На правах рукописи
УДК 517.55 + 517.958

Домрин Андрей Викторович

ГОЛОМОРФНЫЕ РЕШЕНИЯ СОЛИТОННЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

автореферат диссертации
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2013

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО "Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова".

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Гриневич Петр Георгиевич, старший научный сотрудник ФГБУН Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН

доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН Немировский Стефан Юрьевич, главный научный сотрудник отдела комплексного анализа ФГБУН Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

доктор физико-математических наук, профессор Новокшенов Виктор Юрьевич, главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений ФГБУН Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН

Ведущая организация:

ФГБУН Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

Защита диссертации состоится 26 сентября 2013 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д.002.022.01 при МИАН по адресу: 119991, Москва, ул. Губкина, д. 8, 9-ый этаж, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН.

Автореферат разослан   августа 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.002.022.01 при МИАН
доктор физико-математических
наук, профессор   В.А.Ватутин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Первым результатом общей теории дифференциальных уравнений с частными производными была теорема Коши–Ковалевской[1],[2], которую в нужной нам общности можно сформулировать так. *Пусть функция P голоморфна по (x,t) в окрестности точки $(x_0,t_0)\in\mathbb{C}^2$ и полиномиальна по остальным своим аргументам. Тогда задача Коши*

$$\partial_t^m u = P(x,t,\{\partial_x^k\partial_t^l u\}_{k+l\leqslant m,(k,l)\neq(0,m)});$$
$$\partial_t^j u(x,t_0)=\varphi_j(x),\quad 0\leqslant j\leqslant m-1,$$

имеет единственное локальное голоморфное решение $u(x,t)$ в окрестности точки (x_0,t_0) для любых голоморфных ростков $\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_{m-1}\in\mathcal{O}(x_0)$. Объясняя необходимость условий $k+l\leqslant m$, $(k,l)\neq(0,m)$, С. В. Ковалевская[2] установила следующую теорему о принудительном аналитическом продолжении решений уравнения теплопроводности. *Всякое решение $u\in\mathcal{O}(D)$ уравнения $u_t=u_{xx}$ на произвольном бидиске $D=\{(x,t)\in\mathbb{C}^2 \mid |x-x_0|<\varepsilon_1,\ |t-t_0|<\varepsilon_2\}$ допускает аналитическое продолжение до решения $\widetilde{u}\in\mathcal{O}(S)$ того же уравнения на полосе $S=\{(x,t)\in\mathbb{C}^2 \mid |t-t_0|<\varepsilon_2\}$.* Иными словами, любое локальное голоморфное решение $u(x,t)$ продолжается до целой функции от x при каждом допустимом значении t. Из результатов последующих работ Г. С. Салехова[3], К. Чисельмана[4] и М. Цернера[5] вытекает, что это же свойство имеет место и для всех локальных голоморфных решений $u(x,t)$ следующих все более широких классов уравнений:

$$\partial_t^p u = \partial_x^m u + \sum_{j=0}^{m-1} c_j\partial_x^j u, \tag{1}$$

$$\partial_x^m u = \sum_{k+l<m} c_{kl}\partial_x^k\partial_t^l u, \tag{2}$$

$$\partial_x^m u = \sum_{k+l<m} a_{kl}(x,t)\partial_x^k\partial_t^l u, \tag{3}$$

[1] A.-L. Cauchy, Mémoire sur les systèmes d'equations aux dérivées partielles d'ordre quelconque et sur leur réduction à systèmes d'equations linéaires du premier ordre // C. R. Acad. Sci. Paris, 40(1842), 131–138.

[2] S. von Kowalevsky, Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen // J. reine angew. Math., 80(1875), 1–32.

[3] Г. С. Салехов, О задаче Коши–Ковалевской для одного класса линейных уравнений с частными производными в области сколь угодно гладких функций // Изв. Акад. Наук СССР Сер. матем., 14 (1950), 355–366.

[4] C. Kiselman, Prolongement des solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants // Bull. Soc. Math. France, 97(1969), 329–356.

[5] M. Zerner, Domaines d'holomorphie des fonctions vérifiânt une équation aux dérivées partielles // C. R. Acad. Sci. Paris 272(1971), 1646–1648.

где $m \geqslant 2$ и $1 \leqslant p < m$ — целые числа, $c_j, c_{kl} \in \mathbb{C}$ — постоянные коэффициенты, а функции $a_{kl} \in \mathcal{O}(\{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t-t_0| < \delta\})$ являются целыми по x и голоморфными по t в окрестности точки $t_0 \in \mathbb{C}$. Современное состояние вопроса об аналитическом продолжении голоморфных решений *линейных* уравнений с частными производными отражено в известной монографии Л. Хёрмандера[6] и статьях Г. М. Хенкина[7] и С. Рига[8].

Попытки обобщить эти результаты и подходы на *нелинейные* уравнения и системы до сих пор приводили лишь к частичным и разрозненным результатам (см., например,[9],[10] и ссылки там). С другой стороны, сейчас активно изучается весьма близкое к принудительному аналитическому продолжению явление диссипативного сглаживания (регуляризующий эффект дисперсивных эволюционных уравнений математической физики)[11],[12], но там на решение $u(x,t)$ всегда налагаются некоторые глобальные ограничения по x при $t = t_0 \in \mathbb{R}$, а заключения об аналитическом продолжении в ту или иную окрестность вещественной оси $\mathbb{R}^1_x \subset \mathbb{C}^1_x$ делаются только для вещественных $t > t_0$. Немногочисленные исключения[13],[14] из этого правила также не дают никакой информации об аналитическом продолжении произвольных локальных голоморфных (по x и t) решений.

Между тем, получение такой информации хотя бы для солитонных уравнений (параболического типа, ибо в гиперболическом случае вопрос тривиален по теореме Коши–Ковалевской) уже давно имеет статус мечты[15], привлека-

[6]Л. Хёрмандер, Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, т. I, Москва, Мир, 1986. См. особенно § 9.4.

[7]G. M. Henkin, Jean Leray and several complex variables // in: J. Leray, Oeuvres Scientifiques, vol. III, Berlin and Paris, Springer and SMF, 1998, 1–31.

[8]S. Rigat, Application of functional calculus to complex Cauchy problems // Comput. Meth. Funct. Theory, 7(2007), 509–526.

[9]H. Tahara, On the singularities of solutions of nonlinear partial differential equations in the complex domain // Microlocal analysis and asymptotic analysis (T. Kawai, ed.), RIMS Kôkyûroku 1397(2004), 102–111.

[10]H. Hannach, A. A. Himonas and G. Petronilho, Gevrey regularity in time for generalized KdV type equations // Contemp. Math. 400(2006), 117–127.

[11]F. Linares and G. Ponce, Introduction to nonlinear dispersive equations, New York, Springer, 2009.

[12]A. Rybkin, The Hirota τ-function and well-posedness of the Korteweg–de Vries equation with an arbitrary step-like initial profile decaying on the right half-line // Nonlinearity 24(2011), 2953–2990.

[13]J. B. McLeod and P. J. Olver, The connection between partial differential equations soluble by inverse scattering and ordinary differential equations of Painlevé type // SIAM J. Math. Anal. 14(1983), 488–506.

[14]N. Hayashi and K. Kato, Regularity in time of solutions to nonlinear Schrödinger equations // J. Funct. Anal. 128(1995), 253–277.

[15]M. D. Kruskal, N. Joshi and R. Halburd, Analytic and asymptotic methods for nonlinear singularity analysis : a review and extension of tests for the Painlevé property // Lect. Notes Phys. 638(2004), 175–208. См. особенно стр. 195.

тельной, но недоступной из-за технических трудностей. Поясним, что такое солитонные уравнения, на следующих примерах:

$$u_t = au_{xxx} + buu_x, \qquad a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{4}$$

$$u_{tt} = au_{xxxx} + buu_{xx} + bu_x^2, \qquad a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{5}$$

$$iu_t = au_{xx} + bu|u|^2, \qquad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{6}$$

причем в (6) под $|u|^2$ понимается $u(x,t)\overline{u(\overline{x},\overline{t})}$. Метод обратной задачи рассеяния был впервые предложен именно для уравнения Кортевега–де Фриза (4), описывающего (в случае вещественных a, b) длинные волны на мелкой воде. К. Гарднер, Дж. Грин, М. Крускал и Р. Миура[16] заметили, что когда потенциал $u(x,t)$ эволюционирует согласно (4), то эволюция его данных рассеяния (некоторых спектральных характеристик оператора $L = \partial_x^2 + u(x,t)$ на пространстве $L^2(\mathbb{R}_x^1)$) оказывается линейной и "явно интегрируемой", что позволяет строить примеры решений и изучать свойства всех решений определенных классов. Объяснение неожиданного успеха этого подхода дал П. Лакс[17], показав, что уравнение (4) (для определенности, с $a = 1/4$, $b = 3/2$) есть условие разрешимости *вспомогательной линейной задачи*

$$L\psi = \lambda\psi, \qquad \psi_t = P\psi \tag{7}$$

для операторов $L := \partial_x^2 + u$ и $P := \partial_x^3 + (3/2)u\partial_x + (3/4)u_x$. Иными словами, уравнение (4) можно записать в виде $L_t = [P, L]$. Отсюда в силу кососимметричности оператора P вытекает, что эволюция оператора L сводится к его сопряжению посредством некоторого зависящего от t унитарного оператора на пространстве $L^2(\mathbb{R}_x^1)$, чем и объясняется удивительная простота закона эволюции данных рассеяния.

