательности, начиная с некоторого индекса i_0 все значения $\psi(t_i)$ будут меньше единицы, так что, применяя теорему 3.1 к каждой паре $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i$, $i \geqslant i_0$, мы получим пару $\mathbf{x}'_i \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y}'_i \in \mathbb{Z}^n\backslash\{\mathbf{0}\}$, такую что
$$\Pi'(\mathbf{y}'_i) \leqslant f(t_i), \quad \Pi(\Theta^\intercal\mathbf{y}'_i - \mathbf{x}'_i) \leqslant g(t_i), \quad g(t_i) \to 0 \ \text{ при } \ i \to \infty.$$
Стало быть, для каждого $i \geqslant i_0$ мы будем иметь
$$\Pi(\Theta^\intercal\mathbf{y}'_i - \mathbf{x}'_i) \leqslant \varphi(\Pi'(\mathbf{y}'_i)). \tag{3.13}$$
Если при этом пары $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{y}'_i)$ совпадают для бесконечного количества значений индекса i, то для таких повторяющихся пар вектор $\Theta^\intercal\mathbf{y}'_i - \mathbf{x}'_i$ будет иметь нулевую компоненту, так как $g(t_i) \to 0$ при $i \to \infty$. Но тогда в неравенстве (3.13) пару $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{y}'_i)$ можно заменить на любую пару, целочисленно кратную $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{y}'_i)$. Следовательно, можно считать, что среди пар $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{y}'_i)$ бесконечно много различных, то есть $\Theta^\intercal$ мультипликативно φ-аппроксимируема. $\square$

Замечание 3.1. При $n = 1$ доказательство теоремы 3.2 можно без труда модифицировать, чтобы показать, что матрица $\Theta^\intercal$ χ-аппроксимируема (в обычном смысле), где
$$\chi(t) = h(f^-(t)), \quad h(t) = \Delta_d t^m \psi(t)^n.$$

Замечание 3.2. Легко также видеть, что следствия 20, 21 можно вывести из теорем 3.2, если в качестве функций ψ и φ взять соответствующие показательные функции.

Приведем пример утверждения в стиле теорем переноса, чувствительного к логарифмическому росту. И дадим его для случая, актуального для гипотезы Литтлвуда. Положим $c = \Delta_3^{-1/2} = \sqrt{3}/2$.

Следствие 24. *Пусть заданы числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Если существует бесконечно много таких $q \in \mathbb{Z}_+$, что*

$$\|q\alpha\|\,\|q\beta\| \leqslant \frac{1}{q \ln q}\,,$$

то существует бесконечно много таких пар $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$, что

$$\|p\alpha + q\beta\| \leqslant \frac{c^3}{t^2\sqrt{2\ln(t/c)}}\,, \quad t = \sqrt{\max(1, |p|) \cdot \max(1, |q|)}.$$

Приведем также "обратный" аналог этого утверждения. Как и прежде, полагаем $c = \Delta_3^{-1/2} = \sqrt{3}/2$. Обозначим через $\rho(t)$ функцию, обратную к функции $ct^2\sqrt{\ln(1+t)}$.

Следствие 25. *Пусть заданы числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Если существует бесконечно много таких пар $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$, что*

$$\|p\alpha + q\beta\| \leqslant \frac{1}{t^2 \ln(1+t)}\,, \quad t = \sqrt{\max(1, |p|) \cdot \max(1, |q|)},$$

то существует бесконечно много таких $q \in \mathbb{Z}_+$, что

$$\|q\alpha\|\,\|q\beta\| \leqslant \frac{c^2}{\rho(q)^2 \ln(1 + \rho(q))}\,.$$

3.1.4 Монотонность Δ_d

Покажем, что константа Δ_d, определяемая равенством (2.18), убывает с ростом d. Нам этот факт понадобится для доказательства теоремы 3.1.

Лемма 3.1. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^k$ выпуклое k-мерное тело, центрально-симметричное относительно начала координат. Обозначим через h толщину M в направлении вектора $\mathbf{e} \in \mathcal{S}^{k-1}$, то есть супремум величины $2\langle \mathbf{e}, \mathbf{x} \rangle$ по всем $\mathbf{x} \in M$. Тогда*

$$\mathrm{vol}_k\, M \leqslant h\, \mathrm{vol}_{\mathbf{e}}(M).$$

Доказательство. Положим

$$\varphi(t) = \mathrm{vol}_{k-1} \left\{ \mathbf{x} \in M \,\middle|\, \langle \mathbf{e}, \mathbf{x} \rangle = t \right\}$$

В силу неравенства Брунна–Минковского функция $\varphi(t)^{\frac{1}{k-1}}$ вогнута относительно переменной t (см. [BF]). Но $\varphi(t) = \varphi(-t)$, так что

$$\varphi(0) \geqslant \left(\frac{\varphi(t)^{\frac{1}{k-1}} + \varphi(-t)^{\frac{1}{k-1}}}{2} \right)^{k-1} = \varphi(t).$$

Стало быть,

$$\mathrm{vol}_k M = \int_{t=-h/2}^{t=h/2} \varphi(t) dt \leqslant h\varphi(0) = h \,\mathrm{vol}_{\mathbf{e}}(M).$$

$\square$

Лемма 3.2. $\Delta_d \leqslant \Delta_{d-1}$.

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{B}_\infty^{d-1}$ как подмножество куба $\mathcal{B}_\infty^d$, состоящее из точек с нулевой последней координатой. Положим

$$M_k = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{B}_\infty^k \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k} x_i = 0 \right\}, \quad k = d, d-1.$$

Положим также

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{d(d-1)}} \big(1, \ldots, 1, 1-d\big)^\intercal \in \mathcal{S}^{d-1}.$$

Для любого $\mathbf{x} \in M_d$

$$\langle \mathbf{e}, \mathbf{x} \rangle = \frac{-dx_d}{\sqrt{d(d-1)}} \leqslant \sqrt{\frac{d}{d-1}}\,.$$

Стало быть, толщина M_d в направлении вектора $\mathbf{e}$ не превосходит $2\sqrt{d/(d-1)}$. Применяя лемму 3.1, получаем

$$\Delta_d = \frac{1}{2^{d-1}\sqrt{d}} \mathrm{vol}_{d-1}(M_d) \leqslant \frac{1}{2^{d-2}\sqrt{d-1}} \mathrm{vol}_{d-2}(M_{d-1}) = \Delta_{d-1},$$

что доказывает утверждение леммы. $\square$

3.1.5 d-мерное пространство

Пусть d, $\boldsymbol{\ell}_1,\ldots,\boldsymbol{\ell}_d,\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_d$, T, T', $\mathcal{L}^m$, $\mathcal{L}^n$ — как в параграфах 2.1, 2.2. То есть $d=m+n$, $\boldsymbol{\ell}_1,\ldots,\boldsymbol{\ell}_m,\mathbf{e}_{m+1},\ldots,\mathbf{e}_d$ — столбцы матрицы

$$T=\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -\Theta & E_n \end{pmatrix},$$

$\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m,\boldsymbol{\ell}_{m+1},\ldots,\boldsymbol{\ell}_d$ — столбцы матрицы

$$T'=\begin{pmatrix} E_m & \Theta^\intercal \\ 0 & E_n \end{pmatrix},$$

где E_m и E_n — соответствующие единичные матрицы,

$$\mathcal{L}^m=\operatorname{span}_\mathbb{R}(\boldsymbol{\ell}_1,\ldots,\boldsymbol{\ell}_m),\qquad\text{и}\qquad \mathcal{L}^n=\operatorname{span}_\mathbb{R}(\boldsymbol{\ell}_{m+1},\ldots,\boldsymbol{\ell}_d).$$

Тогда $T(T')^\intercal=E_d$, $\mathcal{L}^m=(\mathcal{L}^n)^\perp$, причем точка $\mathbf{z}=(\mathbf{x},-\mathbf{y})\in\mathbb{R}^m\oplus\mathbb{R}^n$ лежит в $\mathcal{L}^m$ тогда и только тогда, когда $\Theta\mathbf{x}=\mathbf{y}$, а точка $\mathbf{z}=(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}^m\oplus\mathbb{R}^n$ лежит в $\mathcal{L}^n$ тогда и только тогда, когда $\Theta^\intercal\mathbf{y}=\mathbf{x}$. То есть подпространства $\mathcal{L}^m$ и $\mathcal{L}^n$ изоморфны пространствам решений систем (1.1) и (1.2), соответственно. Итак, если есть целая точка, близкая к подпространству $\mathcal{L}^m$, нам нужно найти целую точку, близкую к подпространству $\mathcal{L}^n$, понимая близость в терминах среднего геометрического.

3.1.6 Доказательство теоремы 3.1

Положим

$$\mathcal{H}=\Big\{\mathbf{z}=(\mathbf{x},-\mathbf{y})\in\mathbb{R}^m\oplus\mathbb{R}^n\ \Big|\ \mathbf{x},\mathbf{y}\text{ удовлетворяют (3.1)}\Big\},\tag{3.14}$$

$$\mathcal{H}'=\Big\{\mathbf{z}=(\mathbf{x},-\mathbf{y})\in\mathcal{H}\ \Big|\ |\Theta\mathbf{x}-\mathbf{y}|_\infty\leqslant\Delta_d V^m Y^n\Big\},$$

и

$$\widehat{\mathcal{H}}=\Big\{\mathbf{z}=(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}^m\oplus\mathbb{R}^n\ \Big|\ \mathbf{x},\mathbf{y}\text{ удовлетворяют (3.2), (3.3)}\Big\}.\tag{3.15}$$

Мы должны доказать, что если $\mathcal{H}$ содержит ненулевую целую точку, то и $\widehat{\mathcal{H}}$ содержит ненулевую целую точку.

$\mathcal{H}$ является объединением параллелепипедов

$$M_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}=\Big\{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^d\ \Big|\ |\langle\mathbf{e}_j,\mathbf{z}\rangle|\leqslant\lambda_j,\quad j=1,\ldots,m,\\ |\langle\boldsymbol{\ell}_{m+i},\mathbf{z}\rangle|\leqslant\mu_i,\quad i=1,\ldots,n\Big\}$$

по всем наборам $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})=(\lambda_1,\dots,\lambda_m,\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{R}_+^d$, таким что

$$\lambda_1\dots\lambda_m=X^m,\quad \mu_1\dots\mu_n=U^n, \tag{3.16}$$

$$\min_{1\leqslant j\leqslant m}\lambda_j\geqslant 1. \tag{3.17}$$

Если добавить к условию (3.16) неравенство

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\mu_i\leqslant \Delta_d V^m Y^n, \tag{3.18}$$

получим $\mathcal{H}'$. Аналогично, $\widehat{\mathcal{H}}$ является объединением параллелепипедов

$$\widehat{M}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}=\Big\{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^d\ \Big|\ |\langle\boldsymbol{\ell}_j,\mathbf{z}\rangle|\leqslant\lambda_j,\quad j=1,\dots,m,\\ |\langle\mathbf{e}_{m+i},\mathbf{z}\rangle|\leqslant\mu_i,\quad i=1,\dots,n\Big\}.$$

по всем наборам $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})=(\lambda_1,\dots,\lambda_m,\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{R}_+^d$, таким что

$$\lambda_1\dots\lambda_m=V^m,\quad \mu_1\dots\mu_n=Y^n, \tag{3.19}$$

$$\max_{1\leqslant j\leqslant m}\lambda_j\leqslant\Delta_d V^m Y^n,\quad \min_{1\leqslant i\leqslant n}\mu_i\geqslant 1. \tag{3.20}$$

Для каждого набора $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$ будем обозначать через $D_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}$ диагональную матрицу $d\times d$ с элементами $\lambda_1^{-1},\dots,\lambda_m^{-1}$, $\mu_1^{-1},\dots,\mu_n^{-1}$ на диагонали. Положим

$$A_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}=TD_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}$$

Для матрицы алгебраических дополнений $A'_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}$ имеем

$$A'_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}=T'D_{\boldsymbol{\lambda}',\boldsymbol{\mu}'},$$

где $(\boldsymbol{\lambda}',\boldsymbol{\mu}')=(\lambda'_1,\dots,\lambda'_m,\mu'_1,\dots,\mu'_n)$,

$$\lambda'_j=\lambda_j^{-1}\prod_{k=1}^m\lambda_k\prod_{l=1}^n\mu_l,\qquad \mu'_i=\mu_i^{-1}\prod_{k=1}^m\lambda_k\prod_{l=1}^n\mu_l.$$

Заметим, что соответствие $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})\mapsto(\boldsymbol{\lambda}',\boldsymbol{\mu}')$ является биекцией $\mathbb{R}_+^d$ на себя. Кроме того, если $(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})$ удовлетворяет (3.19) и (3.20), то в силу (3.4)

$$\lambda'_1\dots\lambda'_m=V^{m(m-1)}Y^{mn}=\Delta_d^{-m}X^m$$

и

$$\mu'_1\dots\mu'_n=V^{mn}Y^{n(n-1)}=\Delta_d^{-n}U^n,$$

то есть $(\Delta_d\boldsymbol{\lambda}', \Delta_d\boldsymbol{\mu}')$ удовлетворяет (3.16), (3.17) и (3.18). Отсюда видим, что соответствие $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \mapsto (\Delta_d\boldsymbol{\lambda}', \Delta_d\boldsymbol{\mu}')$ является биекцией поверхности в $\mathbb{R}^d_+$, определяемой соотношениями (3.19), (3.20) на поверхность в $\mathbb{R}^d_+$, определяемую соотношениями (3.16), (3.17) и (3.18). Данное соответствие порождает естественным образом биекцию между семействами параллелепипедов $M_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}$ и $\widehat{M}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}$, покрывающими $\mathcal{H}'$ и $\widehat{\mathcal{H}}$, соответственно. С другой стороны, если $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ удовлетворяет (3.19), то

$$\widehat{M}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}} = (A^*_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}})^{-1}\mathcal{B}^d_\infty \quad \text{и} \quad M_{\Delta_d\boldsymbol{\lambda}',\Delta_d\boldsymbol{\mu}'} = \Delta_d((A'_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}})^*)^{-1}\mathcal{B}^d_\infty,$$

откуда, в силу леммы 2.3 и следствия 3 леммы 2.4, следует включение

$$M_{\Delta_d\boldsymbol{\lambda}',\Delta_d\boldsymbol{\mu}'} \subset (\widehat{M}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}})^\wedge.$$

Стало быть, если $\mathcal{H}'$ содержит ненулевую целую точку, то существует набор $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$, удовлетворяющий (3.19) и (3.20), такой что множество $(\widehat{M}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}})^\wedge$ содержит ненулевую целую точку. Но тогда ненулевую целую точку содержит и параллелепипед $\widehat{M}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}$, в силу леммы 2.1. Если $\mathbf{y}$-компонента этой точки оказалась равной нулю, то должно выполняться неравенство $V \geqslant 1$. В этом случае для любого $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$ найдется $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$, для которого выполняется второе из неравенств (3.2). А поскольку $Y > 1$, первое из неравенств (3.2) имеет ненулевое целое решение. Таким образом, в любом случае параллелепипед $\widehat{M}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}$, а стало быть, и множество $\widehat{\mathcal{H}}$, содержит целую точку $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ с ненулевой $\mathbf{y}$-компонентой.

Мы доказали утверждение теоремы в том случае, когда $\mathcal{H}'$ содержит ненулевую целую точку. Но условие теоремы утверждает лишь то, что множество $\mathcal{H}$ содержит такую точку. Про множество же $\mathcal{H}'$, вообще говоря, ничего не известно. Однако при $n = 1$ справедливо равенство $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$, которое следует из соотношений (3.4) и неравенств $U < 1 \leqslant X$, $\Delta_d < 1$. Стало быть, для $n = 1$ утверждение теоремы также доказано. Имея это утверждение в качестве базы индукции, докажем индуктивный шаг, то есть предположим, что утверждение теоремы верно для m и $n - 1$, и докажем, что оно верно и для m и n.

Если $\mathcal{H}' \cap \mathbb{Z}^d = \{\mathbf{0}\}$, то в $\mathcal{H} \backslash \mathcal{H}'$ обязана существовать ненулевая целая точка $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, -\mathbf{y})$. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$|\langle \boldsymbol{\ell}_d, \mathbf{z}\rangle| > \Delta_d V^m Y^n.$$

Тогда

$$\prod_{i=1}^{n-1} |\langle \boldsymbol{\ell}_{m+i}, \mathbf{z}\rangle| < (\Delta_d V^m Y^n)^{-1} \prod_{i=1}^{n} |\langle \boldsymbol{\ell}_{m+i}, \mathbf{z}\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant (\Delta_d V^m Y^n)^{-1} U^n = \Delta^{\frac{1}{d-1}} X^{\frac{-m}{d-1}} U^{\frac{n(d-2)}{d-1}}.$$

Положим

$$U_1 = \left(\Delta^{\frac{1}{d-1}} X^{\frac{-m}{d-1}} U^{\frac{n(d-2)}{d-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{3.21}$$

По предположению индукции существуют такие $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y}_1 \in \mathbb{Z}^{n-1}\backslash\{\mathbf{0}\}$, что

$$\Pi'(\mathbf{y}_1) \leqslant Y_1, \qquad \Pi(\Theta_1^{\intercal}\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_1) \leqslant V_1,$$

$$|\Theta_1^{\intercal}\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_1|_\infty \leqslant \Delta_{d-1} V_1^m Y_1^{n-1},$$

где

$$Y_1 = \Delta_{d-1}^{-\frac{1}{d-2}} \left(X^m U_1^{1-m}\right)^{\frac{1}{d-2}}, \quad V_1 = \Delta_{d-1}^{-\frac{1}{d-2}} \left(X^{2-n} U_1^{n-1}\right)^{\frac{1}{d-2}}$$

и

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} \theta_{1,1} & \cdots & \theta_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n-1,1} & \cdots & \theta_{n-1,m} \end{pmatrix}.$$

Из соотношения (3.21) следует, что

$$Y_1^{n-1} = \left(\Delta_{d-1}^{-1}\Delta_d\right)^{\frac{n-1}{d-2}} Y^n, \quad V_1^m = \left(\Delta_{d-1}^{-1}\Delta_d\right)^{\frac{m}{d-2}} V^m.$$

Применяя лемму 3.2, получаем, что

$$Y_1^{n-1} \leqslant Y^n, \quad V_1^m \leqslant V^m, \quad \Delta_{d-1} V_1^m Y_1^{n-1} \leqslant \Delta_d V^m Y^n,$$

то есть если дополнить точку $\mathbf{y}_1$ нулевой координатой, получим точку $\mathbf{y}_2 = (\mathbf{y}_1, 0) \in \mathbb{Z}^n$, такую что

$$\Pi'(\mathbf{y}_2) \leqslant Y, \qquad \Pi(\Theta^{\intercal}\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_1) \leqslant V,$$

$$|\Theta^{\intercal}\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_1|_\infty \leqslant \Delta_d V^m Y^n.$$

Этим доказан шаг индукции и завершено доказательство теоремы.