Нелинейное уравнение Шредингера (6) описывает эволюцию огибающей волнового пакета, распространяющегося в нелинейной среде с дисперсией. Включение этого уравнения в рамки метода обратной задачи рассеяния, проведенное В. Е. Захаровым и А. Б. Шабатом[18], потребовало перехода в (7) от скалярного дифференциального уравнения второго порядка $L\psi = \lambda\psi$ к матричному 2×2-уравнению первого порядка с последующей редукцией (т.е. подбором матриц специальной алгебраической структуры, в данном случае косоэрмитовых). При этом вспомогательная линейная задача приобрела вид

$$E_x = UE, \qquad E_t = VE \tag{8}$$

[16] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, Method for solving the Korteweg–de Vries equation // Phys. Rev. Lett. 19(1967), 1095–1097.

[17] P. D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Comm. Pure Appl. Math. 21(1968), 467–490.

[18] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ 61(1971), 118–134.

для некоторых матричнозначных полиномов $U(x,t,z)$ и $V(x,t,z)$ степеней соответственно 1 и 2 от спектрального параметра $z \in \mathbb{C}$ (связанного с параметром λ из (7) соотношением $\lambda = z^n$ в случае $n \times n$-матриц), а само уравнение (6) оказалось записанным, хотя и неявно, в виде редукции уравнения нулевой кривизны

$$U_t - V_x + [U,V] = 0, \tag{9}$$

играющего фундаментальную роль в нашей работе. Первая явная запись солитонных уравнений в виде редукций уравнений нулевой кривизны и первые применения такой формы записи принадлежат С. П. Новикову[19].

Наконец, уравнение Буссинеска (5), описывающее (как и уравнение Кортевега–де Фриза) волны на воде, но допускающее (в отличие от уравнения Кортевега–де Фриза) движение волн как вправо, так и влево, было включено в рамки метода обратной задачи рассеяния В. Е. Захаровым (1973) и оказалось первым физически важным случаем, где вместо 2×2-матриц в (8) или операторов L второго порядка в (7) пришлось рассматривать 3×3-матрицы или операторы третьего порядка.

Итак, все три уравнения (4)–(6) являются редукциями уравнения (9), в котором U и V суть полиномы от z, причем $\deg U = 1$, $\deg V \geqslant 2$. Принимая это свойство за *определение солитонного уравнения параболического типа*, мы дадим полный ответ на вопрос об аналитическом продолжении локальных голоморфных решений таких уравнений. Оказывается, дело обстоит почти так же как для линейных уравнений (1)–(3), только теперь решения продолжаются не до целых функций от x, а до глобально мероморфных.

Утверждение 1. *Для каждого из уравнений* (4)–(6), *любое голоморфное решение* $u(x,t)$ *в бидиске* $D = \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 | |x - x_0| < \varepsilon_1,\ |t - t_0| < \varepsilon_2\}$ *(с вещественным центром* $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^2$ *в случае уравнения* (6)) *допускает аналитическое продолжение до мероморфной функции* $\widetilde{u}(x,t)$ *в полосе* $S = \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \mid |t - t_0| < \varepsilon_2\}$.

Из теоремы Коши–Ковалевской (с x в качестве временно́й переменной) вытекает, что утверждение 1 неулучшаемо: для каждого из уравнений (4)–(6) можно указать такое решение u, что его продолжение $\widetilde{u}$ не может быть продолжено далее ни через одну граничную точку полосы S. Иными словами, оболочка мероморфности любого локального голоморфного (или мероморфного) решения покрывает всю плоскость в направлении оси x и может быть совершенно произвольной (любой наперед заданной) в направлении оси t.

Для доказательства утверждения 1 мы развиваем локальный вариант метода обратной задачи рассеяния для солитонных уравнений параболического типа

[19] С. П. Новиков, Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза // Функц. анализ приложен. 8(1974), вып. 3, 54–66.

(до сих пор имевшийся лишь в гиперболическом случае[20]), где потенциалами являются голоморфные ростки без каких-либо граничных условий. Это можно считать шагом на пути к еще одной мечте[21]: единому подходу к изучению конечнозонных и быстроубывающих решений.

Предлагаемый метод использует задачу Римана[22],[23] о факторизации матричнозначных функций на окружности, точнее, обобщение этой задачи на случай расходящихся рядов жевреевского типа. Установив условия симметричности, достаточные для разрешимости подобных задач, мы приходим к следующему более точному (не допускающему полюсов) нелинейному аналогу упомянутой выше теоремы С. В. Ковалевской[2]. Этот аналог касается лишь вещественных значений переменных (x,t) и так называемого *фокусирующего случая* $ab>0$ нелинейного уравнения Шредингера (6). Он не имеет места в дефокусирующем случае $ab<0$.

Утверждение 2. *Всякое вещественно-аналитическое решение* $u:\Pi\to\mathbb{C}$ *уравнения* (6) *с* $ab>0$ *на прямоугольнике* $\Pi:=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\,|\,|x-x_0|<\varepsilon_1,\ |t-t_0|<\varepsilon_2\}$ *продолжается до вещественно-аналитической функции* $\widetilde{u}:\Sigma\to\mathbb{C}$ *на полосе* $\Sigma:=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\,|\,|t-t_0|<\varepsilon_2\}$.

Простейшим и самым известным солитонным уравнением *гиперболического* типа является так называемая унитарная сигма-модель теории поля или уравнение гармонических отображений вещественной двумерной плоскости с лоренцевой метрикой в унитарную группу[22],[23]. Вопросы об аналитическом продолжении голоморфных решений становятся в этом случае тривиальными. Но если мы перейдем от лоренцевой метрики к евклидовой и добавим условие конечности энергии, то возникает новая задача: описать все такие решения. Ею занимались Ш. Чжень, Э. Калаби, Дж. Иллс (см. обзоры[24],[25]). Один из подходов к решению этой задачи был предложен К. Уленбек[26] и мотивирован теорией солитонных уравнений. Он основан на понятии добавления унитона (предельный случай операции добавления солитона). Пользуясь пред-

---

[20] И. М. Кричевер, Нелинейные уравнения и эллиптические кривые // Итоги науки техн. Соврем. проблемы математики, 23(1983), стр. 79–136. См. особенно стр. 81–90.

[21] D. Bennequin, Hommage à Jean–Louis Verdier: Au jardin des systèmes intégrables // in: Integrable systems. The Verdier memorial conference (O. Babelon et al. eds), Boston, Birkhäuser, 1993, 1–36. См. особенно стр. 35–36.

[22] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков и Л. П. Питаевский, Теория солитонов. Метод обратной задачи рассеяния, Москва, Наука, 1980.

[23] Л. А. Тахтаджян и Л. Д. Фаддеев, Гамильтонов подход в теории солитонов, Москва, Наука, 1986. См. особенно гл. II части I и §§ 6–8 гл. I части II.

[24] Й. Давидов, А. Г. Сергеев, Твисторные пространства и гармонические отображения // Успехи Матем. Наук 48(1993), вып. 3, 3–96.

[25] F. Hélein and J. C. Wood, Harmonic maps // in: Handbook of global analysis (D. Krupka, D. Saunders eds.), Amsterdam, Elsevier, 2008, 417–491. См. особенно стр. 476–480.

[26] K. Uhlenbeck, Harmonic maps into Lie groups: classical solutions of the chiral model // J. Diff. Geom. 30(1989), 1–50.

ставлением нулевой кривизны (9) для изучаемого уравнения, мы переносим теорию унитонов на *некоммутативную сигма-модель*[27], получаемую из обычной сигма-модели квантованием по Вейлю (см. монографию Л. Хёрмандера[6], т. III, § 18.5), и извлекаем следствия: целочисленность энергии всех решений (в надлежащих единицах измерения) и описание всех решений энергии не выше 5.

Цель работы. Изучение вопроса об аналитическом продолжении и глобальных аналитических свойств голоморфных решений нелинейных интегрируемых уравнений математической физики (солитонных уравнений) параболического типа в пространстве нескольких комплексных переменных. Разработка локального варианта метода обратной задачи рассеяния для построения таких решений и исследования их свойств. Изучение решений некоммутативной сигма-модели в рамках теории унитонов и полное описание пространств всех решений малой энергии.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Доказана теорема о глобальном мероморфном продолжении по пространственной переменной любого ростка голоморфного решения для солитонных уравнений параболического типа.

2. Описаны все возможные оболочки мероморфности ростков голоморфных решений таких уравнений.

3. Получен критерий разрешимости локальной голоморфной задачи Коши для солитонных уравнений параболического типа в терминах данных рассеяния начального условия.

4. Установлено свойство тривиальности монодромии в полюсах глобальных мероморфных функций, полученных продолжением ростков решений солитонных уравнений.

5. Описаны пространства модулей решений некоммутативной сигма-модели теории поля, имеющих нормированную энергию не выше 5.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории функций нескольких комплексных переменных, теории уравнений с частными производными и математической физике.

Методы исследования. В диссертации используется разработанный автором локальный вариант метода обратной задачи рассеяния, а также общие методы комплексного и функционального анализа.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова на семинаре

[27] O. Lechtenfeld, Noncommutative solitons // Recent developments in gravitation and cosmology (A. Macias et al. eds), AIP Conf. Proc. 977(2008), 37–51.

кафедры ТФФА по многомерному комплексному анализу (семинаре Витушкина) под руководством чл.-корр. РАН Е. М. Чирки, чл.-корр. РАН С. Ю. Немировского, проф. А. Г. Сергеева и проф. В. К. Белошапки и на семинаре "Операторные модели в математической физике" под руководством проф. А. А. Шкаликова, в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН на семинаре по комплексному анализу под руководством академика А. А. Гончара, чл.-корр. РАН Е. М. Чирки и проф. А. И. Аптекарева, семинаре отдела математической физики под руководством академика В. С. Владимирова и семинаре "Комплексные задачи математической физики" под руководством проф. А. Г. Сергеева, на семинаре кафедры анализа под руководством проф. А. Т. Хаклберри в Рурском университете в Бохуме, семинаре по теории струн под руководством проф. О. Лехтенфельда в институте физики университета им. Лейбница в Ганновере, семинаре по теории интегрируемых систем под руководством проф. А. Дегаспериса в университете Рим-3, семинаре по многомерному комплексному анализу под руководством проф. К. Реа в университете Рим-2, семинаре по комплексному анализу и геометрии под руководством проф. Р. Кобаяши в университете г. Нагоя и на ряде других семинаров, а также на международных конференциях, в том числе:

— международная конференция "Геометрический анализ и его приложения" (Волгоград, 2004),

— международная конференция SCV2004 (Пекин, 2004),

— XXV международная конференция по геометрическим методам в физике (Беловежа, Польша, 2006),

— международная школа–конференция "Геометрия и квантование" (Москва, 2007),

— II российско–армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Москва, 2008),

— академический симпозиум "Римановы поверхности, гармонические отображения и визуализация" (Осака, Япония, 2008),

— российско–германская конференция по многомерному комплексному анализу (Москва, 2012).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы из 116 наименований. Общий объем диссертации — 205 страниц.

Содержание диссертации

Глава I посвящена описанию класса изучаемых нами солитонных уравнений и метода построения их голоморфных решений с помощью задачи Римана о факторизации обратимых матричнозначных функций на окружности. Здесь закладывается необходимый фундамент для построений главы II. Формально говоря, читатель может опустить всю главу I, кроме первых трех пунктов § I.2, но тогда он лишится мотивировок и связей с предшествующими версиями метода обратной задачи рассеяния.

Мы начинаем в § I.1 с *уравнений нулевой кривизны* (9), в которых $U(x,t,z)$ и $V(x,t,z)$ суть $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значные рациональные функции от вспомогательного параметра z, коэффициенты которых зависят от пространственной и временно́й переменных x,t. При этом дивизоры полюсов функций U,V фиксированы заранее и не зависят от x,t, а под коэффициентами рациональной функции понимаются коэффициенты ее разложения на простейшие дроби или, что то же самое, коэффициенты главных частей лорановских разложений во всех полюсах. *Голоморфным решением уравнения* (9) *на области* $\Omega \subset \mathbb{C}^2_{xt}$ называется пара рациональных $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значных функций U,V от z с предписанными дивизорами полюсов такая, что все коэффициенты функций U,V определены и голоморфны на Ω, а все коэффициенты рациональной функции $U_t - V_x + [U,V]$ от z тождественно равны 0 на Ω. Выполнение уравнения (9) при фиксированном z (отличном от полюсов U и V) на какой-либо односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}^2_{xt}$ равносильно существованию голоморфного решения $E : \Omega \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ вспомогательной линейной системы (8) при том же значении z. Это решение единственно с точностью до умножения справа на любую обратимую матрицу, возможно, свою при каждом z.

В нужной нам версии *задачи Римана* задаются открытые непересекающиеся круги D_+, D_-, замыкания которых покрывают всю расширенную комплексную плоскость: $\overline{D}_+ \cup \overline{D}_- = \overline{\mathbb{C}}$. Непрерывная функция $\gamma : \Gamma \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ на окружности $\Gamma := \overline{D}_+ \cap \overline{D}_-$ называется *левофакторизуемой* (соотв. *правофакторизуемой*), если найдутся непрерывные функции $\gamma_\pm : \overline{D}_\pm \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, голоморфные на $D_\pm$ и такие, что $\gamma = \gamma_+\gamma_-^{-1}$ на Γ (соотв. $\gamma = \gamma_-^{-1}\gamma_+$ на Γ). Мы рассматриваем функцию γ как *данные* задачи Римана, а пару (γ_+,γ_-) — как *решение*. Если решение существует, то оно единственно с точностью до умножения элементов пары справа (соотв. слева) на одну и ту же постоянную обратимую матрицу.

Опишем голоморфную версию *метода одевания* Захарова–Шабата[28]. Пусть (U_0,V_0) — некоторое голоморфное решение (например, тождественно нулевое) уравнения (9) на области $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ и пусть E_0 — нормированное в точке $(x_0,t_0) \in \Omega$ (условием, что $E_0(x_0,t_0,z) = I$ есть единичная матрица при всех z) решение вспомогательной линейной системы (8). Рассмотрим любое покрытие расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ такими кругами D_+, D_-, что окружность $\Gamma = \overline{D}_+ \cap \overline{D}_-$ не проходит через полюсы рациональных функций U_0, V_0, и возьмем любую правофакторизуемую непрерывную функцию $g : \Gamma \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Для всех $(x,t) \in \Omega$ рассмотрим задачу Римана о нахождении обратимых не-

[28]В. Е. Захаров и А. Б. Шабат, Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II // Функц. анализ и его прилож. 13(1979), вып. 3, 13–22.

прерывных функций $\theta_\pm : \overline{D}_\pm \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, голоморфных на $D_\pm$ и таких, что

$$E_0(x,t,z)g(z)E_0^{-1}(x,t,z) = \theta_-^{-1}(x,t,z)\theta_+(x,t,z) \quad \text{при} \quad z \in \Gamma. \tag{10}$$

Чтобы добиться единственности решения $\theta_\pm$, фиксируем точку $z_0 \in D_-$ и добавим условие $\theta_-(x,t,z_0) = I$ для всех x,t. По теореме Б. Мальгранжа[29], множество Ω_g всех точек $(x,t) \in \Omega$, для которых задача Римана (10) разрешима, есть либо вся область Ω, либо дополнение к некоторой комплексной кривой $C_g \subset \Omega$, не проходящей через точку (x_0,t_0), а матричнозначные функции $\theta_\pm(x,t,z)$ мероморфны на $\Omega \times D_\pm$ и имеют при каждом $z \in D_\pm$ не более чем полюс по (x,t) вдоль указанной кривой. Положим

$$U_1(x,t,z) = \begin{cases} (\theta_+)_x\theta_+^{-1} + \theta_+U_0\theta_+^{-1} & \text{при} \quad z \in \overline{D}_+, \\ (\theta_-)_x\theta_-^{-1} + \theta_-U_0\theta_-^{-1} & \text{при} \quad z \in \overline{D}_- \end{cases} \tag{11}$$

и зададим $V_1(x,t,z)$ точно такой же формулой, но с заменой U_0 на V_0 и производных по x на производные по t. Тогда пара $(U_1(x,t,z), V_1(x,t,z))$ задает голоморфное решение уравнения (9) на области $\Omega_g \subset \mathbb{C}^2_{xt}$ (или мероморфное решение на Ω) *с теми же дивизорами полюсов* рациональных функций U_1, V_1 от переменного z, что и у функций U_0, V_0. Говорят, что это решение получено *одеванием решения U_0, V_0 посредством функции g.*

Начиная с § I.2, мы ограничиваемся случаем, когда дивизоры полюсов рациональных функций U, V равны ∞ и $m\infty$ для некоторого целого $m \geqslant 2$, т.е. U есть полином степени 1 от z, а V — полином степени $m \geqslant 2$ от z. В такой ситуации естественно рассмотреть предельный вариант метода одевания (аналог этой конструкции для случая, когда множества полюсов U и V не пересекаются, описан в [20],[23]), при котором круг D_- стягивается в точку ∞, а круг D_+, напротив, расширяется до всей плоскости $\mathbb{C}$. Тогда в качестве одевающей функции $g(z)$ берется росток в точке ∞ произвольного голоморфного обратимого матричнозначного отображения, а в качестве контура Γ — любая окружность столь большого радиуса, что она лежит в области определения этого ростка. Чтобы сформулировать, во что превратится метод одевания в таком пределе, сделаем отступление об алгебраической структуре уравнений (9) для интересующих нас полиномов U, V, которая описана в п. I.2.1. А именно, можно с самого начала считать, что (см. (I.2.1))

$$\begin{cases} U(x,t,z) = az + q(x,t)\ , \\ V(x,t,z) = bz^m + r_1(x,t)z^{m-1} + \ldots + r_m(x,t) \end{cases} \tag{12}$$

для некоторых *диагональных* матриц $a, b \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ и голоморфных функций $q, r_1, \ldots, r_m : \Omega \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ на заданной области $\Omega \subset \mathbb{C}^2$. Тогда уравнение (9)

[29] B. Malgrange, Sur les deformations isomonodromiques. I. Singularites regulieres // in: Mathematique et Physique. Sem. Ecole Norm. Sup. 1979–1982 (L. Boutet de Monvel et al. eds), Basel, Birkhäuser, 1983, 401–426.

записывается в виде системы $m+1$ матричных уравнений на $m+1$ неизвестных матричнозначных функций $q, r_1, \dots, r_m$. Предположим для невырожденности, что матрица a имеет *простой спектр*, т.е. все ее собственные значения различны, а матричнозначная функция $q(x,t)$ *внедиагональна*, т.е. $q_{ii}(x,t) \equiv 0$ при $i = 1, \dots, n$. Тогда m уравнений этой системы и диагональная часть последнего $(m+1)$-го уравнения решаются чисто алгебраически, так что система сводится к одному внедиагональному матричному уравнению на одну внедиагональную матричнозначную функцию $q(x,t)$.

Чтобы дать более подробную формулировку этого факта, фиксируем произвольную точку $x_0 \in \mathbb{C}$ и обозначим через $\mathcal{R}(x_0)$ множество ростков всех голоморфных $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значных отображений в точке x_0, а через $\mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ — множество всех внедиагональных ростков $q \in \mathcal{R}(x_0)$, т.е. таких, что $q_{ii}(x) \equiv 0$ при $i = 1, \dots, n$. Отображение $F : \mathcal{R}(x_0) \to \mathcal{R}(x_0)$ называется *дифференциальным полиномом*, если каждый матричный элемент функции $F(\varkappa)$ есть обычный полином (один и тот же для всех $\varkappa$) от матричных элементов функции $\varkappa$ и их производных по x. В следующем утверждении соединены лемма I.1 и следствие из леммы I.3.