3.1.7 О равномерных экспонентах

Так же, как и в случае обыкновенных диофантовых экспонент, естественно рассмотреть равномерный аналог величины $\beta_{M}(\Theta)$. Напомним, что в случае обычных диофантовых приближений имеет место

Определение 3.2. Супремум вещественных чисел γ, при которых для всех достаточно больших t существуют $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, такие что

$$|\mathbf{x}|_\infty \leqslant t, \qquad |\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}|_\infty \leqslant t^{-\gamma},$$

называется *равномерной диофантовой экспонентой* матрицы Θ и обозначается $\alpha(\Theta)$.

В мультипликативном случае имеет место

Определение 3.3. Супремум вещественных чисел γ, при которых для всех достаточно больших t существуют $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, такие что

$$\Pi'(\mathbf{x}) \leqslant t, \qquad \Pi(\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leqslant t^{-\gamma},$$

называется *равномерной мультипликативной диофантовой экспонентой* матрицы Θ и обозначается $\alpha_{M}(\Theta)$.

Очевидно, что $\beta_{M}(\Theta) \geqslant \alpha_{M}(\Theta)$, так же, как и $\beta(\Theta) \geqslant \alpha(\Theta)$. Кроме того, по аналогии с (1.26) и (1.27), имеют место тривиальные неравенства

$$m/n \leqslant \alpha(\Theta) \leqslant \alpha_{M}(\Theta) \leqslant \begin{cases} m\alpha(\Theta), & \text{если } n = 1, \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

По аналогии со следствием 20 из теоремы 3.1 докажем

Следствие 26.

$$\alpha_{M}(\Theta^\intercal) \geqslant \frac{n\alpha_{M}(\Theta) + n - 1}{(m-1)\alpha_{M}(\Theta) + m}\,. \tag{3.22}$$

Доказательство. Пусть γ — положительное вещественное число, такое что $\gamma < \alpha_{M}(\Theta)$. По условию для любого достаточно большого t существует пара $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$, такая что

$$\Pi'(\mathbf{x}) \leqslant t, \qquad \Pi(\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leqslant t^{-\gamma}.$$

Для каждого такого t по теореме 3.1 найдется пара $\mathbf{x}' \in \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{y}' \in \mathbb{Z}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$, такая что

$$\Pi'(\mathbf{y}') \leqslant \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} t^{\frac{(m-1)\gamma+m}{d-1}}, \quad \Pi(\Theta^\intercal\mathbf{y}' - \mathbf{x}') \leqslant \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} t^{-\frac{n\gamma+(n-1)}{d-1}}. \tag{3.23}$$

Положим $s = \Delta_d^{-\frac{1}{d-1}} t^{\frac{(m-1)\gamma+m}{d-1}}$ и перепишем неравенства (3.23) следующим образом:

$$\Pi'(\mathbf{x}') \leqslant s, \qquad \Pi(\Theta\mathbf{x}' - \mathbf{y}') \leqslant s^{-\gamma'},$$

где

$$\gamma' = \frac{n\gamma + (n-1) + \varkappa(t)}{(m-1)\gamma + m - \varkappa(t)}, \quad \varkappa(t) = \frac{\ln \Delta_d}{\ln t}.$$

Учитывая, что s зависит от t непрерывно и что $s \to \infty$ при $t \to \infty$, получаем, что

$$\alpha_{M}(\Theta^{\intercal}) \geqslant \sup_{\gamma < \alpha_M(\Theta)} \gamma' = \frac{n\alpha_{M}(\Theta) + (n-1)}{(m-1)\alpha_{M}(\Theta) + m}.$$

□

Модифицируя аналогичным образом доказательство следствия 21, можно без труда получить следующие утверждения.

Следствие 27. *При* $n = 1$

$$\alpha(\Theta^{\intercal}) \geqslant \frac{\alpha_{M}(\Theta) - m}{(m-1)\alpha_{M}(\Theta) + m}.$$

Следствие 28. *При* $m = 1$

$$\alpha_{M}(\Theta) \geqslant \alpha(\Theta) \geqslant \frac{n\alpha_{M}(\Theta) - 1}{n(n-1)\alpha_{M}(\Theta) + n^2 - n + 1}.$$

Естественно ожидать, что неравенство (3.22) можно улучшить, так как в случае обыкновенных диофантовых экспонент ситуация именно такая. К сожалению, пока неясно, верно ли утверждение, аналогичное теореме 2.1, для мультипликативных экспонент. Метод, которым доказывается теорема 2.1, не срабатывает в мультипликативном случае ввиду невыпуклости звездного тела, задаваемого неравенством $\Pi(\mathbf{x}) \leqslant 1$.

Неясно также, имеет ли место мультипликативный аналог замечательного соотношения

$$\alpha(\Theta)^{-1} + \alpha(\Theta^{\intercal}) = 1,$$

открытого Ярником [J4] для $n = 1$, $m = 2$.

3.2 Решетки с положительными норменными минимумами

В данном параграфе мы обобщим на многомерный случай известное утверждение о том, что число плохо приближаемо тогда и только тогда, когда его неполные частные ограничены.

3.2.1 Формулировка основного результата

Ввиду соответствия между неполными частными и целочисленными длинами и углами, описанного в параграфе 1.2, в n–мерном случае естественно ожидать, что $(n-1)$–мерные грани паруса (мы будем называть их *гипергранями*) и реберные звезды при вершинах паруса будут играть роль неполных частных. В качестве численной характеристики таких многомерных "неполных частных" мы будем рассматривать их "детерминанты".

Определение 3.4. Пусть F — произвольная гипергрань паруса Π и пусть $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ — вершины F. *Детерминантом гиперграни* F будем называть величину

$$\det F = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant m} |\det(\mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_n})| \,.$$

Определение 3.5. Пусть вершина $\mathbf{v}$ паруса Π инцидентна m ребрам. Пусть $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$ — примитивные вектора решетки Λ, параллельные этим ребрам. *Детерминантом реберной звезды* $\mathrm{St}_{\mathbf{v}}$ вершины $\mathbf{v}$ будем называть величину

$$\det \mathrm{St}_{\mathbf{v}} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant m} |\det(\mathbf{r}_{i_1}, \ldots, \mathbf{r}_{i_n})| \,.$$

Ясно, что при $n = 2$, то есть когда парус одномерен, детерминанты ребер паруса равны их целочисленным длинам, а детерминанты реберных звезд вершин равны целочисленным углам между соответствующими ребрами.

Заметим, что можно дать эквивалентное определение детерминантов гиперграней и реберных звезд в терминах суммы Минковского и смешанного объема. Напомним (см. [BF], [Gn], [MSh], [Ew]), что *суммой Минковского* отрезков $[\mathbf{0}, \mathbf{x}_1], \ldots, [\mathbf{0}, \mathbf{x}_m]$ (нам понадобится только этот, самый простой, случай) называется множество

$$\{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{x}_m \mid 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1\},$$

а его объем называется *смешанным объемом* отрезков $[\mathbf{0}, \mathbf{x}_1], \ldots, [\mathbf{0}, \mathbf{x}_m]$. Следующее простое утверждение позволяет дать эквивалентное определение детерминантов гиперграней и реберных звезд:

Предложение 22. *Для любых* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ *смешанный объем отрезков* $[\mathbf{0}, \mathbf{x}_1], \ldots, [\mathbf{0}, \mathbf{x}_m]$ *равен*

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant m} |\det(\mathbf{x}_{i_1}, \ldots, \mathbf{x}_{i_n})| .$$

Теперь, когда даны все необходимые определения, мы можем сформулировать основной результат данного параграфа.

Теорема 3.3. *Пусть* $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *— произвольная иррациональная* n*–мерная решетка. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $N(\Lambda) > 0$.

(2) *Детерминанты гиперграней всех* 2^n *парусов, соответствующих решетке* Λ*, равномерно ограничены (то есть ограничены константой, не зависящей от грани).*

(3) *Детерминанты гиперграней и реберных звезд вершин паруса, соответствующего решетке* Λ *и положительному ортанту, равномерно ограничены (то есть ограничены константой, не зависящей ни от грани, ни от реберной звезды).*

Эквивалентность утверждений (1) и (2) была доказана в [G3]. Мы же в данном параграфе докажем две импликации $(1)\,\&\,(2) \implies (3)$ и $(3) \implies (2)$.

Замечание 3.3. На самом деле, мы докажем нечто более сильное, чем теорема 3.3. А именно, мы покажем, что если $N(\Lambda) = \mu > 0$, то существует константа D, зависящая только от n и μ, ограничивающая детерминанты гиперграней и реберных звезд вершин паруса Π. И наоборот, если детерминанты гиперграней и реберных звезд вершин паруса ограничены константой D, то существует константа μ, зависящая только от n и D, такая что $N(\Lambda) \geqslant \mu > 0$.

Замечание 3.4. Точности ради отметим, что определение детерминанта грани, данное в [G3], несколько отличается от определения 3.4. Однако, совершенно ясно, что равномерная ограниченность детерминантов из [G3] равносильна равномерной ограниченности детерминантов из определения 3.4.

3.2.2 Двойственные решетки и полярные многогранники

В данном пункте мы обобщим некоторые факты из теории полярных многогранников на случай полиэдров Клейна. Мы также докажем несколько утверждений, связывающих полиэдры Клейна двойственных решеток. Уместно упомянуть в данном контексте книгу [Lch3], где рассматриваются похожие вопросы.

Напомним, что многогранником мы называем пересечение конечного числа полупространств. В частности, многогранник всегда подразумевается выпуклым и не обязательно ограничен.

Определение 3.6. Пусть P — произвольный (обобщенный) n–мерный многогранник в $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{0} \notin P$. *Полярным многогранником* для многогранника P называется множество

$$P^\circ = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \forall \mathbf{y} \in P \ \ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \geqslant 1 \right\}.$$

Множество P°, очевидно, замкнуто и выпукло. Следовательно, можно говорить о его *гранях*, определяемых как пересечения P° с опорными гиперплоскостями. Будем обозначать через $\mathfrak{B}(P^\circ)$ и $\mathfrak{B}(P)$ множества всех собственных граней многогранников P° и P, соответственно.

Отметим, что обычно рассматривается понятие полярности, "обратное" данному, то есть для политопов, содержащих в своей внутренности начало координат $\mathbf{0}$. Хорошо известно, что между граничными комплексами полярных политопов существует биекция, сохраняющая отношение инцидентности и обращающая отношение включения (см., к примеру, [Gn], [MSh], [Ew]). Нам понадобится аналогичное утверждение о полиэдрах Клейна, соответствующих иррациональным решеткам.

Предложение 23. *Пусть Λ — иррациональная n–мерная решетка в $\mathbb{R}^n$ и пусть K — полиэдр Клейна, соответствующий Λ и положительному ортанту. Пусть к тому же все грани K ограничены. Тогда справедливы следующие утверждения.*
(а) K° — n–мерный обобщенный многогранник с ограниченными гранями..
(б) Если F — собственная грань K, то множество F°_K определяемое как

$$F^\circ_K = K^\circ \cap \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 1 \ \textit{для всех}\ \ \mathbf{y} \in F \right\}$$

является гранью K° и

$$\dim F^\circ_K = n - 1 - \dim F.$$

(в) Отображение

$$\begin{aligned} \beta_K :\ \ & \mathfrak{B}(K) \to \mathfrak{B}(K^\circ) \\ \beta_K :\ \ & \qquad\ \ F \mapsto F^\circ_K \end{aligned}$$

является биекцией, обращающей отношение включения.

Чтобы доказать предложение 23, нам понадобятся три вспомогательных утверждения. Первое можно доказать просто буквальным переносом на наш случай известных рассуждений для политопов (см. [Gn], [MSh], [Ew]), поэтому мы оставим его без доказательства:

Лемма 3.3. *Пусть P — n–мерный многогранник в $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{0} \notin P$ и пусть $\lambda P \subset P$ для всех $\lambda \geqslant 1$. Предположим, что P не содержит прямых. Обозначим через $\mathfrak{B}'(P)$ и $\mathfrak{B}'(P^\circ)$ множества собственных тех граней P и P°, соответственно, чьи аффинные оболочки не содержат $\mathbf{0}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*
(а) P° — n–мерный многогранник, $\mathbf{0} \notin P$, $\lambda P \subset P$ для всех $\lambda \geqslant 1$ и P не содержит прямых.
(б) Если $F \in \mathfrak{B}'(P)$, то множество F_P°, определяемое как

$$F_P^\circ = P^\circ \cap \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 1 \text{ для всех } \mathbf{y} \in F\right\}$$

является гранью P° и

$$\dim F_P^\circ = n - 1 - \dim F.$$

(в) Отображение

$$\begin{array}{ll} \beta_P : & \mathfrak{B}'(P) \to \mathfrak{B}'(P^\circ) \\ \beta_P : & \qquad F \mapsto F_P^\circ \end{array}$$

является биекцией, обращающей отношение включения.

Нам также понадобится следующее обозначение: для каждого вектора $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ мы будем обозначать через $H_\mathbf{v}^+$ и $H_\mathbf{v}^-$ полупространства $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \geqslant 1\}$ и $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \leqslant 1\}$, соответственно.

Лемма 3.4. *Пусть P — произвольный обобщенный многогранник, не содержащий прямых. Пусть все ребра P ограничены. Тогда P совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин.*

Доказательство. Достаточно доказать, что P содержится в выпуклой оболочке своих вершин. Поскольку P не содержит прямых, существует вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, такой что множество $P_\mathbf{u} = P \cap H_\mathbf{u}^-$ непусто и компактно. Поскольку P — обобщенный многогранник, $P_\mathbf{u}$ является ограниченным многогранником и, стало быть, совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин. Но все вершины $P_\mathbf{u}$ являются либо вершинами P, либо лежат на ребрах P, которые по условию ограничены. Следовательно, $P_\mathbf{u}$ содержится в выпуклой оболочке вершин P. Значит, то же верно и для P. $\square$

Лемма 3.5. *Пусть Λ — иррациональная n–мерная решетка в $\mathbb{R}^n$ и пусть K — полиэдр Клейна, соответствующий Λ и положительному ортанту. Тогда $K^\circ = K'$, где*

$$K' = \bigcap_{\mathbf{v}} H_\mathbf{v}^+,$$

а пересечение берется по всем вершинам K.

Доказательство. Поскольку Λ иррациональна, каждое ребро K ограничено. Стало быть, по лемме 3.4, K совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин. Включение $K' \subseteq K^\circ$ легко следует из этого факта и из теоремы Каратеодори (см. [Gn], [DGK]). Включение $K^\circ \subseteq K'$ очевидно. $\square$

Далее через $\mathrm{conv}(M)$ мы обозначаем выпуклую оболочку множества M.

Доказательство предложения 23. Для каждого $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $V_\mathbf{u}$ множество таких вершин $\mathbf{v}$ полиэдра Клейна K, что открытый интервал $(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ не пересекается с K. Множество $V_\mathbf{0}$, очевидно, совпадает с множеством вершин K. С другой стороны, множество $V_\mathbf{u}$ конечно при строго положительных u_i, так как мы предположили, что K не имеет неограниченных граней.

Рассмотрим произвольную точку $\mathbf{u} \notin K$ со строго положительными координатами и положим

$$K_\mathbf{u} = \bigcup_{\lambda \geqslant 1} \lambda\ \mathrm{conv}(V_\mathbf{u}).$$

Поскольку $V_\mathbf{u}$ конечно,

$$K_\mathbf{u}^\circ = \bigcap_{\mathbf{v} \in V_\mathbf{u}} H_\mathbf{v}^+.$$

В то же время, для каждого $\mathbf{w} \in V_\mathbf{0} \backslash V_\mathbf{u}$ интервал $(\mathbf{w}, \mathbf{u})$ имеет хотя бы одну общую точку с $\mathrm{conv}(V_\mathbf{u})$, стало быть, существует $\lambda_\mathbf{v} \geqslant 0$, такое что

$$\sum_{\mathbf{v} \in V_\mathbf{u}} \lambda_\mathbf{v} > 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{w} = \mathbf{u} + \sum_{\mathbf{v} \in V_\mathbf{u}} \lambda_\mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{u}).$$

Следовательно, $K_\mathbf{u}^\circ \cap H_\mathbf{u}^- \subset H_\mathbf{w}^+$. Отсюда с уччтом леммы 3.5 получаем, что

$$K^\circ \cap H_\mathbf{u}^- = \bigcap_{\mathbf{v} \in V_\mathbf{0}} H_\mathbf{v}^+ \cap H_\mathbf{u}^- = \bigcap_{\mathbf{v} \in V_\mathbf{0} \backslash V_\mathbf{u}} H_\mathbf{v}^+ \cap K_\mathbf{u}^\circ \cap H_\mathbf{u}^- = K_\mathbf{u}^\circ \cap H_\mathbf{u}^-.$$

Таким образом, для каждого $\mathbf{u} \notin K$ со строго положительными координатами множество $K^\circ \cap H_\mathbf{u}^-$ является многогранником. Стало быть, K° — обобщенный многогранник. Рассмотрим теперь произвольную гипергрань F многогранника K° и точку $\mathbf{u} \notin K$ со строго положительными координатами, такую что F имеет непустое пересечение со внутренностью полупространства $H_\mathbf{u}^-$. Как мы только что показали, $K^\circ \cap H_\mathbf{u}^- = K_\mathbf{u}^\circ \cap H_\mathbf{u}^-$, так что аффинная оболочка F совпадает совпадает с аффинной оболочкой некоторой гиперграни $K_\mathbf{u}^\circ$. Но $K_\mathbf{u}$ удовлетворяет условию леммы 3.3, то есть существует вершина $\mathbf{v}$ полиэдра Клейна K, такая что аффинная оболочка F задается уравнением $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = 1$. Поскольку решетка Λ иррациональна, все координаты $\mathbf{v}$ строго положительны и, стало быть, F компактна, что и доказывает (а).

Чтобы доказать (б), рассмотрим произвольную собственную грань F полиэдра Клейна K и точку $\mathbf{u} \notin K$ со строго положительными координатами, такую что множество $V_{\mathbf{u}}$ содержит все вершины F и такую что множество F_K° содержится в $H_{\mathbf{u}}^-$. Такие точки существуют, поскольку F компактна и содержится во внутренности положительного ортанта. Тогда, в силу равенства $K^\circ \cap H_{\mathbf{u}}^- = K_{\mathbf{u}}^\circ \cap H_{\mathbf{u}}^-$ получаем

$$\begin{aligned} F_K^\circ \;&=\; K^\circ \cap \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \forall \mathbf{y} \in F \;\; \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 1 \right\} \;=\\ &\;\; K_{\mathbf{u}}^\circ \cap \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \forall \mathbf{y} \in F \;\; \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 1 \right\} \;=\; F_{K_{\mathbf{u}}}^\circ . \end{aligned}$$

Применяя к $K_{\mathbf{u}}^\circ$ лемму 3.3, получаем, что F_K° является гранью $K_{\mathbf{u}}^\circ$ и $\dim F_K^\circ = n - 1 - \dim F$. Но $K^\circ \subset K_{\mathbf{u}}^\circ$, так что F_K° является также и гранью K°, что доказывает (б).