Утверждение 3. (A) *Пусть $a, b, c_1, c_2, \dots \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ — диагональные матрицы, причем a имеет простой спектр. Тогда существует единственная последовательность дифференциальных полиномов $F_j : \mathcal{R}(x_0) \to \mathcal{R}(x_0)$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$ такая, что*

(a) $F_0(\varkappa) \equiv b$,

(b) $F_j(0) \equiv c_j$ *для всех* $j = 1, 2, \dots$,

(c) *формальный ряд Лорана* $F(\varkappa, z) := \sum_{j=0}^{\infty} F_j(\varkappa) z^{-j}$ *удовлетворяет уравнению* $\partial_x F(\varkappa, z) = [az + \varkappa, F(\varkappa, z)]$ *тождественно по x и z для всех* $\varkappa \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$.

(B) *Для того, чтобы пара полиномов $U(x,t,z)$, $V(x,t,z)$ вида (12) с диагональными матрицами $a, b \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ (причем a имеет простой спектр) и внедиагональной функцией $q(x,t)$ была голоморфным решением уравнения (9) в области $\Omega \subset \mathbb{C}^2$, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий.*

(d) *Коэффициенты $r_1, \dots, r_m : \Omega \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ полинома V должны выражаться через внедиагональную функцию $q : \Omega \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ формулами*

$$r_1 = F_1(q), \quad \dots, \quad r_m = F_m(q)$$

для некоторых диагональных матриц $c_1(t), \dots, c_m(t) \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$, голоморфно зависящих от t в области, равной проекции Ω на координатную ось $\mathbb{C}^1_t$.

(e) *Внедиагональная голоморфная функция $q : \Omega \to \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ должна удовлетворять на Ω уравнению*

$$q_t = [a, F_{m+1}(q)] \tag{13}$$

для того же выбора диагональных матриц $c_1(t), \dots, c_m(t)$*, что в пункте* (d) *и для произвольной диагональной матрицы* $c_{m+1} \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ (*от выбора которой правая часть уравнения* (13) *на самом деле не зависит*).

В дальнейшем нас будут интересовать не все решения U, V уравнений нулевой кривизны (9), имеющие вид (12), а только те, которые отвечают решениям уравнения (13) для некоторых *не зависящих от* t диагональных матриц $c_1, \dots, c_m$. Кроме того, в целях невырожденности мы будем требовать, чтобы не только матрица a, но и матрица b имела простой спектр. В этом случае мы будем называть уравнение (13) *солитонным уравнением параболического типа, заданным матрицами* $a, b, c_1, \dots, c_m$. Оно эквивалентно уравнению нулевой кривизны $U_t - V_x + [U,V] = 0$ для полиномов U, V вида

$$U(x,t,z) = az + q(x,t), \qquad V(x,t,z) = \sum_{j=0}^{m} F_{m-j}(q)(x,t) z^j, \tag{14}$$

где F_0, F_1, $\dots$, F_m суть дифференциальные полиномы, заданные последовательностью матриц $a, b, c_1, \dots, c_m$ согласно утверждению 3(A). В качестве примеров редукций солитонных уравнений параболического типа в конце п. I.2.1 приводятся линейные уравнения вида $u_t = P(\partial_x)u$ для произвольного полинома P степени $\geqslant 2$ (см. (I.2.9)), три варианта нелинейного уравнения Шредингера (см. (I.2.10), (I.2.11)), уравнение Кортевега–де Фриза (I.2.12) и модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза (I.2.13).

Вернемся к предельному случаю метода одевания для построения голоморфных решений описанных уравнений. Одевать будем тождественно нулевое решение U_0, V_0 посредством любого ростка $g = f^{-1} \in \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ есть множество всех голоморфных $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-значных функций f на $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R_0\} \cup \{\infty\}$ (R_0 свое для каждой f) с $f(\infty) = I$. Иными словами, $\mathcal{D}$ состоит из ростков голоморфных $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-значных функций f в точке ∞ с $f(\infty) = I$. Следующее утверждение представляет собой теорему I.1.

Утверждение 4. *Пусть* $a, b, c_1, c_2, \dots \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ — *диагональные матрицы, причем* a *имеет простой спектр. Фиксируем целое число* $m \geqslant 2$ *и точку* $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$. *Для каждой функции* $f \in \mathcal{D}$ *обозначим через* $\Omega(f)$ *множество всех* $(x,t) \in \mathbb{C}^2$ *таких, что функция*

$$\gamma(x,t,z) := \exp\{az(x-x_0) + (bz^m + c_1 z^{m-1} + \ldots + c_m)(t-t_0)\} f^{-1}(z)$$

правофакторизуема на некоторой (*и тогда на любой*) *окружности* $\{|z|{=}R\}$, $R_0 < R < +\infty$. *Тогда множество* $\Omega(f) \subset \mathbb{C}^2$ *содержит некоторую окрестность точки* (x_0, t_0). *Далее, для каждой точки* $(x,t) \in \Omega(f)$ *обозначим через* $(\gamma_+(x,t,z), \gamma_-(x,t,z))$ *решение соответствующей задачи Римана*

$$\gamma(x,t,z) = \gamma_-^{-1}(x,t,z)\gamma_+(x,t,z) \quad \text{при} \quad R_0 < |z| < +\infty, \tag{15}$$

нормированное условием $\gamma_-(x,t,\infty)=I$, и положим

$$q_f(x,t) := \lim_{z\to\infty} z[\gamma_-(x,t,z)-I,a]. \tag{16}$$

Тогда функция $q_f:\Omega(f)\to \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ внедиагональна, голоморфна в некоторой окрестности точки (x_0,t_0) и удовлетворяет там солитонному уравнению параболического типа (13)*, заданному матрицами $a,b,c_1,c_2,\dots$.*

Заметим, что задача Римана (15) совпадает с (10) с точностью до обозначений $f=g^{-1}$, $\gamma_-=\theta_-$, $\gamma_+=\theta_+E_0$, а определение (16) построенного в утверждении 4 решения получается приравниванием коэффициентов при z^0 во втором равенстве (11).

Класс решений $q_f(x,t)$, построенных в утверждении 4, содержит все *конечнозонные* решения и многие *быстроубывающие*, причем как для тех, так и для других конструкция из утверждения 4 совпадает с соответствующим вариантом метода обратной задачи рассеяния, если рассматривать росток $f\in\mathcal{D}$ как *данные рассеяния* матричнозначного потенциала $q_f(x,t_0)\in\mathcal{R}(x_0)$. Эти утверждения будут подробно обоснованы в § I.4 и § I.5, а пока важно отметить, что наши “данные рассеяния” определяются своими “потенциалами” не однозначно, но эта неоднозначность контролируема: они определены с точностью до умножения справа на любой диагональный росток из $\mathcal{D}$. Следующее утверждение, выражающее этот факт, совпадает с леммой I.4.

Утверждение 5. *Две функции $f,g\in\mathcal{D}$ задают одно и то же решение $q_f(x,t)=q_g(x,t)$ уравнения* (13) *в окрестности точки $(x_0,t_0)\in\mathbb{C}^2$ тогда и только тогда, когда функция $g^{-1}f\in\mathcal{D}$ диагональна. То же самое условие необходимо и достаточно для выполнения равенства $q_f(x,t_0)=q_g(x,t_0)$ в окрестности точки $x_0\in\mathbb{C}$.*

В оставшейся части § I.2 приведены три примера ситуаций, когда задача Римана (15) решается в явном виде. Первый из этих примеров (п. I.2.3) касается редукции $q_{21}\equiv 0$ для 2×2-матриц, которая приводит к линейным эволюционным уравнениям (I.2.9) с постоянными коэффициентами. Оказывается, что тогда сопоставление каждому потенциалу его данных рассеяния практически совпадает с хорошо известным преобразованием Лапласа. Этот факт мотивирует наши обозначения в гл. II и является основой доказательства леммы III.2.

Второй пример (п. I.2.4) состоит в вычислении данных рассеяния любого постоянного $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значного потенциала, что иллюстрирует конечнозонный случай, обсуждаемый в § I.5. В третьем примере (п. I.2.5) вычисляется потенциал, данные рассеяния которого задаются матричнозначным множителем Бляшке. Полученный результат используется в одном из доказательств основного результата § I.3: теоремы I.2, сформулированной ниже как утверждение 6 и представляющей собой достаточное условие разрешимости задачи Римана о факторизации матричнозначных функций на окружности. Это достаточное условие $\gamma(\overline{z})^*\gamma(z) \equiv I$ равносильно тому, что отображение $z \mapsto \gamma(z)$ окружности $\{|z| = R\}$ в комплексную группу Ли $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ переводит любые две точки, симметричные относительно вещественной оси в точки, симметричные относительно унитарной группы $U(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Утверждение 6. *Пусть* $R > 0$, $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = R\}$ *и* $\gamma : \Gamma \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *такая гельдеровская функция, что* $\gamma(\overline{z})^*\gamma(z) = I$ *для всех* $z \in \Gamma$. *Тогда* γ *лево- и правофакторизуема.*

Отметим, что это утверждение не вытекает из известной теоремы Гохберга–Крейна[30], которую напоминает по формулировке. Впрочем, оно и не содержит эту теорему. Мы приводим два доказательства утверждения 6 и его приложения к редукциям уравнений (13), заданных *косоэрмитовыми* матрицами $a, b, c_1, c_2, \dots$. Примером таких уравнений может служить комплексифицированная версия (I.2.8) (с коэффициентами $A_0 = i$, $A_1 = A_2 = 0$) нелинейного уравнения Шредингера (6) с коэффициентами $a = -1$, $b = -2$. Среди всех решений $q(x, t)$ такого уравнения (13) выделяются те, которые *косоэрмитовы при вещественных* x, t: именно они дают решения физически интересных уравнений, возникающих после редукции. Первая часть следующего утверждения (леммы I.9) показывает, что (с точностью до неоднозначности, описанной в утверждении 5) решение $q_f(x, t)$, построенное в утверждении 4, обладает этим свойством тогда и только тогда, когда породившая его задача Римана (15) удовлетворяет условиям утверждения 6 для всех вещественных x, t. Из второй же части вытекает, что каждое такое решение $q_f(x, t)$ определено (и, разумеется, вещественно аналитично) на всей вещественной плоскости $\mathbb{R}^2_{xt}$. Иными словами, *все физически интересные решения изучаемого нами класса глобально определены.*

Утверждение 7. (A) *Если все матрицы* $a, b, c_1, c_2, \dots$ *косоэрмитовы, то построенное в утверждении* 4 *решение* $q(x, t)$ *уравнения* (13) *удовлетворяет условию* $q(x, t) = -q^*(x, t)$ *для всех вещественных* (x, t) *в некоторой окрестности точки* $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ *в том и только том случае, когда* $q = q_f$ *для некоторой функции* $f \in \mathcal{D}$, *удовлетворяющей* $f(\overline{z})^* f(z) = I$ *при* $|z| > R$.

(B) *Если все матрицы* $a, b, c_1, c_2, \dots$ *косоэрмитовы и функция* $f \in \mathcal{D}$ *удовлетворяет* $f(\overline{z})^* f(z) = I$ *при* $|z| > R$, *то поставленная в утверждении* 4 *задача Римана* (15) *разрешима при всех вещественных* x, t, *т.е. имеем* $\Omega(f) \supset \mathbb{R}^2_{xt}$.

Завершающие главу I параграфы I.4 и I.5 не являются логически необходимыми для последующего изложения. Их цель — показать, что наше употребление терминов “потенциал”, “данные рассеяния”, “прямое и обратное преобразования рассеяния” совпадает с общепринятым всякий раз, когда наши “потенциалы” удовлетворяют соответствующим граничным условиям. В

[30] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи матем. наук 13(1958), вып. 2, 3–72.

зависимости от граничных условий различают быстроубывающую и конечнозонную (квазипериодическую) версии метода обратной задачи рассеяния.

Быстроубывающая версия рассмотрена в § I.4. Здесь под потенциалом для простоты понимается произвольная внедиагональная функция $q : \mathbb{R}^1_x \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ класса Шварца $S(\mathbb{R}^1)$. Данные рассеяния такого потенциала (некоторые спектральные характеристики оператора $a^{-1}\partial_x - q(x)$ для заданной обратимой диагональной $n \times n$-матрицы a с простым спектром) полностью характеризуются структурой особенностей некоторой (определенной в п. I.4.1) кусочно-мероморфной $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значной функции $z \mapsto m_\pm(x_0, z)$ со скачком вдоль $\mathbb{R}^1_z$. По теореме единственности для голоморфных функций, эти особенности однозначно определяются ростком $f(z)$ указанной кусочно-мероморфной функции в точке $z = \infty$. Этот росток мы и будем рассматривать как *данные рассеяния потенциала* $q(x)$. Тогда быстроубывающая версия метода обратной задачи рассеяния становится полностью параллельной теории, изложенной в § I.2, с одной лишь разницей: пространство $\mathcal{D}$ голоморфных ростков в точке $z = \infty$ следует всюду заменить на некоторое новое пространство $\mathcal{D}^{\mathrm{rd}}$ кусочно-мероморфных ростков в той же точке. Роль утверждения 6 переходит к теореме Гохберга–Крейна, которая, однако, теперь выражает симметрию относительно носителя данных факторизации, т.е. используется совсем по-другому.

Конечнозонная версия рассмотрена в § I.5. Основной результат параграфа содержится в пунктах (A) и (B) теоремы I.3 и гласит, что решения, построенные в утверждении 4 (в котором точка (x_0, t_0) считается равной началу координат в $\mathbb{C}^2$) — это те и только те гладкие решения $q(x,t)$ уравнения (13) в окрестности Ω начала координат в $\mathbb{R}^2_{xt}$, для которых существует $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значная функция $W(x,t,z)$, гладкая по $(x,t) \in \Omega$ и голоморфная по z на множестве $\{|z| > R\}$ (включая точку $z = \infty$), удовлетворяющая дифференциальным уравнениям

$$W_x = [U, W], \qquad W_t = [V, W]$$

для всех $(x,t) \in \Omega$, $|z| > R$, где функции $U(x,t,z)$, $V(x,t,z)$ определены по решению $q(x,t)$ формулами (14), а также удовлетворяющая условию невырожденности: комплексная кривая $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| > R,\ \det(W(0,0,z) - wI) = 0\}$ распадается на n различных голоморфных ветвей над проколотой окрестностью точки $z = \infty$. В то же время, согласно определению И. М. Кричевера[20], конечнозонные решения уравнений нулевой кривизны — это те и только те, для которых существует *рациональная* по z функция $W(x,t,z)$ с теми же свойствами, что и выше. Таким образом, конечнозонные решения составляют подкласс множества решений, построенных в утверждении 4.

Глава II содержит основные результаты работы. От метода построения решений, изложенного в утверждении 4, мы переходим к его естественной модификации, охватывающей *все локальные голоморфные решения* уравнения (13) в окрестности данной точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$. Оказывается, для этого достаточно заменить множество "данных рассеяния" $\mathcal{D}$, состоящее из всех сходящихся в некоторой окрестности точки $z = \infty$ рядов вида

$$f(z) = I + \frac{\varphi_0}{z} + \frac{\varphi_1}{z^2} + \dots ,$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, на множество $\mathcal{D}_{1/m}$ всех формальных рядов такого же вида с внедиагональными $\varphi_k \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ и с

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\varphi_k|}{k!^{1/m}} A^k < \infty \quad \text{для некоторого } A > 0,$$

где $m \geqslant 2$ есть номер изучаемого уравнения (13) в его иерархии, а условие внедиагональности матриц φ_k наложено для того, чтобы избавиться от неоднозначности соответствия между потенциалами и их данными рассеяния, описанной в утверждении 5. Естественность класса $\mathcal{D}_{1/m}$ заключается в том, что его элементы — это те и только те формальные степенные ряды указанного вида, для которых левая часть равенства (15) (т.е. данные задачи Римана) корректно определена как формальный ряд Лорана при всех (x, t) в некоторой окрестности точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$. В случае $m = 1$ (или, что то же самое, $b = c_1 = c_2 = \ldots = 0$) уравнение (13) принимает тривиальный вид $q_t = 0$, но его "решения", т.е. любые ростки $q(x)$ голоморфных внедиагональных $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значных функций в точке $x_0 \in \mathbb{C}$, также включаются в область действия описываемого метода. Этому посвящен весь § II.2.

В п. II.1.1 вводятся нужные нам банаховы пространства формальных степенных рядов. Для каждого $\alpha \geqslant 0$ будем обозначать через Gev_α и называть *классом Жеврея* α множество всех формальных степенных рядов вида $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^{-(k+1)}$ с $\varphi_k \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ таких, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-\alpha} |\varphi_k| x^k$ имеет ненулевой радиус сходимости. Здесь $|\cdot|$ означает любую норму на $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, обладающую свойством $|AB| \leqslant |A||B|$. Векторное пространство Gev_α есть объединение возрастающего семейства банаховых пространств, изометрически изоморфных l_1, а именно, $\mathrm{Gev}_\alpha = \bigcup_{A>0} G_\alpha(A)$, где $G_\alpha(A)$ есть множество всех формальных степенных рядов $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^{-(k+1)}$ с $\varphi_k \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ таких, что $\|\varphi\|_{\alpha,A} := \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-\alpha} |\varphi_k| A^k < \infty$.

В том же духе мы при каждом $m \geqslant 1$ записываем векторное пространство всех $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значных целых функций порядка $\leqslant m$ и конечного типа (при порядке m) в виде $\mathrm{Ent}_m = \bigcup_{B>0} E_m(B)$, где $E_m(B)$ есть множество всех формальных рядов $\varepsilon(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l z^l$ с $\varepsilon_l \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ таких, что $\|\varepsilon\|_{m,B} := \sup_{l \geqslant 0} |\varepsilon_l| (l!)^{1/m} B^{-l} < \infty$. Ясно, что каждое $E_m(B)$ есть банахово пространство, изометрически изоморфное пространству l_∞.

Важным свойством банаховых пространств $G_\alpha(A)$ и $E_m(B)$ является возможность перемножать их элементы при $\alpha m \leqslant 1$ и $B < A$, причем эти неравенства в общем случае неулучшаемы. Этот факт выражается следующим утверждением (леммой II.1), в котором через $\{\cdot\}_+$ и $\{\cdot\}_-$ обозначаются положительная и отрицательная части формального ряда Лорана: $\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k\}_+ = \sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$, $\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k\}_- = \sum_{k\leqslant -1} a_k z^k$.