Остается показать, что β_K отображает $\mathfrak{B}(K)$ на $\mathfrak{B}(K^\circ)$. Рассмотрим произвольную грань $F \in \mathfrak{B}(K^\circ)$ и точку $\mathbf{u} \notin K$ со строго положительными координатами, такую что F содержится во внутренности $H_{\mathbf{u}}^-$. Существование таких точек следует из (а). Тогда F является также элементом $\mathfrak{B}'(K_{\mathbf{u}}^\circ)$ и по лемме 3.3 совпадает с $G_{K_{\mathbf{u}}}^\circ$ для некоторой $G \in \mathfrak{B}'(K_{\mathbf{u}})$. Но аффинная оболочка G не содержит $\mathbf{u}$, стало быть, $G \in \mathfrak{B}(K)$, и равенство $G_K^\circ = G_{K_{\mathbf{u}}}^\circ = F$ завершает доказательство. $\square$

Из предложения 23 и леммы 3.4 получаем

Следствие. *K° совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин.*

Определение 3.7. Если векторы $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ образуют базис решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, то решетка Λ^* с базисом $\mathbf{x}_1^*, \ldots, \mathbf{x}_n^*$, таким что $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j^* \rangle = \delta_{ij}$, называется *двойственной* к решетке Λ.

Решетка Λ^* также порождает полиэдр Клейна в положительном ортанте. Будем обозначать его через K^*. Из того факта, что $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{Z}$ для всех $\mathbf{x} \in \Lambda$ и $\mathbf{y} \in \Lambda^*$, легко выводится следующее

Предложение 24. *Если на границе положительного ортанта нет ненулевых точек решеток Λ и Λ^*, то $K^* \subseteq K^\circ$.*

Заметим, что в случае $n = 2$ в предложении 24 можно написать $K^* = K^\circ$. Причина, по которой при $n \geqslant 3$ равенство должно быть заменено на включение, в том, что целочисленные расстояния от гиперграней K до $\mathbf{0}$

могут быть больше, чем 1. Под *целочисленным расстоянием* от гиперграни F до начала координат $\mathbf{0}$ понимается величина

$$\min_{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n} |\det(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)|,$$

где минимум берется по всем наборам из n линейно независимых точек решетки, лежащих в аффинной оболочке грани F. Следующее утверждение очевидно:

Лемма 3.6. *Если целочисленное расстояние от гиперграни F полиэдра Клейна K до начала координат $\mathbf{0}$ равно D, то вершина многогранника K°, соответствующая F, принадлежит решетке $(D^{-1})\Lambda^*$.*

Стоит также отметить, что при $n=2$ равенство $K^*=K^\circ$ лежит в основе того факта, что целочисленные длины ребер полигонов Клейна равны целочисленным углам между смежными ребрами. В случае $n\geqslant 3$ уже нет такого хорошего соответствия между реберными звездами K и гипергранями K^* (или гипергранями K и реберными звездами K^*). Причина здесь в том, что K^* и K°, вообще говоря, не совпадают. Но даже если рассмотреть вершину $\mathbf{v}$ полиэдра Клейна K и соответствующую ей гипергрань $F_\mathbf{v}$ многогранника K°, на данный момент неизвестно, как связаны между собой $\det\mathrm{St}_\mathbf{v}$ и $\det F_\mathbf{v}$. Однако, нам не понадобится явно выражать одну величину через другую, нам хватит неравенства, которое дает следующая

Лемма 3.7. *Пусть $F_\mathbf{v}$ — гипергрань K°, соответствующая вершине $\mathbf{v}$ полиэдра Клейна K. Тогда $\det F_\mathbf{v}\leqslant(\det\mathrm{St}_\mathbf{v})^{n-1}$.*

Прежде чем приступить непосредственно к доказательству леммы 3.7, докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 3.8. *Пусть $\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n$ образуют базис $\mathbb{R}^n$ и пусть $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ имеют положительные координаты в этом базисе. Для каждого $i=1,\ldots,n$ обозначим через F_i симплекс $\mathrm{conv}\big(\{\mathbf{v},\mathbf{v}+\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{v}+\mathbf{r}_n\}\setminus\{\mathbf{v}+\mathbf{r}_i\}\big)$, а через $\mathbf{w}_i$ — вектор, такой что $\langle\mathbf{w}_i,\mathbf{x}\rangle=1$ для всех $\mathbf{x}\in F_i$.*

Тогда

$$|\det(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n)|=\frac{|\det(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n)|^{n-1}}{\det F_1\ldots\det F_n}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{r}_1^*,\ldots,\mathbf{r}_n^*$ — базис R^n, двойственный к базису $\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n$, то есть $\langle\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_j^*\rangle=\delta_{ij}$. Тогда $|\mathbf{w}_i|\det F_i=|\mathbf{r}_i^*||\det(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n)|$, откуда следует, что

$$|\det(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n)|=|\det(\mathbf{r}_1^*,\ldots,\mathbf{r}_n^*)|\frac{|\mathbf{w}_1|}{|\mathbf{r}_1^*|}\cdots\frac{|\mathbf{w}_n|}{|\mathbf{r}_n^*|}=\frac{|\det(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n)|^{n-1}}{\det F_1\ldots\det F_n}.$$

□

Будем обозначать через $\operatorname{int} P$ и $\operatorname{ext} P$ относительную внутренность и множество вершин многогранника P. Если $M \subset \mathbb{R}^n$ — конечное множество и к каждой точке $\mathbf{x} \in M$ приписана положительная масса $\nu_{\mathbf{x}}$, то для каждого подмножества $M' \subseteq M$ мощности $\sharp(M')$ будем обозначать через $c(M')$ точку $(\sum_{\mathbf{x}\in M'} \nu_{\mathbf{x}}\mathbf{x})/\sharp(M')$, т.е. центр масс множества M'.

Лемма 3.9. *Пусть P — выпуклый $(n-1)$–мерный многогранник с произвольными положительными массами в вершинах. Пусть $\mathfrak{T}$ — произвольное разбиение относительной границы P на (замкнутые) симплексы с вершинами в $\operatorname{ext} P$. Тогда*

$$\operatorname{int} P = \bigcup_{\Delta\in\mathfrak{T}} \operatorname{int}(\operatorname{conv}(\Delta \cup \{c(\operatorname{ext} P \setminus \operatorname{ext} \Delta)\})).$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in \operatorname{int} P$. Тогда существует симплекс $\Delta \in \mathfrak{T}$, такой что $\mathbf{x} \in \operatorname{conv}(\Delta \cup \{c(P)\})$. Остается заметить, что $\operatorname{conv}(\Delta \cup \{c(P)\}) \cap \operatorname{int} P$ содержится в $\operatorname{int}(\operatorname{conv}(\Delta \cup \{c(\operatorname{ext} P \setminus \operatorname{ext} \Delta)\}))$. □

Доказательство леммы 3.7. При действии группы диагональных матриц $n \times n$ с определителем 1, очевидно, сохраняется комбинаторная структура парусов, оснащенная детерминантами гиперграней и реберных звезд. Следовательно, можно считать, что все координаты точки $\mathbf{v}$ равны $v_1 = \ldots = v_n$. Предположим, $\mathbf{v}$ инцидентна m ребрам паруса Π. Пусть $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$ — примитивные вектора решетки Λ, параллельные этим ребрам. Рассмотрим произвольные положительные числа $k_1, \ldots, k_m$, такие что точки $\mathbf{r}'_i = k_i\mathbf{r}_i$ лежат в одной и той же гиперплоскости, и положим $P = \operatorname{conv}(\mathbf{r}'_1, \ldots, \mathbf{r}'_m)$. Рассмотрим также произвольную точку $\lambda\mathbf{v} \in \operatorname{int} P$.

Припишем точкам r'_i массы k_i^{-1}. Тогда по лемме 3.9 можно перенумеровать ребра $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$ (перенумеровывая, соответственно, коэффициенты $k_1, \ldots, k_m$ и векторы $\mathbf{r}'_1, \ldots, \mathbf{r}'_m$) так, чтобы выполнялось $\lambda\mathbf{v} = \lambda'_0\mathbf{r}'_0 + \cdots + \lambda'_{n-1}\mathbf{r}'_{n-1}$, где λ'_i строго положительны и $\mathbf{r}'_0 = (\mathbf{r}_n + \cdots + \mathbf{r}_m)/(m-n+1)$. Положим $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'_0(m-n+1)$, $\lambda_0 = \lambda'_0/(m-n+1)$ и $\lambda_i = k_i\lambda'_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Получаем, что $\lambda\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{r}_0 + \cdots + \lambda_{n-1}\mathbf{r}_{n-1}$ со строго положительными λ_i.

Ясно, что $F_{\mathbf{v}}$ содержится в $(n-1)$–мерном многограннике $F_{\mathbf{r}}$, определяемом следующим образом:

$$F_{\mathbf{r}} = \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle = 1 \text{ and } \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} + \sum_{i=0}^{n-1} \varkappa_i\mathbf{r}_i\rangle \geqslant 1 \\ \text{for all } \varkappa_0 \geqslant 0, \ldots, \varkappa_{n-1} \geqslant 0\Big\}.$$

Поскольку векторы $\mathbf{r}_0, \ldots, \mathbf{r}_{n-1}$ линейно независимы и все коэффициенты λ_i

положительны, по лемме 3.8 получаем, что

$$\det F_{\mathbf{r}} = \frac{|\det(\mathbf{r}_0, \ldots, \mathbf{r}_{n-1})|^{n-1}}{\prod_{i=0}^{n-1} |\det(\mathbf{v}, \{\mathbf{r}_j\}_{j=0}^{n-1} \backslash \{\mathbf{r}_i\})|}.$$

Все множители в знаменателе суть ненулевые целые числа, так что, применяя включение $F_{\mathbf{v}} \subseteq F_{\mathbf{r}}$, получаем требуемую оценку. □

3.2.3 Равномерная ограниченность детерминантов гиперграней паруса

В данном пункте собран ряд фактов, касающихся парусов, детерминанты гиперграней которых равномерно ограничены (константой, зависящей лишь от самого паруса). Мы ими воспользуемся в последующих пунктах.

Как и прежде, будем использовать обозначение $\varphi(\mathbf{x}) = x_1 \ldots x_n$. Обозначим также через $S(F)$ пересечение аффинной оболочки грани F паруса с положительным ортантом. Нам понадобится величина, характеризующая объем выпуклой оболочки $S(F)$ и начала координат $\mathbf{0}$. С этой целью нам будет удобно воспользоваться естественным обобщением определения 3.4 (данного только для гиперграней паруса) на случай произвольного выпуклого $(n-1)$–мерного многогранника и рассматривать величину $\det S(F)$, которая в данном случае, очевидно, равна объему $\mathrm{conv}(S(F) \cup \{\mathbf{0}\})$, домноженному на $n!$.

В работе [G3] доказывается следующее.

Теорема 3.4. *Предположим, граница положительного ортанта не содержит ненулевых точек решетки Λ. Пусть также детерминанты всех гиперграней паруса Π, соответствующего Λ и положительному ортанту, ограничены константой D. Тогда существует такая константа D', зависящая лишь от n и D, такая что*
(а) $\det S(F) \leqslant D'$ для любой гиперграни F паруса Π;
(б) $\varphi(\mathbf{v}) \geqslant (D')^{-1}$ для любой вершины $\mathbf{v}$ полиэдра Клейна K^*.

Лемма 3.10. *Если детерминанты всех гиперграней паруса Π ограничены константой D, то существует константа D', зависящая лишь от n и от D, такая, что $\varphi(\mathbf{x}) < D'$ для любой точки $\mathbf{x} \in \Pi$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть какую–нибудь гипергрань F паруса Π, содержащую точку $\mathbf{x}$, заметить, что $\varphi(\mathbf{x}) < \det S(F)$ и применить теорему 3.4. □

Лемма 3.11. *Пусть детерминанты гиперграней паруса Π ограничены константой D. Пусть $\mathbf{v}$ — вершина паруса Π, такая, что $v_1 = \ldots = v_n$*

и пусть $\varphi(\mathbf{x}) \geqslant \mu > 0$. *Тогда длины всех ребер, инцидентных вершине* $\mathbf{v}$, *ограничены некоторой константой* D_{vert}, *зависящей лишь от* n, D *и* μ.

Доказательство. По теореме 3.4, существует константа D', зависящая лишь от n и от D, такая, что $\det S(F) \leqslant D'$ для любой гиперграни F паруса Π.

С другой стороны, $v_1 = \ldots = v_n \geqslant \mu^{1/n}$. Следовательно, найдется такая константа $D_{\text{vert}} = D_{\text{vert}}(n, D', \mu)$, что если ребро, инцидентное вершине $\mathbf{v}$, имеет длину, большую D_{vert}, то для любой гиперграни F, инцидентной этому ребру, $\det S(F) > D'$.

Стало быть, длины всех ребер, инцидентных $\mathbf{v}$, не превосходят D_{vert}. $\square$

Следующая лемма является очевидным следствием предложения 23 и определений 3.4, 3.5.

Лемма 3.12. *Если детерминанты гиперграней и реберных звезд вершин паруса* Π *ограничены константой* D, *то найдется такая константа* D', *зависящая лишь от* n *и* D, *что*
(а) каждая грань K° *имеет не более, чем* D' *вершин;*
(б) количество гиперграней K°, *инцидентных вершине* K° *ограничено константой* D'.

3.2.4 Отделимость формы $\varphi(\mathbf{x})$ от нуля в положительном ортанте

Как и прежде, считаем решетку Λ иррациональной.

Лемма 3.13. *Если детерминанты гиперграней паруса и детерминанты реберных звезд вершин паруса ограничены в совокупности константой* D, *то найдется такая константа* $\mu > 0$, *зависящая лишь от* n *и от* D, *что*

$$\inf_{\mathbf{v}}(\varphi(\mathbf{v})) \geqslant \mu,$$

где inf *берется по всем вершинам паруса* Π.

Доказательство. Легко видеть (см., например, [G3]), что если на границе положительного ортанта есть ненулевые точки решетки Λ^*, то у паруса Π будет неограниченная гипергрань. Но детерминанты гиперграней Π ограничены, стало быть, таких точек нет. То есть, как следует из предложения 24, $K^* \subseteq K^\circ$. Кроме того, целочисленные расстояния от граней K до $\mathbf{0}$ не превосходят D, стало быть, по лемме 3.6, все вершины полиэдра K° лежат в решетке $(D!)^{-1}\Lambda^*$. Применяя следствие из предложения 23, получаем, что $D! \cdot K^\circ \subseteq K^* \subseteq K^\circ$.

В силу леммы 3.7, детерминанты гиперграней K° ограничены D^{n-1} и, стало быть, детерминанты гиперграней $D! \cdot K^\circ$ ограничены $D^{n-1}(D!)^n$. Докажем существование константы D', зависящей лишь от n и D, которая ограничивает детерминанты гиперграней K^*. Ввиду включения $D! \cdot K^\circ \subseteq K^*$, достаточно показать, что количество гиперграней K°, отсекаемых произвольной гиперплоскостью, опорной для $D! \cdot K^\circ$, (включая гиперграни, пересекающиеся с этой плоскостью) ограничено константой, зависящей лишь от n и D. Более того, в силу леммы 3.12, достаточно рассмотреть те гиперплоскости, которые являются аффинными оболочками гиперграней $D! \cdot K^\circ$. Пусть F — гипергрань $D! \cdot K^\circ$, а $\operatorname{aff}(F)$ — ее аффинная оболочка. Очевидно, что плоскость $\operatorname{aff}(F)$ содержит $(n-1)$–мерную подрешетку решетки Λ^*, то есть решетка Λ^*, равно как и решетка $(D!)^{-1}\Lambda^*$, распадается на $(n-1)$–мерные слои, параллельные $\operatorname{aff}(F)$. Рассмотрим теперь гипергрань G многогранника K°, такую что комбинаторное расстояние от $(D!)^{-1}F$ до G равняется k (мы называем две различные гиперграни соседними и полагаем комбинаторное расстояние между ними равным 1, если у них есть хотя бы одна общая точка). Поскольку все вершины K° принадлежат $(D!)^{-1}\Lambda^*$, существует как минимум $k-2$ слоя решетки $(D!)^{-1}\Lambda^*$, параллельных $\operatorname{aff}(F)$, таких что их аффинные оболочки строго отделяют гипергрань G от гиперграни $(D!)^{-1}F$. Но поскольку $\det F \leqslant D^{n-1}(D!)^n$ и $\det \Lambda^* = 1$, количество слоев решетки $(D!)^{-1}\Lambda^*$ между $(D!)^{-1}\operatorname{aff}(F)$ и $\operatorname{aff}(F)$ меньше, чем $D^{n-1}(D!)^{n+1}$. Стало быть, применяя лемму 3.12, получаем. что количество гиперграней K°, отсекаемых $\operatorname{aff}(F)$ действительно ограничено константой, зависящей лишь от n и D.

Таким образом, детерминанты граней полиэдра K^* ограничены константой D', зависящей лишь от n и от D. Стало быть, по теореме 3.4, существует константа D'', также зависящая лишь от n и D, такая что $\varphi(\mathbf{v}) \geqslant (D'')^{-1}$ для каждой вершины $\mathbf{v}$ полиэдра $(K^*)^* = K$. Остается положить $\mu = (D'')^{-1}$. $\square$

3.2.5 Логарифмическая плоскость

Обозначим положительный ортант через $\mathcal{O}_+$. Рассмотрим отображение

$$\pi_1 : \mathcal{O}_+ \to \big\{\mathbf{x} \in \mathcal{O}_+ \,\big|\, \varphi(\mathbf{x}) = 1\big\},$$
$$\pi_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (\varphi(\mathbf{x}))^{-1/n},$$

отображение

$$\pi_2 : \big\{\mathbf{x} \in \mathcal{O}_+ \,\big|\, \varphi(\mathbf{x}) = 1\big\} \to \mathbb{R}^{n-1},$$
$$\pi_2(\mathbf{x}) = (\ln(x_1), \dots, \ln(x_{n-1}))$$

и их композицию
$$\pi_{\log} = \pi_2 \circ \pi_1.$$

Образ паруса Π при отображении $\pi_{\log}$ порождает разбиение $\mathbb{R}^{n-1}$ на ячейки, являющиеся криволинейными многогранниками. Каждая ячейка — образ некоторой гиперграни паруса. Соответственно, каждая вершина разбиения — образ некоторой вершины паруса.

Обозначим это разбиение через $\mathfrak{P}$.

Лемма 3.14. *Пусть детерминанты гиперграней паруса Π ограничены константой D. Пусть существует такая константа $\mu > 0$, что для любой вершины $\mathbf{v}$ паруса Π*
$$\varphi(\mathbf{v}) \geqslant \mu.$$
Тогда найдется константа D', зависящая лишь от n, D и μ, такая, что в любом шаре $B \subset \pi_{\log}(\Pi)$ радиуса D' содержится ячейка разбиения $\mathfrak{P}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную вершину $\mathbf{v}$ паруса Π. Применив подходящий гиперболический поворот, мы можем считать, что $v_1 = \ldots = v_n \geqslant \mu^{1/n}$. Тогда, по лемме 3.11, длины всех ребер, инцидентных $\mathbf{v}$, ограничены некоторой константой $D_{\mathrm{vert}} = D_{\mathrm{vert}}(n, D, \mu)$. Кроме того, количество вершин у любой грани паруса ограничено некоторой константой $D_1 = D_1(n, D)$. Стало быть, существует такая константа $D_2 = D_2(n, D, \mu)$, что все грани, инцидентные вершине $\mathbf{v}$, содержатся в кубе со стороной D_2. Но значения формы φ во всех точках паруса не меньше, чем μ. Следовательно, существует такая константа $D_3 = D_3(n, D, \mu)$, что образы при отображении $\pi_{\log}$ всех граней, инцидентных вершине $\mathbf{v}$, содержатся в шаре радиуса D_3. Таким образом, для любой грани F паруса Π ячейка $\pi_{\log}(F)$ содержится в шаре радиуса D_3.

Если теперь рассмотреть произвольный шар $B \subset \pi_{\log}(\Pi)$ радиуса $D' = 2D_3$, то ячейка, в которой лежит центр B, содержится в некотором шаре радиуса D_3, который, в свою очередь, содержится в B. $\square$

3.2.6 Доказательство теоремы 3.3

Как и прежде, будем обозначать через $S(F)$ пересечение плоскости грани F паруса Π с положительным ортантом.

1. Импликация (1) & (2) $\implies$ (3) доказывается довольно просто. Рассмотрим произвольную вершину $\mathbf{v}$ паруса Π. Применив, если необходимо, подходящий гиперболический поворот, можно считать, что $v_1 = \ldots = v_n \geqslant \mu^{1/n}$. Тогда по лемме 3.11 длины всех ребер, инцидентных $\mathbf{v}$, ограничены константой $D_{\mathrm{vert}} = D_{\mathrm{vert}}(n, \mu)$. Отсюда следует, что количество ребер, инцидентных $\mathbf{v}$, не превосходит некоторой константы $m_{\mathrm{vert}} = m_{\mathrm{vert}}(n, \mu)$, так как иначе в шаре радиуса D_{vert} будет слишком много точек решетки. Теперь очевидно, что $\det \mathrm{St}_{\mathbf{v}} \leqslant D' = D'(D_{\mathrm{vert}}, m_{\mathrm{vert}}) = D'(n, \mu)$.

2. Доказательство импликации (3) $\implies$ (2) несколько сложнее. Предположим, что детерминанты гиперграней паруса Π и детерминанты реберных звезд вершин паруса Π ограничены некоторой константой D. Тогда, по лемме 3.13, существует такая константа $\mu = \mu(n, D) > 0$, что для любой вершины $\mathbf{v}$ паруса Π имеет место неравенство $\varphi(\mathbf{v}) \geqslant \mu$, то есть условие леммы 3.14 выполняется.

Рассмотрим произвольный ортант $\mathcal{O}$, отличный от $\mathcal{O}_+$ и $-\mathcal{O}_+$. Рассмотрим произвольную гипергрань F паруса, соответствующего этому ортанту. Применив подходящий гиперболический поворот, мы можем считать, что грань F перпендикулярна биссектрисе ортанта $\mathcal{O}$. Положим

$$Q(T) = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) < T\big\},$$

$$Q_+(T) = \big\{\mathbf{x} \in Q(T) \,\big|\, x_i > 0,\ i = 1, \ldots, n\big\}$$

и

$$T_0 = n^{-1/2} (\det F)^{1/n}.$$

Легко видеть, что $Q(T_0) \cap \mathcal{O} \cap \Lambda = \{\mathbf{0}\}$.

В силу лемм 3.10 и 3.14 существует константа $T_1 = T_1(n, D)$, такая что множество $\pi_{\log}(\Pi \cap Q_+(\sqrt{T_1}\,))$ содержит ячейку разбиения $\mathfrak{P}$, а стало быть, и вершину этого разбиения. То есть $Q_+(\sqrt{T}\,)$ содержит некоторую вершину $\mathbf{v}$ паруса Π при любом $T \geqslant T_1$. Рассмотрим параллелепипед

$$P(\mathbf{v}, T) = Q_+(T) \cap (\mathbf{v} + \mathcal{O})$$

при $T \geqslant T_1$. Из лемм 3.10, 3.13 и 3.14 следует, что существует константа $T_2 \geqslant T_1$, также зависящая лишь от n и от D, такая что множество $\pi_{\log}(\Pi \cap P(\mathbf{v}, T_2))$ содержит ячейку разбиения $\mathfrak{P}$, а стало быть, и вершину этого разбиения. То есть $P(\mathbf{v}, T_2)$ содержит некоторую вершину паруса Π, отличную от $\mathbf{v}$, при любом $T \geqslant T_2$.

Но параллелепипед $P(\mathbf{v}, T_0) - \mathbf{v}$ содержится в параллелепипеде $Q(T_0) \cap \mathcal{O}$. Стало быть, $T_0 < T_2$, так как $Q(T_0) \cap \mathcal{O} \cap \Lambda = \{\mathbf{0}\}$, и мы доказали, что $\det F$ ограничен константой, зависящей лишь от n и от D. $\square$

3.3 Многомерное обобщение теоремы Лагранжа

В данном параграфе мы обобщим на многомерный случай теорему Лагранжа о цепных дробях квадратичных иррациональностей.

3.3.1 Формулировка основного результата.

Если $\mathbf{v}$ — вершина паруса Π, то ее реберную звезду, то есть объединение всех ребер паруса, инцидентных этой вершине, мы будем обозначать $\mathrm{St}_{\mathbf{v}}$.

Упорядоченный набор (конечный или бесконечный) вершин паруса Π, такой, что любые две подряд идущие вершины соединены ребром, будем называть *цепочкой* вершин паруса Π. Рассмотрим множество $\mathcal{V}_k(\Pi)$ всех цепочек длины k вершин паруса Π. Рассмотрим граф $\mathcal{G}_k(\Pi)$, вершинами которого являются точки множества $\mathcal{V}_k(\Pi)$, а ребрами — такие пары $(V, W) \in \mathcal{V}_k(\Pi) \times \mathcal{V}_k(\Pi)$, что $V \cup W \in \mathcal{V}_{k+1}(\Pi)$. Очевидно, граф $\mathcal{G}_{k+1}(\Pi)$ изоморфен реберному графу графа $\mathcal{G}_k(\Pi)$. Как и в случае с вершинами паруса, упорядоченный набор (конечный или бесконечный) вершин графа $\mathcal{G}_k(\Pi)$, такой, что любые две подряд идущие вершины соединены ребром, будем называть *цепочкой* вершин графа $\mathcal{G}_k(\Pi)$. Очевидно, что любой цепочке вершин $\mathcal{G}_k(\Pi)$ длины $l \geqslant 2$, можно естественным образом поставить в соответствие цепочку вершин $\mathcal{G}_{k+1}(\Pi)$ длины $l-1$. В частности, любой цепочке вершин паруса Π длины l при каждом $k \leqslant l$ соответствует цепочка в $\mathcal{G}_k(\Pi)$ длины $l+1-k$.

Рассмотрим группу целочисленных аффинных операторов $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{Z})$ и некоторое ее подмножество $\mathfrak{A} \subset \mathrm{Aff}_n(\mathbb{Z})$. Определим $\mathfrak{A}$–раскраску графа $\mathcal{G}_k(\Pi)$ следующим образом. Две различные вершины V и W этого графа раскрашиваем в один и тот же цвет, если существует оператор из $\mathfrak{A}$, переводящий $\bigcup_{\mathbf{v}\in V} \mathrm{St}_{\mathbf{v}}$ в $\bigcup_{\mathbf{v}\in W} \mathrm{St}_{\mathbf{v}}$. Отметим, что при этом мы не требуем, чтобы этот оператор сохранял порядок вершин паруса.

Определение 3.8. Пусть $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ — цепочка вершин паруса Π. Пусть любые $n-1$ подряд идущие вершины аффинно независимы (то есть не лежат ни в какой $(n-3)$–мерной плоскости) и принадлежат некоторой $(n-1)$–мерной грани паруса. Пусть образы этой цепочки в $\mathcal{G}_n(\Pi)$ и в $\mathcal{G}_{n+1}(\Pi)$ имеют периодичные $\mathfrak{A}$–раскраски, причем для любых двух различных операторов $A, B \in \mathfrak{A}$, “осуществляющих” раскраску, оператор AB^{-1} также принадлежит $\mathfrak{A}$. Тогда цепочку $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ вершин паруса Π будем называть $\mathfrak{A}$–*периодической*.

Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ множество таких аффинных операторов $\mathbf{A}$, что $\mathbf{A} : \mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x}) + \mathbf{a}$, $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$, и A удовлетворяет следующим двум свойствам:

$(P1)$: Все собственные значения оператора A отличны от единицы.

$(P2)$: Если $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ — собственное значение оператора A, то все остальные собственные значения, кроме комплексно–сопряженного к α, отличны по модулю от α.

Следующие ниже теоремы (в особенности, теоремы 3.5, 3.8 и 3.9) уточняют результат работы [Ko1]:

Теорема 3.5. *Пусть парус* Π *соответствует решетке* $\mathbb{Z}^n$ *и иррациональному конусу* $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$. *Тогда следующие два условия эквивалентны:*

(1) *существует неединичный оператор* $A \in \mathfrak{A}_0$ *такой, что* $A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$*;*

(2) *существует неограниченная в обе стороны (как подмножество* $\mathbb{R}^n$*)* $\mathfrak{A}_0$*–периодическая цепочка* $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ *вершин паруса* Π.

Импликация (1) $\implies$ (2) очевидна, поскольку если $A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, то $A(\Pi) = \Pi$. Импликация (2) $\implies$ (1) следует из теорем 3.6 и 3.7, которые и доказываются в данной работе.

Теорема 3.6. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— произвольное подмножество* $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{Z})$ *и пусть* $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ *—* $\mathfrak{A}$–периодическая *цепочка вершин паруса* $\Pi \subset \mathbb{R}^n$. *Тогда существует оператор из* $\mathfrak{A}$, *осуществляющий нетривиальный сдвиг множества* $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{St}_{\mathbf{v}_i}$ *вдоль себя.*

Определение 3.9. Оператор $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ называется *гиперболическим*, если его характеристический многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$ и все его корни суть положительные вещественные числа.

Теорема 3.7. *Пусть* $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ *— неограниченная в обе стороны (как подмножество* $\mathbb{R}^n$*) последовательность (не обязательно являющаяся цепочкой) вершин паруса* Π, *соответствующего решетке* $\mathbb{Z}^n$ *и некоторому иррациональному конусу* $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$. *Пусть существует оператор* $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}_0$ *такой, что* $\mathbf{A}(\mathrm{St}_{\mathbf{v}_i}) = \mathrm{St}_{\mathbf{v}_{i+1}}$. *Тогда* $\mathbf{A} = A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ *и* $A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. *Кроме того, если собственные значения оператора* A *попарно различны, то* A *— гиперболический оператор.*

Замечание 3.5. Из доказательства теоремы 3.7 видно, что если оператор, осуществляющий сдвиг цепочки, линеен, то можно ограничиться требованием выполнения для него свойства $(P2)$, а свойство $(P1)$ опустить.

Если обозначить через $\mathfrak{A}_1$ множество таких операторов из $\mathfrak{A}_0$, что линейная компонента каждого из них имеет попарно различные собственные значения, то получим еще одну теорему, также являющуюся следствием теорем 3.6 и 3.7:

Теорема 3.8. *Пусть парус* Π *соответствует решетке* $\mathbb{Z}^n$ *и иррациональному конусу* $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$. *Тогда следующие два условия эквивалентны:*

(1) *существует гиперболический оператор* $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ *такой, что* $A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$;

(2) *существует неограниченная в обе стороны (как подмножество* $\mathbb{R}^n$*)* $\mathfrak{A}_1$–*периодическая цепочка* $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *вершин паруса* Π.

Стоит отметить, что импликация (1) $\Longrightarrow$ (2) в теореме 3.8 в силу гиперболичности оператора A следует, помимо всего прочего, еще из теоремы Дирихле об алгебраических единицах (см. [BSh] и [Ts]).

Отметим также, что в теореме 3.5 нельзя оставить $\mathfrak{A}_0$ и при этом добавить требование гиперболичности в пункт (1). Для четных n легко придумать такой оператор $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, для которого существует иррациональный инвариантный (симплициальный) конус, но при этом его характеристический многочлен равен, например, квадрату неприводимого над $\mathbb{Q}$ многочлена с целыми коэффициентами и положительными вещественными корнями. Так, при $n = 4$ можно взять оператор с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

У этого оператора есть две инвариантные иррациональные двумерные плоскости, в которых можно выбрать по два вектора так, чтобы они задавали иррациональный конус $\mathcal{C}$, инвариантный для оператора A, но не инвариантный ни для какого гиперболического целочисленного оператора.

С другой стороны, нельзя добавить требование гиперболичности в пункт (1) теоремы 3.5, заменив лишь $(P2)$ на свойство операторов иметь попарно различные собственные значения. Это видно из следующего примера, любезно предоставленного Е. И. Коркиной (Павловской):

Рассмотрим квадратное уравнение $\lambda^2 - p\lambda + 1 = 0$ с целым $p \geqslant 3$. Оно имеет два различных действительных иррациональных положительных корня λ_1 и λ_2. Заменив λ на μ^3, получим уравнение 6–й степени: $\mu^6 - p\mu^3 + 1 = 0$. Рассмотрим расширение поля $\mathbb{Q}$ корнем этого уравнения. Это будет 6–мерное векторное пространство M над $\mathbb{Q}$ с базисом $1, \mu, \ldots, \mu^5$. Рассмотрим $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$–оператор A, действующий на M умножением на μ. Вложим естественным образом M в $\mathbb{R}^6$ и расширим действие оператора A с образа пространства M на все $\mathbb{R}^6$.

Оператор A имеет 6 собственных значений: $\sqrt[3]{\lambda_1}$, $\zeta\sqrt[3]{\lambda_1}$, $\zeta^2\sqrt[3]{\lambda_1}$ и $\sqrt[3]{\lambda_2}$, $\zeta\sqrt[3]{\lambda_2}$, $\zeta^2\sqrt[3]{\lambda_2}$, где $\zeta = e^{2\pi i/3}$. Для каждого $i = 1, 2$ обозначим через V_i

трехмерное A–инвариантное подпространство пространства $\mathbb{R}^6$, соответствующее собственным значениям $\sqrt[3]{\lambda_i}$, $\zeta\sqrt[3]{\lambda_i}$, $\zeta^2\sqrt[3]{\lambda_i}$ и рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{\omega}_i \in V_i$, не лежащий ни в каком 1– или 2–мерном инвариантном подпространстве оператора A. Положим $\boldsymbol{\omega}_i^0 = \boldsymbol{\omega}_i$, $\boldsymbol{\omega}_i^1 = A\boldsymbol{\omega}_i$, $\boldsymbol{\omega}_i^2 = A^2\boldsymbol{\omega}_i$. Вектора $\boldsymbol{\omega}_1^0$, $\boldsymbol{\omega}_1^1$, $\boldsymbol{\omega}_1^2$, $\boldsymbol{\omega}_2^0$, $\boldsymbol{\omega}_2^1$, $\boldsymbol{\omega}_2^2$, очевидно, линейно независимы. Рассмотрим натянутый на них конус $\mathcal{C}$. Его 3–мерные грани, задаваемые первыми тремя и последними тремя векторами, инвариантны относительно действия оператора A, поскольку $A\boldsymbol{\omega}_i^2 = A^3\boldsymbol{\omega}_i^0 = \lambda_i\boldsymbol{\omega}_i^0$ и $\lambda_i > 0$. Стало быть, и конус $\mathcal{C}$, и парус, ему соответствующий, инвариантны относительно действия оператора A, однако оператор A — не гиперболический. Более того, мы можем выбрать вектора $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ таким образом, чтобы они задавали трансцендентные направления, и тогда конус $\mathcal{C}$ не будет инвариантным ни для какого гиперболического целочисленного оператора.

Для $n = 3$ можно доказать несколько более сильное утверждение, чем теоремы 3.5 и 3.8, а именно, можно $\mathfrak{A}_0$ заменить на $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{Z})$ и при этом оставить условие гиперболичности. При этом ясно, что для $n = 3$ и $\mathfrak{A} = \mathrm{Aff}_3(\mathbb{Z})$ технические условия определения 3.8 автоматически выполняются и $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{Z})$–периодичность цепочки вершин означает в точности периодичность $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{Z})$–раскраски образов этой цепочки в $\mathcal{G}_n(\Pi)$ и в $\mathcal{G}_{n+1}(\Pi)$.

Теорема 3.9. *Пусть парус* Π *соответствует решетке* $\mathbb{Z}^3$ *и иррациональному конусу* $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$. *Тогда следующие два условия эквивалентны:*

(1) *существует гиперболический оператор* $A \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ *такой, что* $A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$*;*

(2) *существует неограниченная в обе стороны (как подмножество* $\mathbb{R}^3$*)* $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{Z})$*–периодическая цепочка* $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *вершин паруса* Π.

3.3.2 Доказательство теоремы 3.6.

Обозначим через $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\{W_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ образы цепочки $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ в $\mathcal{G}_n(\Pi)$ и $\mathcal{G}_{n+1}(\Pi)$, соответственно. Будем считать, что $V_0\backslash V_1 = W_0\backslash W_1 = \{\mathbf{v}_0\}$. Обозначим также

$$\widetilde{V}_i = \bigcup\nolimits_{\mathbf{v}\in V_i} \mathrm{St}_{\mathbf{v}} \quad \text{и} \quad \widetilde{W}_i = \bigcup\nolimits_{\mathbf{v}\in W_i} \mathrm{St}_{\mathbf{v}}.$$

Положив t равным наименьшему общему кратному периодов раскрасок графов $\mathcal{G}_n(\Pi)$ и $\mathcal{G}_{n+1}(\Pi)$, получаем, что существуют операторы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathfrak{A}$ такие, что

$$\mathbf{A}(\widetilde{V}_0) = \widetilde{V}_t, \quad \mathbf{B}(\widetilde{V}_1) = \widetilde{V}_{t+1}, \quad \mathbf{C}(\widetilde{W}_0) = \widetilde{W}_t\,.$$

Предположим, что оператор $\mathbf{A}$ меняет порядок вершин, то есть $\mathbf{A}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_{t+n-1-i}$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда либо оператор $\mathbf{A}'$ такой, что $\mathbf{A}'(\widetilde{V}_t) = \widetilde{V}_{2t}$, либо оператор $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ (для которого, очевидно, $\mathbf{A}'\mathbf{A}(\widetilde{V}_0) = \widetilde{V}_{2t}$)

сохраняет порядок вершин. Поэтому мы можем считать, что оператор $\mathbf{A}$ сохраняет порядок вершин, удвоив, если необходимо, t или сдвинув все индексы на t.