Утверждение 8. *Пусть $A > B > 0$, $m \geqslant 1$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1/m$. Тогда произведение элементов из $G_\alpha(A)$ и $E_m(B)$, взятых в любом порядке, есть корректно определенный формальный ряд Лорана, принадлежащий $G_\alpha(A-B)+E_m(B)$. Отображения $(\varphi,\varepsilon)\mapsto\{\varphi\varepsilon\}_\pm$ и $(\varphi,\varepsilon)\mapsto\{\varepsilon\varphi\}_\pm$ являются непрерывными билинейными формами на $G_\alpha(A)\times E_m(B)$ со значениями в $G_\alpha(A-B)$ и $E_m(B)$.*

Основной результат § II.1 — это следующее утверждение (теорема II.1) о разрешимости задачи Римана (15) в контексте расходящихся степенных рядов и об аналитических свойствах ее решений как функций от параметров. Фактически нам нужен лишь весьма частный случай, когда Ω есть $\mathbb{C}^2_{xt}$, а полином $P(x,t,z)$ имеет вид $a(x-x_0)+(bz^m+c_1z^{m-1}+\ldots+c_m)(t-t_0)$ для тех же диагональных матриц $a,b,c_1,c_2,\ldots\in\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$, что и в утверждении 4. В пункте (B) утверждения 9 используется обозначение $\mathrm{Gev}_{\alpha-0} := \bigcup_{0\leqslant s<\alpha}\mathrm{Gev}_s$.

Утверждение 9. (A) *Пусть даны комплексное многообразие Ω, целое число $m\geqslant 1$, голоморфные отображения $p_0,p_1,\ldots,p_m:\Omega\to\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ и точка $\xi_0\in\Omega$ такие, что $p_k(\xi_0)=0$ при $k=0,1,\ldots,m$. Положим $P(\xi,z):=\sum_{k=0}^m p_k(\xi)z^k$ для всех $\xi\in\Omega$, $z\in\mathbb{C}$. Тогда для любого ряда $f\in I+\mathrm{Gev}_{1/m}$ найдутся окрестность $\Omega(f)$ точки ξ_0 в Ω, числа $A,B>0$ и голоморфные отображения $\gamma_-:\Omega(f)\to I+G_{1/m}(A)$ и $\gamma_+:\Omega(f)\to E_m(B)$ такие, что при каждом $\xi\in\Omega(f)$ выполнено следующее равенство формальных рядов Лорана:*

$$e^{P(\xi,z)}f^{-1}(z)=\gamma_-^{-1}(\xi,z)\gamma_+(\xi,z) \tag{17}$$

и все значения целой функции $z\mapsto\gamma_+(\xi,z)$ принадлежат группе $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ всех обратимых комплексных $n\times n$-матриц и удовлетворяют равенству

$$\det\gamma_+(\xi,z)=e^{\operatorname{tr}P(\xi,z)}\quad \textit{для всех}\quad z\in\mathbb{C}. \tag{18}$$

(B) *Если в условиях пункта* (A) *имеем $f\in I+\mathrm{Gev}_{(1/m)-0}$, а Ω является многообразием Штейна с $H^2(\Omega,\mathbb{Z})=0$, то существует не обращающаяся в нуль в точке ξ_0 голоморфная функция $\tau_f\in\mathcal{O}(\Omega)$ со следующими свойствами.*

(a) *Ростки отображений $\xi\mapsto\tau_f(\xi)(\gamma_-(\xi,z)-I)$ и $\xi\mapsto\tau_f(\xi)(\gamma_-^{-1}(\xi,z)-I)$ в точке ξ_0 аналитически продолжаются до голоморфных отображений $\Omega\to G_{1/m}(A)$ при каждом $A>0$.*

(b) *Для любого исчерпания $\{\xi_0\}=K_0\subset K_1\subset\ldots$ многообразия Ω голоморфно выпуклыми компактами $K_j\subset\operatorname{int}K_{j+1}$ с $H^2(\operatorname{int}K_j,\mathbb{Z})=0$ найдется последовательность чисел $B_j>0$ такая, что ростки $\xi\mapsto\tau_f(\xi)\gamma_+(\xi,z)$ и $\xi\mapsto\tau_f(\xi)\gamma_+^{-1}(\xi,z)$ продолжаются при каждом $j=1,2,\ldots$ до голоморфных отображений $\operatorname{int}K_j\to E_m(B_j)$.*

(c) *Равенства* (17) *и* (18) *выполнены для всех* $\xi \in \Omega$ *с* $\tau_f(\xi) \neq 0$.

Таким образом, если формальный $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значный степенной ряд $f(z) = I + \varphi_0 z^{-1} + \varphi_1 z^{-2} + \dots$ принадлежит такому классу Жеврея, что левая часть равенства (17) корректно определена в некоторой окрестности точки ξ_0 по утверждению 8, то задача Римана (17) разрешима в (вообще говоря, меньшей) окрестности точки ξ_0, а ее решение $\gamma_\pm(\xi, z)$ голоморфно по ξ в этой точке. Если же, как в пункте (B), ряд $f(z)$ принадлежит строго меньшему классу Жеврея, то задача Римана (17) разрешима всюду на Ω кроме, может быть, некоторой комплексной гиперповерхности $\{\xi \in \Omega \mid \tau_f(\xi) = 0\}$, не проходящей через точку ξ_0, а решение $\gamma_\pm(\xi, z)$ глобально мероморфно по ξ на Ω и имеет не более чем полюс вдоль указанной гиперповерхности.

Для доказательства пункта (A) утверждения 9 задача Римана (17) сводится к линейному неоднородному уравнению (II.1.6) вида $X(\xi)\varphi = u(\xi)$ на банаховом пространстве $E = G_\alpha(A)$ для надлежащих $\alpha \leqslant 1/m$ и $A > 0$, где заданный непрерывный линейный оператор $X(\xi) : E \to E$ и заданный вектор $u(\xi) \in E$ голоморфно зависят от ξ в окрестности ξ_0 и $X(\xi_0) = I$ есть тождественный оператор. Ясно, что решение $\varphi(\xi) = X(\xi)^{-1}u(\xi)$ существует, единственно и голоморфно зависит от ξ в некоторой окрестности точки ξ_0.

Для доказательства пункта (B) мы замечаем, что в условиях этого пункта оператор $X(\xi)$ и вектор $u(\xi)$ определены и голоморфны по ξ на всем пространстве параметров Ω, причем оператор $Y(\xi) := X(\xi) - I$ компактен при каждом $\xi \in \Omega$. Поэтому требуемое заключение вытекает из следующей "мероморфной альтернативы Фредгольма" (леммы II.8).

Утверждение 10. *Пусть* Ω *есть многообразие Штейна с* $H^2(\Omega, \mathbb{Z}) = 0$*, а* $Y : \Omega \to \mathcal{B}(E)$ *есть голоморфное отображение из* Ω *в пространство линейных непрерывных операторов на банаховом пространстве* E*, причем операторы* $Y(\xi)$ *компактны для всех* $\xi \in \Omega$ *и оператор* $I + Y(\xi_0)$ *обратим для некоторой точки* $\xi_0 \in \Omega$*. Тогда найдется голоморфная функция* $\tau \in \mathcal{O}(\Omega)$ *с* $\tau(\xi_0) = 1$ *такая, что*: (i) $I + Y(\xi)$ *обратим для тех и только тех* $\xi \in \Omega$*, для которых* $\tau(\xi) \neq 0$; (ii) $\tau(\xi)(I + Y(\xi))^{-1}$ *есть голоморфное отображение* $\Omega \to \mathcal{B}(E)$.

Утверждение 9(A) дает нам возможность определить обратное преобразование рассеяния для всех $f \in I + \mathrm{Gev}_1$ (в то время как в утверждении 4 допускались лишь $f \in I + \mathrm{Gev}_0$) формулой (16) с $t = t_0$ (или, эквивалентно, с $b = c_1 = c_2 = \ldots = 0$). Это делается в п. II.1.3. Фиксируем диагональную матрицу $a \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ с простым спектром и произвольную точку $x_0 \in \mathbb{C}$. Для каждого формального степенного ряда $\varphi \in \mathrm{Gev}_1$ рассмотрим решение $\gamma_\pm(x, z)$ задачи Римана (17) с $P(x, z) = a(x - x_0)z$ и $f(z) = I + \varphi(z)$. Обозначим через $\mathcal{R}(x_0)$ множество ростков всех голоморфных $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значных отображений в точке x_0, а через $\mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ — множество всех внедиагональных ростков $q \in \mathcal{R}(x_0)$, т.е. таких, что $q_{ll}(x) \equiv 0$ при $l = 1, \ldots, n$. Тогда все коэффициенты $g_k(x)$ в записи $\gamma_-(x, z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) z^{-(k+1)}$ принадлежат $\mathcal{R}(x_0)$, а формула (по существу (16) при $t = t_0$)

$$B\varphi(x) := [g_0(x), a] \tag{19}$$

задает отображение $B : \mathrm{Gev}_1 \to \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$, называемое *обратным преобразованием рассеяния* и играющее важную роль в дальнейшем. Обозначение $B\varphi$ выбрано в честь преобразования Бореля (I.2.21), к которому (19) сводится для верхнетреугольных $\mathrm{gl}(2, \mathbb{C})$-значных сходящихся рядов $\varphi \in \mathrm{Gev}_0$ (см. (I.2.23)).