Предположим теперь, что оператор $\mathbf{B}$ меняет порядок вершин. Тогда, как легко видеть, либо оператор $\mathbf{C}$, либо оператор $\mathbf{BC}^{-1}\mathbf{AC}^{-1}\mathbf{B}$ переводит $\widetilde{V}_1$ в $\widetilde{V}_{t+1}$ не меняя при этом порядка вершин. Поэтому мы можем считать, что оператор $\mathbf{B}$ также сохраняет порядок вершин.

В предположении, что операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ сохраняют порядок вершин, рассмотрим оператор $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. Очевидно, $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i$ и $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}(\mathrm{St}_{\mathbf{v}_i}) = \mathrm{St}_{\mathbf{v}_i}$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Обозначим через $\mathbf{r}_0$ сумму векторов, задающих ребра звезды $\mathrm{St}_{\mathbf{v}_1}$, и положим $\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Ясно, что $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_i) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_i$ для каждого $i = 0, 1, \ldots, n-2$. Из условия следует, что вектора $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_{n-2}$ линейно независимы и параллельны некоторой $(n-1)$–мерной грани, инцидентной вершине $\mathbf{v}_1$. Стало быть, вектора $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_{n-2}$ также линейно независимы. Следовательно, аффинная оболочка точек $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_{n-2}$ является $(n-1)$–мерной инвариантной плоскостью оператора $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. Эта плоскость делит ребра звезды $\mathrm{St}_{\mathbf{v}_1}$ на два инвариантных подмножества, так как $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ сохраняет ориентацию. Обозначим через $\mathbf{r}'_0$ и $\mathbf{r}''_0$ суммы векторов, задающих ребра этих двух подмножеств. Тогда точки $\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}'_0$ и $\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}''_0$ остаются на месте при действии оператора $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ и хотя бы одна из них не лежит в аффинной оболочке точек $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_{n-2}$. Получаем $n+1$ точку, не лежащую ни в какой n–мерной плоскости и инвариантную относительно действия оператора $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. Следовательно, $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ — тождественный оператор и $\mathbf{B} = \mathbf{A}$.

Продолжая это рассуждение в обе стороны цепочки $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, получаем, что оператор $\mathbf{A}$ сдвигает цепочку звезд $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{St}_{\mathbf{v}_i}$ вдоль себя. $\square$

3.3.3 Теорема о звезде и целочисленном расстоянии.

Этот пункт посвящен формулировке и доказательству теоремы 3.10, которая говорит о том, что точка решетки $\mathbb{Z}^n$, из которой "виден" некоторый выпуклый целочисленный многогранник, не может находиться слишком "далеко" от него, причем верхняя граница на "расстояние" полностью определяется комбинаторно–целочисленной структурой реберных звезд многогранника. Мы воспользуемся этой теоремой для доказательства теоремы 3.7, а также в конце работы для переформулировки гипотезы Оппенгейма.

Будем через $\mathrm{conv}(M)$ и $\mathrm{aff}(M)$ обозначать, соответственно, выпуклую и аффинную оболочки множества $M \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 3.10. (Обобщенный) многогранник, все вершины которого принадлежат решетке $\mathbb{Z}^n$, называется *целочисленным*.

Определение 3.11. Пусть в вершине $\mathbf{v}$ целочисленного выпуклого n–мерного (обобщенного) многогранника P сходятся m ребер. Обозначим через $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$ примитивные вектора решетки $\mathbb{Z}^n$, параллельные этим ребрам. Тогда *детерминантом* реберной звезды $\mathrm{St}_\mathbf{v}$ вершины $\mathbf{v}$ будем называть величину

$$\det \mathrm{St}_\mathbf{v} = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_n\leqslant m} |\det(\mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_n})|\,.$$

Иными словами, $\det \mathrm{St}_\mathbf{v}$ — это объем суммы Минковского отрезков $[\mathbf{0}, \mathbf{r}_1], \ldots, [\mathbf{0}, \mathbf{r}_m]$.

Определение 3.12. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ — $(n-1)$–мерный целочисленный многогранник и $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$. Индекс минимальной (по включению) подрешетки $\mathbb{Z}^n$, содержащей множество $\mathbb{Z}^n \cap \mathrm{aff}(F) - \mathbf{a}$, называется *целочисленным расстоянием* от F до $\mathbf{a}$ и обозначается $\rho_{\mathrm{int}}(F, \mathbf{a})$.

Теорема 3.10. *Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ — n–мерный целочисленный выпуклый многогранник, не содержащий $\mathbf{0}$. Пусть $\mathbf{v}$ — вершина P, содержащаяся во внутренности множества $\mathrm{conv}(P \cup \{\mathbf{0}\})$, пусть $\mathbf{v}$ инцидентна m ребрам P и пусть F — $(n-1)$–мерная грань P, инцидентная вершине $\mathbf{v}$. Пусть также*

$$\mathbb{Z}^n \cap \mathrm{conv}(P \cup \{\mathbf{0}\}) \backslash P = \{\mathbf{0}\}.$$

Тогда

$$\rho_{\mathrm{int}}(F, \mathbf{0}) < (nm)^{4n!} \det \mathrm{St}_\mathbf{v}.$$

На самом деле в доказательстве теоремы 3.7 мы воспользуемся не самой теоремой 3.10, а ее следствием:

Следствие 29. *Пусть $\mathbf{v}$ — вершина паруса Π и F — $(n-1)$–мерная грань Π, инцидентная вершине $\mathbf{v}$. Тогда*

$$\rho_{\mathrm{int}}(F, \mathbf{0}) < (n \det \mathrm{St}_\mathbf{v})^{8n!}.$$

Отметим еще одно следствие теоремы 3.10, полезное для явного описания граней полиэдров Клейна, хотя в данной работе мы им пользоваться не будем:

Следствие 30. *Пусть $P \subset \Delta \subset \mathbb{R}^n$ — n–мерный целочисленный выпуклый многогранник, содержащийся в произвольном многограннике Δ (например, симплексе), и*

$$P = \bigcap_{i=1}^{k} \big\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{f}_i \rangle \geqslant D_i \big\},$$

где $\mathbf{f}_i$ *— примитивные вектора решетки* $\mathbb{Z}^n$*. Пусть в каждой вершине* P *сходится не более, чем* m *ребер, пусть* D *— константа, ограничивающая детерминанты всех реберных звезд* P *и*

$$\mathbb{Z}^n \cap \bigcap_{i=1}^{k} \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{f}_i \rangle > D_i - D(nm)^{4n!}\big\} = \mathbb{Z}^n \cap P.$$

Тогда $\mathbb{Z}^n \cap \Delta = \mathbb{Z}^n \cap P$.

Для доказательства теоремы 3.10 нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.15. *Пусть* n *— натуральное и* V, A, B *— действительные числа, такие, что* $V > 0$, $A > V/n$, $0 < B < 1$*. Пусть* $f(x) = A(B - x)^{n-1}(1-x) - x$*. Тогда* $f(x) > 0$ *при любом* $x:\ 0 \leqslant x \leqslant B^{n-1}n^{-1}(1+V^{-1})^{-1}$.

Доказательство. Корень уравнения касательной к $f(x)$ в нуле равен

$$\frac{AB^{n-1}}{1 + AB^{n-2}(n-1+B)} > \frac{B^{n-1}}{n(1+V^{-1})}$$

и дает оценку снизу на минимальный положительный корень $f(x)$. □

Лемма 3.16. *Пусть* Λ *—* n*–мерная решетка в* $\mathbb{R}^n$ *с определителем* 1*. Пусть* $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ *—* n*–мерный симплекс с вершинами* $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ *и* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{Q}\Lambda$*. Пусть точка* $\mathbf{v} \in \Lambda$ *лежит в его внутренности. Обозначим через* Δ_0 *симплекс с вершинами* $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$*. Пусть константа* V *такова, что отношение* k*–мерного объема любой* k*–мерной грани симплекса* Δ_0 *к определителю* k*–мерной (аффинной) решетки точек* Λ*, содержащихся в аффинной оболочке этой грани, не меньше, чем* V*, при любом* $k \in \{1, \ldots, n\}$*. Пусть также*

$$\mathbb{Z}^n \cap \left(\mathbf{v}_0 + \left(1 - \frac{\mathrm{vol}_n(\Delta_0)}{\mathrm{vol}_n(\Delta)}\right)(\Delta - \mathbf{v}_0)\right) \setminus \{\mathbf{v}, \mathbf{v}_0\} = \varnothing$$

(то есть гиперплоскость, проходящая через $\mathbf{v}$ *и параллельная плоскости* $\mathrm{aff}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$*, отсекает от* Δ *симплекс, в котором нет точек решетки, за исключением* $\mathbf{v}$ *и, быть может,* $\mathbf{v}_0$*).*

Тогда

$$\mathrm{vol}_n(\Delta) \leqslant \mathrm{vol}_n(\Delta_0) \prod_{k=1}^{n} k^{\frac{n!}{k!}} (1 + V^{-1})^{\frac{(n-1)!}{(k-1)!}}.$$

Доказательство. Положим

$$c_n(V) = \prod_{k=1}^{n} k^{\frac{n!}{k!}}(1+V^{-1})^{\frac{(n-1)!}{(k-1)!}}$$

и применим индукцию по n. При $n=1$ утверждение леммы очевидно. Пусть в размерности $(n-1)$ утверждение леммы выполнено. Докажем его для размерности n. При этом, ввиду аффинности задачи, достаточно доказать утверждение леммы для случая, когда вектора $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_0,\dots,\mathbf{v}_n-\mathbf{v}_0$ попарно ортогональны и равны по абсолютной величине некоторому числу l.

Не ограничивая общности, будем считать, что среди точек $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ точка $\mathbf{v}_n$ — самая далекая от $\mathbf{v}$. Это означает, что среди граней $\mathrm{conv}(\{\mathbf{v}_0,\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}\backslash\{\mathbf{v}_i\})$ грань $\mathrm{conv}(\mathbf{v}_0,\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{n-1})$ — ближайшая к $\mathbf{v}$. Пусть $\mathbf{u}\in\mathrm{conv}(\mathbf{v}_0,\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{n-1})$ — ближайшая к $\mathbf{v}$ точка, такая, что вектор $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ параллелен плоскости $\pi=\mathrm{aff}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$. Тогда во множестве

$$\Omega = \mathrm{conv}(\{\mathbf{v}_0\}\cup(\pi\cap B_{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|}(\mathbf{v}))),$$

где $B_{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|}(\mathbf{v})$ — шар радиуса $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|$ с центром в $\mathbf{v}$, нет точек решетки Λ, за исключением $\mathbf{v}$ и, быть может, $\mathbf{v}_0$. Следовательно, объем Ω, по теореме Минковского о выпуклом теле, обязан быть не больше, чем 2^{n-1}. То есть

$$\frac{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^{n-1}}{n}\left(1-\frac{\mathrm{vol}_n(\Delta_0)}{\mathrm{vol}_n(\Delta)}\right)\frac{l}{\sqrt{n}} \leqslant 2^{n-1}\frac{\mathrm{vol}_n(\Delta_0)}{V}. \tag{3.24}$$

Положим

$$\Delta_0' = \mathrm{conv}(\mathbf{v},\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{n-1})$$

и

$$\Delta' = \mathrm{aff}(\Delta_0')\cap\Delta.$$

Вершинами симплекса Δ' будут точки $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{n-1}$ и некоторая точка $\mathbf{v}_0'$ из отрезка $[\mathbf{v}_0,\mathbf{v}_n]$. По предположению индукции, $\mathrm{vol}_{n-1}(\Delta')\leqslant c_{n-1}(V)\,\mathrm{vol}_{n-1}(\Delta_0')$, откуда, пользуясь элементарными геометрическими соображениями, получаем, что

$$|\mathbf{u}-\mathbf{v}| \geqslant \sqrt{n}\left(c_{n-1}^{-1}(V)\cdot\frac{l}{\sqrt{n-1}}-\frac{\mathrm{vol}_n(\Delta_0)}{\mathrm{vol}_n(\Delta)}\cdot\frac{l}{\sqrt{n-1}}\right). \tag{3.25}$$

Комбинируя 3.24, 3.25 и тот факт, что $\mathrm{vol}_n(\Delta)=l^n/n!$, получаем:

$$\frac{V(n-1)!(\sqrt{n-1})^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{n}(\sqrt{n-1})^{n-1}}\left(c_{n-1}^{-1}(V)-\frac{\mathrm{vol}_n(\Delta_0)}{\mathrm{vol}_n(\Delta)}\right)^{n-1}\left(1-\frac{\mathrm{vol}_n(\Delta_0)}{\mathrm{vol}_n(\Delta)}\right)-\frac{\mathrm{vol}_n(\Delta_0)}{\mathrm{vol}_n(\Delta)}\leqslant 0.$$

Стало быть, в силу леммы 3.15,

$$\frac{\mathrm{vol}_n(\Delta_0)}{\mathrm{vol}_n(\Delta)} > \frac{(c_{n-1}(V))^{1-n}}{n(1+V^{-1})} = c_n(V)^{-1}.$$

Лемма доказана. □

Будем обозначать через $\mathrm{int}\, P$ и $\mathrm{ext}\, P$, соответственно, относительную внутренность и множество вершин многогранника P. Если $M \subset \mathbb{R}^n$ — конечное множество и каждой точке $\mathbf{x} \in M$ соответствует положительная масса $\nu_{\mathbf{x}}$, то для любого подмножества $M' \subseteq M$ мощности $\sharp(M')$ будем обозначать через $c(M')$ точку $(\sum_{\mathbf{x}\in M'} \nu_{\mathbf{x}}\mathbf{x})/\sharp(M')$, то есть центр масс точек множества M'.

Лемма 3.17. *Пусть P —произвольный $(n-1)$–мерный многогранник с произвольными положительными массами в вершинах. Пусть $\mathfrak{T}$ произвольное разбиение (относительной) границы P на (замкнутые) симплексы с вершинами из* $\mathrm{ext}\, P$. *Тогда*

$$\mathrm{int}\, P = \bigcup_{\Delta\in\mathfrak{T}} \mathrm{int}(\mathrm{conv}(\Delta \cup \{c(\mathrm{ext}\, P \setminus \mathrm{ext}\, \Delta)\})).$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in \mathrm{int}\, P$. Тогда, очевидно, существует такой симплекс $\Delta \in \mathfrak{T}$, что $\mathbf{x} \in \mathrm{conv}(\Delta \cup \{c(P)\})$. Остается заметить, что множество $\mathrm{conv}(\Delta \cup \{c(P)\}) \cap \mathrm{int}\, P$ содержится во внутренности множества $\mathrm{conv}(\Delta \cup \{c(\mathrm{ext}\, P \setminus \mathrm{ext}\, \Delta)\})$. □

Доказательство теоремы 3.10. Пусть $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$ — примитивные вектора решетки $\mathbb{Z}^n$, параллельные ребрам, инцидентным вершине $\mathbf{v}$. Возьмем произвольные положительные числа $k_1, \ldots, k_m$, такие, что точки $\mathbf{r}'_i = k_i\mathbf{r}_i$ лежат на одной гиперплоскости, и положим $P = \mathrm{conv}(\mathbf{r}'_1, \ldots, \mathbf{r}'_m)$. Рассмотрим такое λ, что $\lambda\mathbf{v} \in P$.

Припишем точкам r'_i массы k_i^{-1}. Тогда по лемме 3.17 мы можем перенумеровать векторы $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$ (перенумеровывая соответственно числа $k_1, \ldots, k_m$ и векторы $\mathbf{r}'_1, \ldots, \mathbf{r}'_m$) таким образом, чтобы $\lambda\mathbf{v} = \lambda'_0\mathbf{r}'_0 + \cdots + \lambda'_{n-1}\mathbf{r}'_{n-1}$ со строго положительными λ'_i и $\mathbf{r}'_0 = (\mathbf{r}_n + \cdots + \mathbf{r}_m)/(m-n+1)$. Положив $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'_0$, $\lambda_0 = \lambda'_0$ и $\lambda_i = k_i\lambda'_i$ для $i = 1, \ldots, n-1$, получаем, что $\lambda\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{r}_0 + \cdots + \lambda_{n-1}\mathbf{r}_{n-1}$ со строго положительными λ_i. Следовательно, $\mathbf{v}$ содержится во внутренности симплекса Δ с вершинами $\mathbf{0}, \mathbf{v}+\mathbf{r}_0, \ldots, \mathbf{v}+\mathbf{r}_{n-1}$. Из определения $\mathbf{r}_0$ следует, что отношение k–мерного объема любой k–мерной грани симплекса $\Delta_0 = \mathrm{conv}(\mathbf{v}, \mathbf{v}+\mathbf{r}_0, \ldots, \mathbf{v}+\mathbf{r}_{n-1})$ к определителю k–мерной решетки точек $\mathbb{Z}^n$, содержащихся в аффинной оболочке этой грани, не меньше, чем $n^{-1}(m-n+1)^{-1}$, при любом $k \in \{1, \ldots, n\}$. Кроме того, легко видеть, что гиперплоскость, проходящая через точку $\mathbf{v}$ и параллельная плоскости $\mathrm{aff}(\mathbf{v}+\mathbf{r}_0,\ldots,\mathbf{v}+\mathbf{r}_{n-1})$, является опорной для многогранника P и, следовательно, отсекает от Δ симплекс, в котором нет целых точек, кроме $\mathbf{0}$ и $\mathbf{v}$. Стало быть, условие леммы 3.16 для симплексов Δ и Δ_0 выполнено, что означает, что имеют место неравенства

$$\mathrm{vol}_n(\Delta) \leqslant \mathrm{vol}_n(\Delta_0)\prod_{k=1}^{n} k^{\frac{n!}{k!}}(mn-n^2+n+1)^{\frac{(n-1)!}{(k-1)!}} <$$

$$< \mathrm{vol}_n(\Delta_0)\prod_{k=1}^{n}(nmk)^{\frac{n!}{k!}} < (nm)^{4n!}\,\mathrm{vol}_n(\Delta_0).$$

Следовательно,

$$\rho_{\mathrm{int}}(F,\mathbf{0}) \leqslant n\cdot \mathrm{vol}_n(\mathrm{conv}(F\cup\{\mathbf{0}\})) < n\cdot\mathrm{vol}_n(\Delta) < (nm)^{4n!}\det \mathrm{St}_{\mathbf{v}}.$$

Теорема доказана. $\square$

3.3.4 Доказательство теоремы 3.7.