Прямое преобразование рассеяния $L : \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}} \to \mathrm{Gev}_1$ определяется в § II.2 формулой

$$Lq(z) := \mu(x_0, z) - I, \tag{20}$$

где $\mu(x, z) = I + \sum_{k=0}^{\infty} m_k(x) z^{-(k+1)}$ есть единственное решение дифференциального уравнения $\mu_x = (az + q(x))\mu - \mu az$ в классе формальных степенных рядов указанного вида с $m_k \in \mathcal{R}(x_0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, такое, что все коэффициенты ряда $\mu(x_0, z) - I$ внедиагональны. Обозначение Lq выбрано в честь преобразования Лапласа (I.2.20), к которому (20) сводится в случае верхнетреугольных $\mathrm{gl}(2, \mathbb{C})$-значных потенциалов $q(x)$, являющихся целыми функциями экспоненциального типа (см. лемму I.6(B)). Первая часть следующего утверждения (теоремы II.2) показывает, что отображения L и B действительно взаимно обратны, если ограничиться только внедиагональными рядами из Gev_1 (как уже говорилось при определении пространства $\mathcal{D}_{1/m}$, это ограничение снимает неоднозначность, описанную в утверждении 5). Вторая часть утверждения 11 в соответствии с утверждением 9(B) гласит, что потенциалы, данные рассеяния которых принадлежат строго меньшему классу Жеврея, чем это необходимо для задачи Римана (17), являются глобально мероморфными по x.

Утверждение 11. (A) *Отображение $q \mapsto Lq$ есть биекция множества $\mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ на множество $\mathrm{Gev}_1^{\mathrm{od}}$ всех внедигональных рядов из Gev_1. Обратным отображением является сужение на $\mathrm{Gev}_1^{\mathrm{od}}$ отображения $B : \mathrm{Gev}_1 \to \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$, определенного в* (19).

(B) *Если $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ и $Lq \in \mathrm{Gev}_{1-0}$, то росток $q(x)$ аналитически продолжается до глобально мероморфной внедиагональной $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значной функции на $\mathbb{C}_x^1$, обладающей следующим свойством тривиальной монодромии во всех своих полюсах: при каждом $z \in \mathbb{C}$ вспомогательная линейная система $E_x = (az + q(x))E$ имеет глобально мероморфную фундаментальную систему решений или, эквивалентно, всякое голоморфное решение $u : D \to \mathbb{C}^n$ системы $u_x = (az + q(x))u$ на какой-либо области $D \subset \mathbb{C}_x^1$ аналитически продолжается до мероморфного решения на всем $\mathbb{C}_x^1$.*

В доказательстве утверждения 11 используется следующая теорема Я. Сибуя[31]. Пусть даны целые числа $m, \nu \geqslant 1$ и *обратимый* линейный оператор

[31] Y. Sibuya, Linear differential equations in the complex domain: problems of analytic continuation, Providence, AMS, 1990. См. особенно стр. 254–256.

$A : \mathbb{C}^\nu \to \mathbb{C}^\nu$. Пусть формальный степенной ряд $y(x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) z^{-k}$ от параметра $z \in \mathbb{C}$, коэффициенты которого $a_k(x)$ суть $\mathbb{C}^\nu$-значные голоморфные ростки в точке $x_0 \in \mathbb{C}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = z^m A y + \sum_{j=0}^{m-1} z^j B_j(x,y), \tag{21}$$

где все $B_j(x,y)$ суть $\mathbb{C}^\nu$-значные полиномы от компонент вектора y с коэффициентами из $\mathcal{O}(x_0)$. Тогда ряд $y(x_0,z)$ принадлежит классу Жеврея $\mathrm{Gev}_{1/m}$.

В наших применениях этой теоремы, $\mathbb{C}^\nu$ есть векторное пространство всех внедиагональных матриц $X \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$, а оператор $AX := [C,X]$ сопоставляет каждой такой матрице ее коммутатор с некоторой диагональной матрицей $C \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$. Роль матрицы C играет a в § II.2 и b в § II.3. Обратимость оператора A равносильна тому, что матрица C имеет простой спектр. Этим и объясняются принятые в нашей работе условия невырожденности на матрицы a и b.

Что касается сформулированного в утверждении 11(B) свойства тривиальной монодромии, то оно всего лишь выражает геометрический смысл компоненты $\gamma_+(x,z)$ решения задачи Римана (17) с $P(x,z) = a(x-x_0)z$, состоящий в том, что столбцы матрицы $\gamma_+(x,z)$ задают поле реперов в слоях тривиального расслоения, параллельное относительно изучаемой плоской связности. Иными словами, $\gamma_+(x,z)$ является фундаментальной системой решений вспомогательной линейной системы (линейная независимость столбцов матрицы $\gamma_+(x,z)$ вытекает из (18)).

Переходя к § II.3, напомним, что в нашей работе *солитонными уравнениями параболического типа* называются уравнения (или, собственно говоря, системы уравнений с частными производными) вида, уже указанного в (13):

$$q_t = [a, F_{m+1}(q)], \tag{22}$$

где $q(x,t)$ — неизвестная внедиагональная $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значная функция, $m \geqslant 2$ — заданное целое число, а через $F_0, F_1, F_2, \ldots$ обозначается последовательность дифференциальных полиномов по x, отвечающая некоторой последовательности диагональных матриц $a, b, c_1, c_2, \ldots \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ согласно утверждению 3(A), причем всегда предполагается выполненным условие невырожденности: *матрицы a, b имеют простой спектр.*

Обозначим через $\mathcal{R}(x_0,t_0)$ множество ростков всех голоморфных $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$-значных отображений в точке $(x_0,t_0) \in \mathbb{C}^2$, а через $\mathcal{R}(x_0,t_0)^{\mathrm{od}}$ множество всех внедиагональных ростков из $\mathcal{R}(x_0,t_0)$. *Локальная голоморфная задача Коши* для уравнения (22) состоит в том, что задан внедиагональный голоморфный росток $q_0 \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ и требуется найти росток $q \in \mathcal{R}(x_0,t_0)^{\mathrm{od}}$, удовлетворяющий уравнению (22) и начальному условию $q(x,t_0) = q_0(x)$.

Утверждение 12. (A) *Задача Коши* $q(x,t_0)=q_0(x)$ *для уравнения* (22) *допускает локальное голоморфное решение в точке* $(x_0,t_0)\in\mathbb{C}^2$ *тогда и только тогда, когда* $Lq_0\in\mathrm{Gev}_{1/m}$. *Если такое решение* $q(x,t)$ *существует, то только одно.*

(B) *Всякое голоморфное решение* $q(x,t)$ *уравнения* (22) *в произвольном бидиске* $D:=\{(x,t)\in\mathbb{C}^2\,|\,|x-x_0|<\delta_1,\ |t-t_0|<\delta_2\}$ *аналитически продолжается до функции, мероморфной в полосе* $S:=\{(x,t)\in\mathbb{C}^2\,|\,|t-t_0|<\delta_2\}$ *и обладающей свойством тривиальной монодромии по* x (*в смысле утверждения* 11(B)) *при каждом фиксированном* t. *При этом существует голоморфное решение* $q_0(x,t)$ *уравнения* (22) *в* D, *не допускающее аналитического продолжения ни через одну граничную точку полосы* S.

(C) *Оболочка мероморфности любого локального голоморфного решения* $q\in\mathcal{R}(x_0,t_0)^{\mathrm{od}}$ *уравнения* (22) *имеет вид* $\mathbb{C}^1_x\times X$, *где* X — *некоторая риманова область над* $\mathbb{C}^1_t$. *Обратно, для любой римановой области* $\pi: X\to\mathbb{C}^1_t$ *над* $\mathbb{C}^1_t$ *и любой точки* $(x_0,t_0)\in\mathbb{C}\times\pi(X)$ *существует локальное решение* $q\in\mathcal{R}(x_0,t_0)^{\mathrm{od}}$ *уравнения* (22) *с оболочкой мероморфности* $\mathbb{C}^1_x\times X$.

(D) *Если в обозначениях пункта* (A) *росток* $q_0(x):=q(x,t_0)$ *удовлетворяет* $Lq_0\in\mathrm{Gev}_{(1/m)-0}$, *то решение* $q(x,t)$ *рассматриваемой задачи Коши аналитически продолжается до внедиагональной* $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$*-значной функции, мероморфной на всем* $\mathbb{C}^2$ *и обладающей следующим свойством тривиальной монодромии по* x *и* t *во всех своих полюсах. Для каждого* $z\in\mathbb{C}$ *линейная система* $E_x=(az+q(x,t))E$, $E_t=(bz^m+\sum_{j=1}^m F_j(q)(x,t)z^{m-j})E$ (*заданная равенствами* (8) *с учетом* (14)) *имеет глобально мероморфную фундаментальную систему решений на* $\mathbb{C}^2_{xt}$.

Доказательство необходимости условия $Lq_0\in\mathrm{Gev}_{1/m}$ из пункта (A) для существования локального голоморфного решения задачи Коши проводится сведением уравнения, которому удовлетворяет формальное калибровочное преобразование нулевой связности $0\,dx+0\,dt$ в связность $U\,dx+V\,dt$ (задаваемую функцией $q(x,t)$ по формулам (14)), к виду (21) с переменной t вместо x и применением теоремы Сибуя (для чего нужно, чтобы матрица b имела простой спектр). Доказательство достаточности по существу такое же, как в утверждении 4, только разрешимость задачи Римана извлекается теперь из утверждения 9(A). Все остальные пункты утверждения 12 вытекают из пункта (A) и предыдущих утверждений. В замечаниях II.2–II.4 показано, что из локальной разрешимости задачи Коши $q(x,t_0)=q_0(x)$ для какого-либо уравнения (22) с номером $m\geqslant 2$ вытекает ее глобальная разрешимость для всех уравнений вида (22) с номерами $m'<m$, а также строится пример не конечнозонных начальных условий, для которых указанная задача глобально разрешима при всех $m\geqslant 2$.

Заметим, что утверждение 1 для уравнений (4) и (6) является весьма частным случаем утверждения 12(B) благодаря примерам, приведенным в конце п. I.2.1. (Уравнение Буссинеска (5) будет включено в область действия утверждения 12 только в § III.4.) Что касается утверждения 2 и его аналогов для старших уравнений иерархии фокусирующего нелинейного уравнения Шредингера, то они являются столь же частными случаями результатов § II.4, в котором все сказанное в § I.3 об унитарно-симметричных решениях, построенных в утверждении 4, переносится (в той мере, насколько это возможно) на класс всех локальных голоморфных унитарно-симметричных решений уравнений вида (22).