Для доказательства теоремы 3.7 нам также понадобится следующий факт, который ввиду его простоты мы оставим без доказательства:

Лемма 3.18. *Пусть $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ — n–мерная жорданова клетка с собственным значением λ. Пусть $\mathbf{e}\in\mathbb{R}^n$ — вектор, i–ая координата которого равна 1, а все остальные — нули. Пусть $\mathbf{h}\in\mathbb{R}^n$ — вектор с ненулевыми координатами. Тогда $\langle A^m\mathbf{h},\mathbf{e}\rangle \asymp \lambda^m m^{n-i}$ при $m\to+\infty$.*

Доказательство теоремы 3.7. В силу условия $(P1)$ оператор $E-A$ обратим. Положим $\mathbf{b}=(E-A)^{-1}\mathbf{a}$. Тогда $\mathbf{b}\in\mathbb{Q}^n$ и $\mathbf{A}(\mathbf{b}+\mathbf{x})=\mathbf{b}+A(\mathbf{x})$. То есть мы можем считать, что вместо аффинного оператора $\mathbf{A}$ действует линейный оператор A, но вершина конуса $\mathcal{C}$ находится в точке $-\mathbf{b}$.

Если F — произвольная $(n-1)$–мерная грань паруса Π, инцидентная $\mathbf{v}_0$, то в силу следствия 29 из теоремы 3.10 целочисленное расстояние от $A^m(F)$ до $-\mathbf{b}$ при любом $m\in\mathbb{Z}$ ограниченно некоторой константой, не зависящей от m. Следовательно, если $\langle\mathbf{h}_F,\cdot\rangle$ — такая линейная форма, что $\mathrm{aff}(F)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\,|\,\langle\mathbf{h}_F,\mathbf{x}\rangle=1\}$, то

$$\max_{m\in\mathbb{Z}}|\langle(A^*)^m\mathbf{h}_F,-\mathbf{b}\rangle|<\infty. \tag{3.26}$$

Рассмотрим жорданов базис $\mathcal{E}=\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ оператора A и линейную форму $\langle\mathbf{h},\cdot\rangle$ такую, что ни одна из компонент вектора $\mathbf{h}$ в базисе $\mathcal{E}^*$, двойственном базису $\mathcal{E}$, не равна нулю, и такую, что плоскость $\pi_{\mathbf{h}}=\{\mathbf{x}\in$

$\mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{h}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$ пересекает ребра звезды $\mathrm{St}_{\mathbf{v}_0}$ во внутренних точках. Из (3.26) следует, что

$$\max_{m\in\mathbb{Z}} |\langle (A^*)^m \mathbf{h}, -\mathbf{b} \rangle| < \infty.$$

Отсюда, применяя лемму 3.18 для $m \to +\infty$ и $m \to -\infty$, получаем, что

$$|A(\mathbf{b})| = |\mathbf{b}|. \tag{3.27}$$

С другой стороны, из того, что плоскость $\pi_{\mathbf{h}}$ пересекает ребра звезды $\mathrm{St}_{\mathbf{v}_0}$ во внутренних точках, следует, что

$$\inf_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{vol}_n(\mathrm{conv}(-\mathbf{b}, \mathcal{C} \cap A^m(\pi_{\mathbf{h}}))) > 0. \tag{3.28}$$

Обозначим через $\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ единичные вектора, задающие направления ребер конуса $\mathcal{C}$. Тогда

$$\begin{aligned} A^m(\pi_{\mathbf{h}} \cap \mathrm{aff}(-\mathbf{b}, -\mathbf{b} + \boldsymbol{\omega}_i)) = \\ = \big\{ -\mathbf{b} + \lambda\boldsymbol{\omega}_i \;\big|\; \langle (A^*)^{-m}\mathbf{h}, -\mathbf{b} + \lambda\boldsymbol{\omega}_i \rangle = 1 \big\} = \\ = \left\{ \boldsymbol{\omega}_i \frac{1 + \langle (A^*)^{-m}\mathbf{h}, \mathbf{b} \rangle}{\langle (A^*)^{-m}\mathbf{h}, \boldsymbol{\omega}_i \rangle} \right\}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Стало быть, неравенство (3.28) равносильно неравенству

$$\inf_{m\in\mathbb{Z}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1 + \langle (A^*)^{-m}\mathbf{h}, \mathbf{b} \rangle}{\langle (A^*)^{m}\mathbf{h}, \boldsymbol{\omega}_i \rangle} > 0,$$

из которого в силу (3.27) следует, что

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \prod_{i=1}^{n} \langle (A^*)^{m}\mathbf{h}, \boldsymbol{\omega}_i \rangle < \infty. \tag{3.30}$$

Будем считать, что $\mathbf{e}_i$ соответствует собственному значению λ_i и что $|\lambda_1| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n|$. Обозначим через $\mu_1 < \ldots < \mu_k$ ($k \leqslant n$) набор модулей этих собственных значений, и для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ обозначим через M_i собственное подпространство оператора A, соответствующее μ_i. Получаем градуировку: $\mathbb{R}^n = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$.

Докажем следующие два утверждения:

(i) M_i содержит ровно $\dim M_i$ ребер конуса $\mathcal{C}$;

(ii) матрица оператора A не имеет нетривиальных жордановых клеток.

Для этого положим

$$L_i = \bigoplus_{j=1}^{i} M_j \quad \text{и} \quad L'_i = \bigoplus_{j=i}^{k} M_j\,.$$

Получаем фильтрации: $\mathbb{R}^n = L_k \supset L_{k-1} \supset \ldots \supset L_1 = M_1$ и $\mathbb{R}^n = L'_1 \supset L'_2 \supset \ldots \supset L'_k = M_k$. Положим также $r_i = \min\{r : \boldsymbol{\omega}_i \in L_r\}$. Тогда по лемме 3.18 для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует такое $l_i \in \mathbb{Z}$, $l_i \geqslant 0$, что

$$\langle (A^*)^m \mathbf{h}, \boldsymbol{\omega}_i \rangle \asymp \mu_{r_i}^m m^{l_i} \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{3.31}$$

Стало быть,

$$\prod_{i=1}^n \langle (A^*)^m \mathbf{h}, \boldsymbol{\omega}_i \rangle \asymp \left(\prod_{i=1}^n \mu_{r_i}^m \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^n m^{l_i} \right) =$$
$$= \left(\prod_{i=1}^n \frac{\mu_{r_i}}{|\lambda_i|} \right)^m \cdot \left(\prod_{i=1}^n m^{l_i} \right) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{3.32}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_n$. Тогда $i \leqslant \dim L_{r_i}$ и, следовательно, $\mu_{r_i} \geqslant |\lambda_i|$, причем равенство достигается лишь в том случае, когда $i > \dim L_{r_i - 1}$. Таким образом, из (3.30) и (3.32) следует, что для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\dim L_{r_i - 1} < i \leqslant \dim L_{r_i}.$$

Отсюда получаем, что для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ и любого $i \leqslant \dim L_j$

$$\dim L_{r_i - 1} < i \leqslant \dim L_j,$$

то есть $r_i \leqslant j$. Следовательно, если $i \leqslant \dim L_j$, то $\boldsymbol{\omega}_i \in L_j$. Это значит, что L_j содержит ровно $\dim L_j$ векторов $\boldsymbol{\omega}_i$. Стало быть, если у A^* есть нетривиальная жорданова клетка, то найдется такое i, что в (3.31) будет $l_i > 0$, что в силу (3.32) противоречит (3.30). Значит, нетривиальных жордановых клеток ни у A, ни у A^* нет и (ii) доказано.

Положим теперь $r'_i = \min\{r : \boldsymbol{\omega}_i \in L'_r\}$. Тогда

$$\langle (A^*)^{-m} \mathbf{h}, \boldsymbol{\omega}_i \rangle \asymp \mu_{r'_i}^{-m} \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Переупорядочив, если нужно, $\boldsymbol{\omega}_i$, будем считать, что $r'_1 \leqslant r'_2 \leqslant \ldots \leqslant r'_n$. Рассуждая так же, как в случае с L_j, получим, что каждое L'_j содержит ровно $\dim L'_j$ векторов $\boldsymbol{\omega}_i$. Но $L_j \cap L'_j = M_j$ и $\dim L_j + \dim L'_j = n + \dim M_j$, стало быть, M_j содержит ровно $\dim M_j$ векторов $\boldsymbol{\omega}_i$. Утверждение (i) доказано.

Если $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, то в силу свойств $(P1)$, $(P2)$ и соотношения (3.27) точка $\mathbf{b}$ содержится в некотором M_{j_0}, соответствующем ровно двум комплексно–сопряженным собственным значениям, равным по модулю 1. При этом из (i) следует, что M_{j_0} содержит также некоторые $\boldsymbol{\omega}_{i_1}$ и $\boldsymbol{\omega}_{i_2}$, то есть M_{j_0} содержит некоторую 2–мерную грань $\mathcal{F}$ конуса $\mathcal{C}$. Но поскольку $\langle (A^*)^m \mathbf{h}, \mathbf{v}_{-m} \rangle =$

$\langle \mathbf{h}, \mathbf{v}_0 \rangle$ для всех $m \in \mathbb{Z}$, то либо $\langle (A^*)^m \mathbf{h}, \mathbf{x} \rangle \geqslant \langle \mathbf{h}, \mathbf{v}_0 \rangle$ для всех $\mathbf{x} \in K$, $m \in \mathbb{Z}$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$, либо $\langle (A^*)^m \mathbf{h}, \mathbf{x} \rangle \leqslant \langle \mathbf{h}, \mathbf{v}_0 \rangle$ для всех $\mathbf{x} \in K$, $m \in \mathbb{Z}$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$. Следовательно, все величины $\langle (A^*)^m \mathbf{h}, \boldsymbol{\omega}_i \rangle$ при $m \in \mathbb{Z}$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$ должны иметь одинаковые знаки. Но это не выполняется, поскольку ограничение оператора A на M_{j_0} есть оператор вращения, отличный от единичного. Следовательно, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

В силу утверждения (ii) и свойства $(P2)$ каждому пространству M_j соответствует либо чисто вещественное λ, и тогда все вектора, содержащиеся в M_j, суть собственные, либо пара комплексно–сопряженных λ и $\overline{\lambda}$. Если λ не является положительным вещественным числом, то рассуждая так же, как и в случае с M_{j_0}, приходим к противоречию с тем, что все величины $\langle (A^*)^m \mathbf{h}, \boldsymbol{\omega}_i \rangle$ при $m \in \mathbb{Z}$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеют одинаковые знаки. Стало быть, все собственные значения оператора A суть положительные вещественные числа, а вектора $\boldsymbol{\omega}_i$ суть собственные. То есть $A(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Если характеристический многочлен оператора A приводим, то у оператора A есть нетривиальное инвариантное целочисленное подпространство. В случае, когда собственные значения оператора A попарно различны, это противоречит иррациональности конуса $\mathcal{C}$. Стало быть, если собственные значения оператора A попарно различны, то A — гиперболический оператор. $\square$

3.3.5 Трехмерный случай.

В этом пункте поясняется, как из теорем 3.6 и 3.7 в случае $n = 3$ получить теорему 3.9.

Импликация (1) $\implies$ (2) в теореме 3.9, так же, как и в теоремах 3.5 и 3.8, очевидна.

Пусть выполнено условие (2) теоремы 3.9. Тогда по теореме 3.6 существует оператор $\mathbf{A} \in \mathrm{Aff}_n(\mathbb{Z})$, осуществляющий нетривиальный сдвиг множества $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{St}_{\mathbf{v}_i}$ вдоль себя. Для доказательства (1) достаточно показать, что $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}_0$ и что собственные значения линейной составляющей оператора $\mathbf{A}$ попарно различны, а затем применить теорему 3.7.

Пусть $\mathbf{A} : \mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x}) + \mathbf{a}$, $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$, и A либо не удовлетворяет свойству $(P1)$, либо не удовлетворяет свойству $(P2)$, либо имеет два одинаковых собственных значения. Тогда, как легко видеть, все собственные значения оператора A должны быть равны по модулю 1, то есть в жордановом базисе матрица оператора A записывается одним из следующих способов:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 3)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$4)\ A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix};\quad 5)\ A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda^{-1}\end{pmatrix};$$

$$6)\ A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\varphi&\sin\varphi\\0&-\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix};\quad 7)\ A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\varphi&\sin\varphi\\0&-\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\mathbf{v}_m=\mathbf{A}^m(\mathbf{v}_0)=A^m(\mathbf{v}_0)+(A^{m-1}+\dots+A+E)\mathbf{a}$. Пользуясь этим соотношением, для каждого случая не сложно выписать асимптотику координат точек $\mathbf{v}_m$ и придти к противоречию либо с иррациональностью конуса $\mathcal{C}$, либо с тем фактом, что точки $\mathbf{v}_i$ лежат во внутренности конуса $\mathcal{C}$ и при $i\to\pm\infty$ стремятся к его границе. Единственная сложность этого рассуждения — перебор, поэтому его подробности мы опустим.

3.4 Переформулировка гипотезы Оппенгейма

Результаты параграфов 3.2, 3.3 позволяют переформулировать гипотезу Оппенгейма на языке полиэдров Клейна.

Теорема 3.3 позволяет переформулировать гипотезу Оппенгейма следующим образом.

Переформулировка гипотезы Оппенгейма. *Если $n \geqslant 3$ и парус Π соответствует n–мерной решетке $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ таков, что детерминанты его гиперграней и реберных звезд его вершин равномерно ограничены, то решетка Λ является алгебраической.*

Из теоремы Дирихле о единицах следует, что парус, соответствующий n–мерной алгебраической решетке, имеет периодическую комбинаторную структуру. Группа “периодов” изоморфна $\mathbb{Z}^{n-1}$, а соответствующая фундаментальная область ограничена. Таким образом, из гипотезы Оппенгейма вытекает следующее утверждение: если детерминанты гиперграней и реберных звезд вершин паруса равномерно ограничены, то этот парус имеет периодическую комбинаторную структуру.

Теорему 3.3 можно скомбинировать с теоремой 3.8 и получить еще одну переформулировку гипотезы Оппенгейма. Для этого переформулируем теорему 3.3 следующим образом.

Теорема 3.11. *Пусть $\langle \mathbf{L}_1, \cdot\rangle, \ldots, \langle \mathbf{L}_n, \cdot\rangle$ — n линейно независимых иррациональных линейных форм на $\mathbb{R}^n$ и*

$$\mathcal{C} = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \langle \mathbf{L}_i, \mathbf{x}\rangle \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n\big\}.$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(1) $\inf_{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\mathbf{0}\}} |\langle \mathbf{L}_1, \mathbf{x}\rangle \cdot \ldots \cdot \langle \mathbf{L}_n, \mathbf{x}\rangle| > 0$.

(2) *Детерминанты граней всех 2^n парусов, соответствующих решетке $\mathbb{Z}^n$ и конусу $\mathcal{C}$, равномерно ограничены (то есть ограничены константой, не зависящей от грани).*

(3) *Детерминанты граней и детерминанты реберных звезд вершин паруса Π, соответствующего решетке $\mathbb{Z}^n$ и конусу $\mathcal{C}$, равномерно ограничены.*

В силу следствия 29 из теоремы 3.10 условие (3) теоремы 3.11 равносильно тому, что у паруса Π конечное число различных аффинных типов полных звезд вершин (*полной звездой* вершины называется объединение всех граней, инцидентных этой вершине).

Комбинируя теорему 3.11 с теоремой 3.8, получаем следующую переформулировку гипотезы Оппенгейма:

Переформулировка гипотезы Оппенгейма. *Пусть* $\langle \mathbf{L}_1, \cdot\rangle, \ldots, \langle \mathbf{L}_n, \cdot\rangle$ — *n линейно независимых иррациональных линейных форм на* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ *и*

$$\mathcal{C} = \big\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \langle \mathbf{L}_i, \mathbf{x}\rangle \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n \big\}.$$

Пусть у паруса Π, *соответствующего решетке* $\mathbb{Z}^n$ *и конусу* $\mathcal{C}$, *конечное число различных аффинных типов полных звезд вершин. Тогда существует неограниченная в обе стороны (как подмножество* $\mathbb{R}^n$*)* $\mathfrak{A}_1$*–периодическая цепочка* $\{\mathbf{v}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *вершин паруса* Π.

Напомним, что для $n = 3$ (а это самый интересный случай, поскольку из трехмерной гипотезы Оппенгейма следует гипотеза Литтлвуда) $\mathfrak{A}_1$ можно заменить на $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{Z})$. Это позволяет переформулировать гипотезу Оппенгейма в случае $n = 3$ следующим образом.

Сначала определим граф $\mathcal{G}(\Pi)$: в качестве вершин возьмем множество пар $(F, \mathbf{v})$, где F — грань паруса Π и $\mathbf{v}$ — вершина F; две различные вершины $(F, \mathbf{v})$ и $(G, \mathbf{w})$ графа $\mathcal{G}(\Pi)$ соединяем ребром, если, во–первых, отрезок $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ является общим ребром граней F и G, и во–вторых, обход грани F от $\mathbf{v}$ к $\mathbf{w}$ является положительным (относительно внешней нормали к полиэдру Клейна). Очевидно, что граф $\mathcal{G}(\Pi)$ планарный и в любой его вершине сходятся ровно три ребра.

Теперь определим раскраску графа $\mathcal{G}(\Pi)$. Окрашиваются, в отличие от рассматриваемых выше раскрасок графов $\mathcal{G}_k(\Pi)$, и вершины, и ребра. Пусть $(F, \mathbf{v})$ и $(G, \mathbf{w})$ — произвольные вершины графа $\mathcal{G}(\Pi)$. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — соседние с $\mathbf{v}$ вершины грани F, а $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ — соседние с $\mathbf{w}$ вершины грани G. Пусть существует оператор из $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{Z})$, отображающий объединение граней паруса Π, инцидентных хотя бы одной из вершин $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{b}$ на объединение граней паруса Π, инцидентных хотя бы одной из вершин $\mathbf{c}$, $\mathbf{w}$ и $\mathbf{d}$. Тогда $(F, \mathbf{v})$ и $(G, \mathbf{w})$ окрашиваем в один и тот же цвет. Аналогично поступаем и с ребрами: пусть $((F_1, \mathbf{v}_1), (F_2, \mathbf{v}_2))$ и $((G_1, \mathbf{w}_1), (G_2, \mathbf{w}_2))$ — произвольные ребра графа $\mathcal{G}(\Pi)$. Пусть $\mathbf{a}_1$ — соседняя с $\mathbf{v}_1$ и отличная от $\mathbf{v}_2$ вершина грани F_1, $\mathbf{a}_2$ — соседняя с $\mathbf{v}_2$ и отличная от $\mathbf{v}_1$ вершина грани F_2, $\mathbf{b}_1$ — соседняя с $\mathbf{w}_1$ и отличная от $\mathbf{w}_2$ вершина грани G_1, $\mathbf{b}_2$ — соседняя с $\mathbf{w}_2$ и отличная от $\mathbf{w}_1$ вершина грани G_2. Пусть существует оператор из $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{Z})$, отображающий объединение граней паруса Π, инцидентных хотя бы одной из вершин $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{a}_2$ на объединение граней паруса Π, инцидентных хотя бы одной из вершин $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{b}_2$. Тогда $((F_1, \mathbf{v}_1), (F_2, \mathbf{v}_2))$ и $((G_1, \mathbf{w}_1), (G_2, \mathbf{w}_2))$ окрашиваем в один и тот же цвет.

Из теоремы 3.9 следует, что существование цепочки вершин паруса Π, образы которой в $\mathcal{G}_2(\Pi)$ и $\mathcal{G}_3(\Pi)$ имеют периодичные $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{Z})$–раскраски, равносильно существованию цепочки вершин графа $\mathcal{G}(\Pi)$, имеющую периодическую "вершинно–реберную" раскраску. Поэтому для $n = 3$ гипотезу Оппенгейма можно переформулировать так:

Переформулировка трехмерной гипотезы Оппенгейма. *Пусть* $\langle \mathbf{L}_1, \cdot\rangle$, $\langle \mathbf{L}_2, \cdot\rangle$, $\langle \mathbf{L}_3, \cdot\rangle$ *— линейно независимые иррациональные линейные формы на* $\mathbb{R}^3$ *и*

$$\mathcal{C} = \Big\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \langle \mathbf{L}_i, \mathbf{x}\rangle \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3 \Big\}.$$

Пусть раскраска графа $\mathcal{G}(\Pi)$ *паруса* Π, *соответствующего решетке* $\mathbb{Z}^3$ *и конусу* $\mathcal{C}$, *имеет лишь конечное число цветов. Тогда существует неограниченная в обе стороны (в естественной метрике графа* $\mathcal{G}(\Pi)$*) периодически раскрашенная цепочка вершин графа* $\mathcal{G}(\Pi)$.

3.5 Полиэдры Клейна и относительные минимумы

Данный, последний, параграф посвящен исследованию связи между двумя наиболее известными геометрическими обобщениями понятия цепной дроби. Одно из них — рассматривавшиеся в предыдущих параграфах полиэдры Клейна, а другое восходит к Г. Ф. Вороному (см. [Vo]) и Г. Минковскому (см. [Mi]). Дадим соответствующие определения. Будем обозначать через $\mathcal{L}^n$ пространство n–мерных унимодулярных решеток в $\mathbb{R}^n$. Если $\Lambda \in \mathcal{L}^n$, то полугруппу ненулевых точек решетки Λ с неотрицательными координатами будем обозначать $\mathfrak{S}(\Lambda)$.

Определение 3.13. Пусть $\Lambda \in \mathcal{L}^n$. Тогда выпуклая оболочка множества $\mathfrak{S}(\Lambda)$ называется *полиэдром Клейна* и обозначается K_Λ.

Определение 3.14. Пусть $\Lambda \in \mathcal{L}^n$. Тогда точка $\mathbf{x} \in \Lambda$ называется *относительным минимумом* решетки Λ, если не существует таких ненулевых точек $\mathbf{y} \in \Lambda$, что $|y_i| \leqslant |x_i|,\ i = 1, \ldots, n$ и $|y_1| + \ldots + |y_n| < |x_1| + \ldots + |x_n|$. Множество всех относительных минимумов решетки Λ будем обозначать $\mathfrak{M}(\Lambda)$.

Рассмотрим случай $n = 2$. Обозначим через $\Lambda^2_{1/2}$ домноженную на $\sqrt{2}$ минимальную (по включению) решетку, содержащую $\mathbb{Z}^2$ и точку $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Через $\mathcal{L}^2_{1/2}$ обозначим орбиту решетки $\Lambda^2_{1/2}$ при левом действии группы диагональных унимодулярных матриц 2×2. Общеизвестно следующее

Предложение 25. *Если $\Lambda \in \mathcal{L}^2 \backslash \mathcal{L}^2_{1/2}$, то множество вершин полиэдра Клейна совпадает с множеством $\mathfrak{M}(\Lambda) \cap \mathfrak{S}(\Lambda)$.*

В случае $n \geqslant 3$ аналогичное утверждение уже не верно. Хотя, как показал В. А. Быковский (см. [By]), вершины полиэдра Клейна всегда являются относительными минимумами. Кроме того, что в случае $n \geqslant 3$ относительные минимумы не обязаны быть вершинами полиэдра Клейна, ситуация усложняется еще тем, что в этом случае полиэдр Клейна может не быть обобщенным многогранником (то есть таким множеством, которое в пересечении с любым ограниченным многогранником дает многогранник). Полиэдр Клейна может вообще оказаться незамкнутым множеством[2]. Поэтому мы будем говорить не о вершинах, а об экстремальных точках полиэдра Клейна.

[2]Соответствующий пример и критерий того, когда полиэдр Клейна является обобщенным многогранником, см. в [Mou]

Определение 3.15. Пусть M — выпуклое множество. Точка $\mathbf{v} \in M$ называется *экстремальной точкой* множества M, если она не принадлежит ни одному открытому интервалу, содержащемуся в M. Множество всех экстремальных точек множества M будем обозначать $\mathrm{ext}(M)$.

Для каждой точки $\mathbf{v}$ решетки $\Lambda \in \mathcal{L}^n$ положим

$$P_{\mathbf{v}} = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 2v_i,\ i = 1, \ldots, n \,\}, \quad \mathfrak{S}_{\mathbf{v}} = \mathfrak{S}(\Lambda) \big\backslash (\{\mathbf{v}\} \cup \mathrm{ext}(P_{\mathbf{v}}))\,.$$

Лемма 3.19. *Пусть $\Lambda \in \mathcal{L}^n$ и $\mathbf{v} \in \mathfrak{S}(\Lambda)$. Тогда $\mathbf{v}$ является относительным минимумом в том и только том случае, если $2\mathbf{v} \notin (\mathfrak{S}_{\mathbf{v}} + \mathfrak{S}_{\mathbf{v}})$.*

Доказательство. Легко видеть, что точка $\mathbf{v} \in \mathfrak{S}(\Lambda)$ является относительным минимумом тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}(\Lambda) \cap P_{\mathbf{v}} \backslash \mathrm{ext}(P_{\mathbf{v}}) = \{\mathbf{v}\}$. Отсюда сразу следует, что если $\mathbf{v}$ — не относительный минимум, то в множестве $P_{\mathbf{v}} \backslash \mathrm{ext}(P_{\mathbf{v}})$ есть точка $\mathbf{u}$ решетки Λ, отличная от $\mathbf{v}$. В силу симметрии $P_{\mathbf{v}} \backslash \mathrm{ext}(P_{\mathbf{v}})$ относительно $\mathbf{v}$, точка $2\mathbf{v} - \mathbf{u}$ также лежит в $P_{\mathbf{v}} \backslash \mathrm{ext}(P_{\mathbf{v}})$. Стало быть, $2\mathbf{v} \in (\mathfrak{S}_{\mathbf{v}} + \mathfrak{S}_{\mathbf{v}})$. Обратно, пусть $2\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ для некоторых $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathfrak{S}_{\mathbf{v}}$. Тогда $0 \leqslant u_i \leqslant 2v_i$ и $0 \leqslant u_i \leqslant 2v_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in P_{\mathbf{v}} \backslash \mathrm{ext}(P_{\mathbf{v}})$ и $\mathbf{v}$ не является относительным минимумом. $\square$

Следствие 31. *Для любой решетки $\Lambda \in \mathcal{L}^n$ имеет место включение $\mathrm{ext}(K_\Lambda) \subseteq \mathfrak{M}(\Lambda)$.*

Доказательство. Если $\mathbf{v} \in \mathrm{ext}(K_\Lambda)$, то $\mathbf{v}$ не представима в виде полусуммы никаких двух точек из $\mathfrak{S}(\Lambda)$, отличных от $\mathbf{v}$. Стало быть, $2\mathbf{v} \notin (\mathfrak{S}_{\mathbf{v}} + \mathfrak{S}_{\mathbf{v}})$ и мы можем применить лемму 3.19. $\square$

Пусть теперь $n = 3$ и $\Lambda \in \mathcal{L}^3$. Рассмотрим произвольную треугольную грань F полиэдра K_Λ с вершинами $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Допустим, существует такое $k \in \mathbb{N}$, что

$$\mathbf{v} = \frac{k}{2k+1}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \frac{1}{2k+1}\mathbf{u}_3 \in \Lambda \tag{3.33}$$

и при этом

$$F \cap \Lambda = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \cup \left\{ \frac{m}{k}\mathbf{v} + \frac{k-m}{k}\mathbf{u}_3 \right\}_{m=1}^{k}. \tag{3.34}$$

Тогда из леммы 3.19 легко видеть, что $\mathbf{v}$ — относительный минимум. Следовательно, обозначив через $\Xi(K_\Lambda)$ множество точек $\mathbf{v}$, удовлетворяющих 3.33 и 3.34, получим

Следствие 32. *Для любой решетки $\Lambda \in \mathcal{L}^3$ имеет место включение $\Xi(K_\Lambda) \subset \mathfrak{M}(\Lambda)$.*

Таким образом, в случае $n = 3$ множества $\mathrm{ext}(K_\Lambda)$ и $\Xi(K_\Lambda)$ заведомо содержатся в $\mathfrak{M}(\Lambda)\cap\mathfrak{S}(\Lambda)$. Ниже мы покажем, что почти всегда выполнено и обратное включение (см. следствие из теоремы 3.13).

Обозначим через $\Lambda^3_{1/2}$ домноженную на $2^{1/3}$ минимальную (по включению) решетку, содержащую $\mathbb{Z}^3$ и точку $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Через $\mathcal{L}^3_{1/2}$ обозначим орбиту решетки $\Lambda^3_{1/2}$ при левом действии группы диагональных унимодулярных матриц 3×3. Множество внутренних точек полиэдра K_Λ будем обозначать $\mathrm{int}(K_\Lambda)$.

Теорема 3.12. *Если* $\Lambda\in\mathcal{L}^3\backslash\mathcal{L}^3_{1/2}$, *то* $\mathfrak{M}(\Lambda)\cap\mathrm{int}(K_\Lambda)=\varnothing$.

Доказательство. Предположим, $\mathbf{v}\in\mathrm{int}(K_\Lambda)$. Тогда, по теореме Штейница (см. [DGK], [St]), найдутся такие 6 точек из $\mathfrak{S}(\Lambda)$, что $\mathbf{v}$ лежит во внутренности их выпуклой оболочки. Легко видеть, что среди этих точек можно выбрать точки $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ таким образом, что

$$\mathbf{v}=\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\lambda_3\mathbf{u}_3$$

с неотрицательными λ_i, а симплекс $\mathrm{conv}(\mathbf{0},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$ пуст.

Если найдется такое i, что $\lambda_i>\frac{1}{2}$, то точка $\mathbf{u}_i$ обязана будет содержаться в $P_\mathbf{v}\backslash\mathrm{ext}(P_\mathbf{v})$ и тогда $\mathbf{v}$ не будет относительным минимумом. Поэтому мы можем считать, что $\lambda_i\leqslant\frac{1}{2}$, $i=1,2,3$. С другой стороны, из теоремы Уайта о ширине пустого целочисленного симплекса (см. [Wh], [G1]) следует, что с точностью до перестановки индексов, $\lambda_1+\lambda_2=1$. Следовательно, $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$. Но тогда из пустоты симплекса $\mathrm{conv}(\mathbf{0},\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$ легко следует, что $\lambda_3=\frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{u}_1}{2}+\frac{\mathbf{u}_2}{2}+\frac{\mathbf{u}_3}{2},$$

откуда видим, что $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\in P_\mathbf{v}$. Стало быть, $\mathbf{v}$ будет относительным минимумом лишь в том случае, когда $\mathbf{u}_i$ лежат на координатных осях, то есть когда Λ лежит в $\mathcal{L}_{1/2}$. □

Итак, если $\Lambda\in\mathcal{L}^3\backslash\mathcal{L}^3_{1/2}$, то все относительные минимумы с неотрицательными координатами лежат на поверхности полиэдра Клейна. Для $n\geqslant 4$ подобное утверждение неверно. Более того, имеет место следующее

Предложение 26. *Множество решеток* $\Lambda\in\mathcal{L}^4$, *для которых* $\mathfrak{M}(\Lambda)\cap\mathrm{int}(K_\Lambda)\neq\varnothing$, *имеет положительную меру.*

Доказательство. Обозначим через $\Lambda^4_{1/3}$ домноженную на $3^{1/4}$ минимальную (по включению) решетку, содержащую $\mathbb{Z}^4$ и точку $\mathbf{a}=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. Вектора стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ обозначим $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4$. Легко видеть, что

$$\Lambda\cap P_\mathbf{a}=\{\mathbf{0},\mathbf{a},2\mathbf{a}\}$$

и при этом $\mathbf{a}$ содержится во внутренности полиэдра Клейна, соответствующего решетке $\Lambda^4_{1/3}$. Для $\varepsilon > 0$ положим

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \Big\{ A = (A_{ij}) \in SL_4(\mathbb{R}) \ \Big| \ 0 \leqslant A_{ij} \leqslant \varepsilon \\ \text{для всех } i \neq j \text{ и } |A_{ii} - 1| \leqslant \varepsilon \text{ для всех } i \Big\}.$$

Если ε достаточно мало, то для любого $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$, во–первых, будет выполняться соотношение

$$A(\Lambda^4_{1/3}) \cap P_{A(\mathbf{a})} = \{\mathbf{0}, A(\mathbf{a}), 2A(\mathbf{a})\},$$

откуда, в силу леммы 3.19, видим, что $A(\mathbf{a}) \in \mathfrak{M}(A(\Lambda^4_{1/3}))$, а во–вторых, точки $A(\mathbf{e}_1), A(\mathbf{e}_2), A(\mathbf{e}_3)$ и $A(\mathbf{e}_4)$ будут иметь неотрицательные координаты и, стало быть, $A(\mathbf{a})$ будет лежать во внутренности полиэдра Клейна, соответствующего решетке $A(\Lambda^4_{1/3})$. Остается заметить, что множество $\mathcal{A}_\varepsilon(\Lambda^4_{1/3})$ имеет положительную меру в $\mathcal{L}^4$ при $\varepsilon > 0$. $\square$

Теорема 3.13. *Пусть* $\Lambda \in \mathcal{L}^3$, $\mathbf{v} \in \mathfrak{M}(\Lambda) \cap \mathfrak{S}(\Lambda)$ *и* $\operatorname{ext}(P_\mathbf{v}) \cap \Lambda = \{\mathbf{0}, 2\mathbf{v}\}$. *Тогда*

$$\mathbf{v} \in \operatorname{ext}(K_\Lambda) \cup \Xi(K_\Lambda).$$

Следствие. *Если на всех координатных осях или хотя бы на одной координатной плоскости нет ненулевых точек решетки* $\Lambda \in \mathcal{L}^3$, *то*

$$\mathfrak{M}(\Lambda) \cap \mathfrak{S}(\Lambda) = \operatorname{ext}(K_\Lambda) \cup \Xi(K_\Lambda).$$

Для доказательства теоремы 3.13 нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.20. *Пусть* $\Lambda \in \mathcal{L}^3$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \Lambda$ *— линейно независимы и* $\partial(\operatorname{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)) \cap \Lambda = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. *Пусть* $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \lambda_3\mathbf{u}_3 \in \Lambda$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, *и пусть к тому же*

$$\nexists\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \Lambda \cap \operatorname{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) : \quad \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \quad \text{и} \quad 2\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2. \tag{3.35}$$

Тогда $\lambda_2 \geqslant 1/3$.

Доказательство. Нужно доказать, что $\mathbf{v}$ не содержится в области

$$\Omega = \Big\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \ \Big| \ 0 < \mu_3 \leqslant \mu_2 < 1/3 \Big\}.$$

Положим

$$
\begin{aligned}
&\Omega_1 = \Big\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \;\Big|\; \mu_1 \geqslant 1/2,\ \mu_2 > 0,\ \mu_3 > 0 \Big\},\\
&\mathbf{v}_1^{(1)} = \mathbf{u}_1\,,\\
&\mathbf{v}_2^{(1)} = 2\mathbf{v} - \mathbf{u}_1 = (2\lambda_1 - 1)\mathbf{u}_1 + 2\lambda_2\mathbf{u}_2 + 2\lambda_3\mathbf{u}_3\,,\\[2ex]
&\Omega_2 = \Big\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \;\Big|\; \mu_1 > \mu_2 \geqslant \mu_3 \geqslant 1/4 \Big\},\\
&\mathbf{v}_1^{(2)} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - 2\mathbf{v} = \sum (1 - 2\lambda_i)\mathbf{u}_i\,,\\
&\mathbf{v}_2^{(2)} = 4\mathbf{v} - \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = \sum (4\lambda_i - 1)\mathbf{u}_i\,,\\[2ex]
&\Omega_3 = \Big\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \;\Big|\; 2/5 \leqslant \mu_1 \leqslant 3/5,\ 1/5 \leqslant \mu_2 \leqslant 1/3,\ 1/5 \leqslant \mu_3 \leqslant 1/3 \Big\},\\
&\mathbf{v}_1^{(3)} = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - 3\mathbf{v} = (2 - 3\lambda_1)\mathbf{u}_1 + (1 - 3\lambda_2)\mathbf{u}_2 + (1 - 3\lambda_3)\mathbf{u}_3\,,\\
&\mathbf{v}_2^{(3)} = 5\mathbf{v} - 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = (5\lambda_1 - 2)\mathbf{u}_1 + (5\lambda_2 - 1)\mathbf{u}_2 + (5\lambda_3 - 1)\mathbf{u}_3\,,\\[2ex]
&\Omega_4 = \Big\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \;\Big|\; 3/7 \leqslant \mu_1 \leqslant 4/7,\ 2/7 \leqslant \mu_2 \leqslant 2/5,\ 1/7 \leqslant \mu_3 \leqslant 1/5 \Big\},\\
&\mathbf{v}_1^{(4)} = 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - 5\mathbf{v} = (3 - 5\lambda_1)\mathbf{u}_1 + (2 - 5\lambda_2)\mathbf{u}_2 + (1 - 5\lambda_3)\mathbf{u}_3\,,\\
&\mathbf{v}_2^{(4)} = 7\mathbf{v} - 3\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = (7\lambda_1 - 3)\mathbf{u}_1 + (7\lambda_2 - 2)\mathbf{u}_2 + (7\lambda_3 - 1)\mathbf{u}_3\,.
\end{aligned}
$$

С одной стороны, $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^4 \Omega_i$. С другой, если $\mathbf{v} \in \Omega_i$, то $\mathbf{v}_1^{(i)}, \mathbf{v}_2^{(i)} \in \operatorname{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ и $\mathbf{v}_1^{(i)} \neq \mathbf{v}_2^{(i)}$. И при этом, для любого $i \in \{1,2,3,4\}$ выполняется $2\mathbf{v} = \mathbf{v}_1^{(i)} + \mathbf{v}_2^{(i)}$. Следовательно, $\mathbf{v} \notin \Omega$ и $\lambda_2 \geqslant 1/3$. $\square$

Лемма 3.21. *Пусть* $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ *удовлетворяют условию леммы 3.20. Тогда*

$$\Big\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \;\Big|\; 0 \leqslant \mu_2 \leqslant 2\lambda_2,\ 0 \leqslant \mu_3 \leqslant 2\lambda_3 \Big\} \cap \Lambda = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}, 2\mathbf{v} - \mathbf{u}_1\}.$$

Доказательство. Обозначим $\Delta = \operatorname{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ и

$$Q = \Big\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \;\Big|\; 0 \leqslant \mu_2 \leqslant 2\lambda_2,\ 0 \leqslant \mu_3 \leqslant 2\lambda_3 \Big\}.$$

Из условия 3.35 следует, что $\Lambda \cap \Delta \cap (2\mathbf{v} - \Delta) = \{\mathbf{v}\}$. Стало быть, $Q \cap \Lambda \cap \Delta \cap (2\mathbf{v} - \Delta) = \{\mathbf{v}\}$. Далее, $Q \setminus (\Delta \cap (2\mathbf{v} - \Delta)) = \Delta' \cup (2\mathbf{v} - \Delta')$, где

$$\Delta' = \Big\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \;\Big|\; 2\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant 1,\ \mu_2 \geqslant 0,\ \mu_3 \geqslant 0 \Big\}.$$

Поскольку $\lambda_1 \geqslant 1/3$ (т.к. $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$), то имеет место включение $\Delta' + \mathbf{v} - \mathbf{u}_1 \subset \Delta \cap (2\mathbf{v} - \Delta)$, следовательно, $\Delta' \cap \Lambda = \mathbf{u}_1$. Остается заметить, что $2\mathbf{v} - \Delta'$ симметрично Δ' относительно точки $\mathbf{v}$ и, стало быть, $\Lambda \cap (2\mathbf{v} - \Delta') = 2\mathbf{v} - \mathbf{u}_1$. □

Лемма 3.22. *Пусть* $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ *удовлетворяют условию леммы 3.20. Тогда треугольник* $\mathrm{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v})$ *пуст.*

Доказательство. Положим

$$Q = \left\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \;\middle|\; 0 \leqslant \mu_2 \leqslant 2\lambda_2,\ 0 \leqslant \mu_3 \leqslant 2\lambda_3 \right\}.$$

По лемме 3.21, $Q \cap \Lambda = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}, 2\mathbf{v} - \mathbf{u}_1\}$. При этом, $\lambda_2 \geqslant 1/3$, как следует из леммы 3.20. Стало быть, в слое

$$\left\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \;\middle|\; 0 \leqslant \mu_2 \leqslant 1,\ \lambda_3 \leqslant \mu_3 \leqslant 2\lambda_3 \right\}$$

нет точек решетки Λ, за исключением точек $\mathbf{v}$ и $2\mathbf{v} - \mathbf{u}_1$, поскольку этот слой содержится в множестве $Q \cup (\mathbf{v} + Q)$. Отсюда видим, что в слое

$$\left\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \;\middle|\; 0 \leqslant \mu_2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant \mu_3 \leqslant \lambda_3 \right\}$$

также нет точек решетки Λ, за исключением точек $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}$. Следовательно, треугольник $\mathrm{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v})$ пуст. □

Лемма 3.23. *Пусть* $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ *удовлетворяют условию леммы 3.20. Тогда существует такое* $k \in \mathbb{N}$, *что*

$$\mathbf{v} = \frac{k}{2k+1}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \frac{1}{2k+1}\mathbf{u}_3.$$

Доказательство. Из леммы 3.22 следует, что треугольник $\mathrm{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v})$ является базисным для решетки $\Lambda \cap \mathrm{aff}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. Отсюда, учитывая условие 3.35, легко видеть, что точка $\mathbf{v}$ обязана лежать на медиане треугольника $\mathrm{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. □

Лемма 3.24. *Пусть* $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ *удовлетворяют условию леммы 3.20. Пусть*

$$\mathbf{w} \in \Lambda \cap \mathrm{aff}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \setminus \mathrm{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3).$$

Тогда найдутся такие точки $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathrm{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{w})$, *что* $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ *и* $2\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

Доказательство. По лемме 3.23, точка $\mathbf{v}$ имеет вид

$$\mathbf{v} = \frac{k}{2k+1}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \frac{1}{2k+1}\mathbf{u}_3$$

для некоторого $k \in \mathbb{N}$. И при этом треугольник $\operatorname{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v})$ является базисным для решетки $\Lambda \cap \operatorname{aff}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ (см. лемму 3.22). Отсюда нетрудно видеть, что как минимум одна из точек $2\mathbf{v}-\mathbf{u}_1$, $2\mathbf{v}-\mathbf{u}_2$, $\frac{k}{2k+1}(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)-\frac{1}{2k+1}\mathbf{u}_3$ лежит в $\operatorname{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{w})$. $\square$

Приступим к непосредственному доказательству теоремы 3.13.

Доказательство теоремы 3.13. Пусть $\mathbf{v} \in \mathfrak{M}(\mathit{\Lambda}) \cap \mathfrak{S}(\mathit{\Lambda}) \setminus \operatorname{ext}(K_\Lambda)$. Покажем, что $\mathbf{v} \in \Xi(K_\Lambda)$. Из теоремы 3.12 следует, что $\mathbf{v} \in \partial K$. При этом $\mathbf{v} \notin \operatorname{ext}(K)$, стало быть, найдутся точки $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2 \in \partial K$, отличные от $\mathbf{v}$, такие, что $2\mathbf{v} = \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$. По теореме Каратеодори (см. [DGK]), каждая из точек $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ представима в виде выпуклой комбинации (т.е. с положительными коэффициентами, сумма которых равна 1) не более, чем четырех точек из $\mathfrak{S}(\mathit{\Lambda})$. Следовательно, точка $\mathbf{v}$ представима в виде выпуклой комбинации не более, чем восьми точек из $\mathfrak{S}(\mathit{\Lambda})$, отличных от $\mathbf{v}$. Поскольку $\mathbf{v} \in \partial K$, то все эти точки обязаны лежать в некоторой плоскости, опорной к K. Значит, среди них найдутся точки $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ такие, что $\mathbf{v} \in \operatorname{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. Из леммы 3.19 и того, что $\operatorname{ext}(P_\mathbf{v}) \cap \Lambda = \{\mathbf{0}, 2\mathbf{v}\}$, следует, что треугольник $\Delta = \operatorname{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ невырожден и точка $\mathbf{v}$ лежит в его внутренности. Стало быть, мы можем считать, не ограничивая общности, что $\partial\Delta \cap \Lambda = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Пусть

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}_1}{2} + \frac{\mathbf{u}_2}{2} + \frac{\mathbf{u}_3}{2}, \qquad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

В силу леммы 3.19, точка $\mathbf{v}$ не представима в виде полусуммы никаких двух различных точек $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ из $\Delta \cap \Lambda$, то есть для $\mathbf{v}$ выполнено условие 3.35. Значит, по лемме 3.23, точка $\mathbf{v}$ удовлетворяет условию 3.33. В силу леммы 3.24 и леммы 3.19, условие 3.34 также выполняется. Таким образом, $\mathbf{v} \in \Xi(K)$. $\square$

Список литературы

[Ap] A. Apfelbeck *A contribution to Khintchine's principle of transfer.* Czech. Math. J., **1**:3 (1951), 119–147.

[Ar1] V. I. Arnold *Higher dimensional continued fractions.* Regular and Chaotic Dynamics, **3**:3 (1998).

[Ar2] V. I. Arnold *Preface.* Amer. Math. Soc. Transl., **197**:2 (1999), ix–xii.

[Ar3] V. I. Arnold *Continued fractions.* Moscow: Moscow Center of Continuous Mathematical Education (2002).

[AM] R. K. Akhunzhanov, N. G. Moshchevitin *Вектора заданного диофантового типа.* Мат. заметки, **80**:3 (2006), 318–328.

[Ba] K. Ball *Volumes of sections of cubes and related problems.* Geometric aspects of functional analysis (1987–88), Lect. Notes in Math., **1376** (1989), 251–260.

[BDV] V. Beresnevich, H. Dickinson, S. L. Velani *Sets of "exact logarithmic" order in the theory of Diophantine approximation.* Math. Annalen **321** (2001), 253–273.

[BF] T. Bonnesen, W. Fenchel *Theorie der konvexen Körper.* Berlin: Springer (1934).

[BSh] З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич *Теория чисел.* Москва, "Наука" (1964).

[Bu1] Y. Bugeaud *Sets of exact approximation order by rational numbers.* Math. Ann., **327** (2003), 171–190.

[Bu2] Y. Bugeaud, *Sets of exact approximation order by rational numbers II.* Univ. Disrtib. Theory, **3** (2008), 9–20.

[Bu3] Y. Bugeaud *Multiplicative Diophantine exponents.* "Dynamical systems and Diophantine Approximation", Proceedings of the conference held at the Institut Henri Poincaré, Société mathématique de France.

[BL] Y. Bugeaud, M. Laurent *On transfer inequalities in Diophantine approximations II.* Math. Z., 265:2 (2010), 249–262.

[By] В. А. Быковский *Относительные минимумы решеток и вершины многогранников Клейна.* Функ. анализ и его прил., **40**:1 (2006), 69–71.

[C] J. W. S. Cassels *An introduction to Diophantine approximation.* Cambridge University Press (1957).

[CS] J. W. S. Cassels, H. P. F. Swinnerton-Dyer *On the product of three homogeneous linear forms and indefinite ternary quadratic forms.* Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 248 (1955), 73–96.

[CF] T. W. Cusick, M. E. Flahive, *The Markoff and Lagrange spectra.* AMS, Providence, Math. surveys and monographs, **30**, 1989.

[DGK] Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли *Теорема Хелли и ее применения.* Москва, "Мир" (1968).

[Dy] F. J. Dyson *On simultaneous Diophantine approximations.* Proc. London Math. Soc., (2) 49 (1947), 409–420.

[EGH] P. Erdös, P. Gruber, J. Hammer *Lattice Points.* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **39**. Longman Scientific & Technical, Harlow (1989).

[Ew] G. Ewald *Combinatorial convexity and algebraic geometry.* Sringer–Verlag New York, Inc. (1996).

[GL] P. M. Gruber, C. G. Lekkerkerker *Geometry of numbers.* North-Holland Math. Library, **37**, Elsevier (1987).

[Gn] B. Grünbaum *Convex polytopes.* London, New York, Sydney: Interscience Publ. (1967).

[Ha] M. Hall Jr., *On the sum and product of continued fractions.* Ann. of Math. (2), **48** (1948), 966–993.

[HP] W. V. D. Hodge, D. Pedoe *Methods of algebraic geometry.* Cambridge (1947).

[J1] V. Jarnik, *Uber die simultanen diophantischen Approximationen.* Math. Zeitschr. **33** (1931), 505–543.

[J2] V. Jarník *Über einen Satz von A. Khintchine.* Prace Mat. Fiz, **43** (1936), 151–166.

[J3] V. Jarník *Über einen Satz von A. Khintchine, 2.* Acta Arithm., **2** (1936), 1–22.

[J4] V. JARNÍK *Zum Khintchineschen "Übertragungssatz".* Trav. Inst. Math. Tbilissi, **3** (1938), 193–212.

[J5] V. JARNÍK *Contribution à la théorie des approximations diophantiennes linéaires et homogènes.* Czechoslovak Math. J., 4 (1954), 330–353 (in Russian, French summary).

[J6] V. JARNIK, *Un Theoreme d'existence pour Les Approximations Diophantiennes.* L'Enseignement mathematiqe, **25** (1969), 171–175.

[Kh1] A. YA. KHINTCHINE *Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen.* Rend. Sirc. Mat. Palermo, **50** (1926), 170–195.

[Kh2] A. YA. KHINTCHINE *On some applications of the method of the additional variable.* UMN, **3**:6(28) (1948), 188–200.

[Kl] F. KLEIN *Uber eine geometrische Auffassung der gewohnlichen Kettenbruchentwichlung.* Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, **3** (1895), 357–359.

[Ko1] E. KORKINA *La périodecité des fractions continues multidimensionnelles.* C. R. Acad. Sci. Paris, **319**, Série I (1994), 777–780.

[Ko2] E. I. KORKINA *Two–dimensional continued fractions. The simplest examples.* Proc. Steklov Math. Inst. RAS, **209** (1995), 143–166.

[Lch1] G. LACHAUD *Polyèdre d'Arnol'd et voile d'un cône simplicial: analogues du théorème de Lagrange.* C. R. Acad. Sci. Paris, **317**, Série I (1993), 711–716.

[Lch2] G. LACHAUD *Sails and Klein Polyhedra.* Contemporary Mathematics, **210** (1998), 373–385.

[Lch3] G. LACHAUD *Voiles et Polyèdres de Klein.* Act. Sci. Ind., Hermann (2002).

[Lr1] M. LAURENT *On transfer inequalities in Diophantine Approximation.* В сборнике "Analytic Number Theory, Essays in Honour of Klaus Roth" (под ред. W. W. L. Chen, W. T. Gowers, H. Halberstam, W. M. Schmidt и R. C. Vaughan). Cambridge University Press (2009), 306–314.

[Lr2] M. LAURENT *Exponents of Diophantine approximation in dimension two.* Canad. J. Math., **61** (2009), 165–189.

[MSh] P. McMullen, G. C. Shephard *Convex polytopes and the upper bound conjecture.* Cambridge (GB): Cambridge University Press (1971).

[Ma1] K. Mahler *Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen.* Čas. Pešt. Mat. Fys., **68** (1939), 85–92.

[Ma2] K. Mahler *On a theorem of Dyson.* Mat. sbornik, **26 (68)**:3 (1950), 457–462.

[Ma3] K. Mahler *On compound convex bodies (I).* Proc. London Math. Soc., (3) 5 (1955), 358–379.

[Mi] H. Minkowski *Généralisation de la théorie des fractions continues.* Ann. Sci. de l'École Normale Supérieure, **13**:2, 41–60.

[Mos1] N. G. Moshchevitin, *On simultaneous Diophantine approximations. Vectors of given Diophantine type.* Mathematical Notes, **61**:5 (1997), 590–599.

[Mos2] N. G. Moshchevitin *Khintchine's singular systems and their applications.* UMN (to appear), preprint available at arXiv:0912.4503v1 (2009).

[Mou] J.–O. Moussafir *Convex hulls of integral points.* Zapiski nauch. sem. POMI, **256** (2000).

[Sch1] W. M. Schmidt *On heights of algebraic subspaces and diophantine approximations.* Annals of Math. **85**:3 (1967), 430–472.

[Sch2] W. M. Schmidt *Diophantine Approximation.* Lecture Notes in Math. **785**, Springer-Verlag (1980).

[SchS1] W. M. Schmidt, L. Summerer *Parametric geometry of numbers and applications.* Acta Arithmetica, **140**:1 (2009), 67–91.

[SchS2] W. M. Schmidt, L. Summerer *Diophantine approximation and parametric geometry of numbers.* Monat. Math., (2012), DOI: 10.1007/s00605-012-0391-z.

[SchW] W. M. Schmidt, Y. Wang *A note on a transference theorem of linear forms.* Sci. Sinica, **22**:3 (1979), 276–280.

[Sk1] Б. Ф. Скубенко *Минимумы разложимой кубической формы от трех переменных.* Зап. науч. сем. ЛОМИ, **168** (1988).

[Sk2] Б. Ф. Скубенко *Минимумы разложимых форм степени n от n переменных при $n \geqslant 3$.* Зап. науч. сем. ЛОМИ, **183** (1990).

[St] E. Steinitz *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, I; II; III.* J. Reine Angew. Math., **143** (1913), 128–175; **144** (1914), 1–40; **146** (1916), 1–52.

[Ts] H. Tsuchihashi *Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities.* Tohoku Math. Journal, **35** (1983), 607–639.

[Va] J. D. Vaaler *A geometric inequality with applications to linear forms.* Pacif. J. Math., **83**:2 (1979), 543–553.

[Vo] Г. Ф. Вороной *Собрание сочинений в трех томах.* Киев, изд-во АН УССР, том 1 (1952).

[Wal] M. Waldschmidt *Report on some recent advances in Diophantine approximation.* Springer Verlag, Special volume in honor of Serge Lang (to appear), preprint available at arXiv:0908.3973v1 (2009).

[WYu] Y. Wang, K. Yu *A note on some metrical theorems in Diophantine approximation.* Chinese Ann. Math., **2** (1981), 1–12.

[Wh] White G. K. *Lattice tetrahedra.* Canadian J. of Math., **16** (1964), 389–396.

[G1] О. Н. Герман *Паруса и базисы Гильберта.* Труды МИРАН, **239** (2002) 98–105.

[G2] О. Н. Герман, *Асимптотические направления для наилучших приближений n-мерной линнейной формы.* Мат. заметки, **75**:1 (2004), 55–70.

[G3] О. Н. Герман *Паруса и норменные минимумы решеток.* Мат. Сборник, **196**:3 (2005), 31–60.

[G4] О. Н. Герман *Полиэдры Клейна и норменные минимумы решеток.* ДАН, Серия матем., **406**:3 (2006), 38–41.

[G5] О. Н. Герман *Полиэдры Клейна и относительные минимумы решеток,* Мат. заметки **79**:4 (2006) 546–552.

[G6] O. N. German *Klein polyhedra and lattices with positive norm minima,* Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, **19** (2007), 157–190.

[G7] О. Н. Герман, Е. Л. Лакштанов *О многомерном обобщении теоремы Лагранжа для цепных дробей*, Известия РАН. Сер. матем., **72**:1 (2008), 51–66.

[G8] O. N. German, N. G. Moshchevitin *Linear forms of a given Diophantine type*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, **22** (2010), 383–396

[G9] O. N. German *Transference inequalities for multiplicative Diophantine exponents*, Труды МИРАН, **275** (2011), 216–228

[G10] O. N. German *On Diophantine exponents and Khintchine's transference principle.* Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory, **2**:2 (2012), 22–51

[G11] O. N. German *Intermediate Diophantine exponents and parametric geometry of numbers.* Acta Arithmetica, **154** (2012), 79–101

[G12] O. N. German, N. G. Moshchevitin *A simple proof of Schmidt-Summerer's inequality.* Monat. Math., **170** (2013), 361–370.