Всюду в § II.4 мы считаем, что диагональная матрица $a \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ косоэрмитова, а начальная точка x_0 вещественна: $x_0 \in \mathbb{R}$. Назовем росток $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ *симметричным*, если $q(\overline{x})^* = -q(x)$ для всех комплексных x в окрестности x_0 или, эквивалентно, если матрица $q(x)$ косоэрмитова для всех вещественных x в окрестности x_0. Следуя терминологии § I.3, будем также называть формальный степенной ряд $f \in I + \mathrm{Gev}_1$ *симметричным*, если равенство $f(\overline{z})^* f(z) \equiv I$ выполняется в смысле формальных степенных рядов. Связь между этими понятиями такова (см. лемму II.13(C)).

Утверждение 13. *Росток $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ симметричен тогда и только тогда, когда он имеет вид $q = B\varphi$ для некоторого симметричного ряда $f = I + \varphi \in I + \mathrm{Gev}_1$. При любом α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, росток $q \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$, удовлетворяющий включению $Lq \in \mathrm{Gev}_\alpha$, симметричен тогда и только тогда, когда $q = B\varphi$ для некоторого симметричного ряда $f = I + \varphi \in I + \mathrm{Gev}_\alpha$.*

Основной результат § II.4 обобщает утверждение 6 на случай расходящихся рядов и содержит утверждение 2 в виде весьма частного случая. Будем называть целую функцию $E : \mathbb{C} \to \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ *симметричной*, если $E(\overline{z})^* E(z) = I$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Ясно, что все значения такой функции — обратимые матрицы, т.е. автоматически имеем отображение $E : \mathbb{C} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Утверждение 14. (A) *Пусть $m \geqslant 1$ и $A_0 > 12B_0 > 0$. Если целая функция $E_0 \in E_m(B_0)$ и формальный ряд $f \in I + G_{1/m}(A_0)$ симметричны, то задача Римана $E_0 f^{-1} = \gamma_-^{-1}\gamma_+$ разрешима, т.е. для некоторых $A > B > 0$ найдется симметричная целая функция $\gamma_+ \in E_m(B)$ и симметричный формальный ряд $\gamma_- \in I + G_{1/m}(A)$ такие, что равенство $E_0 f^{-1} = \gamma_-^{-1}\gamma_+$ выполняется в смысле формальных рядов Лорана.*

(B) *Пусть $m \geqslant 2$ — целое число, $a, b, c_1, \dots, c_m \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ — диагональные косоэрмитовы матрицы, причем a и b имеют простой спектр, и $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$. Тогда всякое локальное голоморфное решение $q \in \mathcal{R}(x_0, t_0)^{\mathrm{od}}$ уравнения (22), для которого росток $q(x, t_0) \in \mathcal{R}(x_0)^{\mathrm{od}}$ симметричен, аналитически продолжается до мероморфной внедиагональной $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$-значной функции $q(x, t)$ на области $S_\varepsilon = \{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |t - t_0| < \varepsilon\}$ при некотором $\varepsilon > 0$, причем это продолжение голоморфно (не имеет полюсов) на $S_\varepsilon \cap \mathbb{R}^2_{xt}$.*

Доказательство пункта (A) основано на альтернативе Фредгольма для операторов, возникающих в доказательстве утверждения 9(A), а пункт (B) выводится из пункта (A) и утверждений 12(B), 13 по существу тем же способом, что и для сходящихся рядов в § I.3. Примеры, показывающие что в общем случае нельзя утверждать голоморфность продолженного решения $q(x,t)$ ни на каком множестве, большем чем указано в утверждении 14(B), строятся с помощью теоремы Коши–Ковалевской в доказательстве теоремы III.4(C).

Глава III посвящена приложениям результатов главы II к вопросам голоморфного и мероморфного продолжения решений скалярных (а не матричных, как в главе II) уравнений параболического типа, полученных редукциями систем (13) или (22).

Обозначим через $\mathcal{O}(x_0,t_0)$ множество всех ростков голоморфных функций в точке $(x_0,t_0)\in\mathbb{C}^2$. Скажем, что уравнение вида

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = a\frac{\partial^m u}{\partial x^m} + \Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{m-1}u}{\partial x^{m-1}}\right), \tag{23}$$

где $m > k \geqslant 1$ — целые числа, $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, а $\Phi(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{m-1})$ — произвольный полином с комплексными коэффициентами, обладает свойством *голоморфного* (*мероморфного*) *продолжения* (далее сокращенно СГП и СМП), если для любой точки $(x_0,t_0)\in\mathbb{C}^2$ и любого решения $u_0\in\mathcal{O}(x_0,t_0)$ этого уравнения существует голоморфная (мероморфная) функция $u(x,t)$ на полосе $\{(x,t)\in\mathbb{C}^2 \mid |t-t_0|<\varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon>0$, совпадающая с $u_0(x,t)$ в окрестности точки (x_0,t_0). Как показано в лемме III.1, постулированное здесь свойство автоматически влечет выполнение всех утверждений пунктов (B) и (C) утверждения 12, кроме свойства тривиальной монодромии.

Рассмотрим 4 семейства уравнений вида (23):

$$u_t = P(\partial_x)u, \tag{24}$$

$$u_t = au_{xx} + Q(u)u_x, \tag{25}$$

$$u_t = au_{xx} + R(u_x), \tag{26}$$

$$u_t = au_{xx} + S(u)u_x^2, \tag{27}$$

где $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, P,Q,R,S — полиномы, $\deg P \geqslant 2$. Какие из этих уравнений обладают СГП или СМП? Ответ на этот вопрос дается в теореме III.1: свойством голоморфного продолжения обладают те и только те из указанных уравнений, которые *линейны*, а свойство мероморфного продолжения имеет место тогда и только тогда, когда степени полиномов, задающих нелинейность, достаточно малы, а именно, $\deg Q \leqslant 1$, $\deg R \leqslant 1$, $S\equiv 0$. Доказательство этих утверждений опирается в своей положительной части на лемму III.2, принадлежащую, по-видимому, Г. С. Салехову[3] (но снабженную нами новым простым доказательством на основе утверждения 12(B)), а в отрицательной части — на лемму III.3, известную еще Ш. Брио и К. Буке (1855). Приводится также следующий пример контраста между СМП и СГП: хотя все локальные голоморфные решения (существующие в изобилии по теореме Коши–Ковалевской с x в роли времени) любого из уравнений

$$u_t = \partial_x(\partial_x + u)^{m-1}u, \qquad m = 3, 4, \dots \tag{28}$$

аналитически продолжаются до глобально мероморфных функций от x при каждом t, но если такое решение продолжается до целой функции от x хотя бы при одном значении t, то оно тождественно равно константе.

Пункт III.1.2 посвящен подробному обзору трех исторически сложившихся доказательств СГП для *линейных* уравнений вида (23) и для более общих линейных уравнений[2],[3],[4],[5]. В пункте III.1.3 вкратце перечислены направления современных исследований, наиболее близко подходящих к формулировке СМП для каких-либо нелинейных уравнений вида (23).

В § III.2 изучается вопрос о СГП и СМП для уравнений вида

$$u_t = au_{xxx} + Q(u)u_x, \tag{29}$$

$$u_t = au_{xxx} + R(u_x), \tag{30}$$

где $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, Q, R — полиномы. Ответ, содержащийся в теореме III.2, гласит, что эти уравнения обладают СГП тогда и только тогда, когда они линейны, а СМП имеет место в том и только том случае, когда $\deg Q \leqslant 2$, $\deg R \leqslant 2$. Примерами являются уравнение Кортевега–де Фриза ($Q(u) = bu$ для некоторого $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) и его модифицированная ($Q(u) = bu^2$) и потенциальная ($R(\xi) = b\xi^2$) версии. Доказательство положительной части основано на утверждении 12(B), а доказательство отрицательной части — на лемме III.3. Развитие этого круга идей позволяет нам установить в теореме III.3, что известное решение иерархии Кортевега–де Фриза в виде формального степенного ряда, изучавшееся Э. Виттеном[32] и М. Л. Концевичем[33], расходится по всем временны́м переменным, кроме первой.

В § III.3 установлено утверждение 1 (СМП во всех точках вещественной плоскости) для общего нелинейного уравнения Шредингера (6), а также утверждение 2 (о продолжении вещественно-аналитических решений в полосу на $\mathbb{R}^2_{xt}$) для фокусирующего случая $ab > 0$.

Утверждение 1 для уравнения Буссинеска (5) доказано в § III.4 в общем контексте *уравнений типа Кортевега–де Фриза.* Так называются эволюционные уравнения вида

$$L_t = [P, L], \tag{31}$$

[32]E. Witten, Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space //in: Surveys in diff. geom. (Cambridge MA, 1990), Lehigh Univ., Bethlehem PA, 1(1991), 243–310.

[33]M. L. Kontsevich, Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function // Comm. Math. Phys. 147(1992), 1–23.

где неизвестные функции — это коэффициенты $u_0, u_1, \dots, u_{n-2} \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ дифференциального оператора $L = \partial_x^n + \sum_{j=0}^{n-2} u_j(x,t)\partial_x^j$ фиксированного порядка $n \geqslant 2$, под L_t понимается оператор, полученный из L заменой всех его коэффициентов на их частные производные по t (и, очевидно, имеющий порядок не выше $n-2$), а оператор $P = \partial_x^r + \sum_{k=0}^{r-2} w_k(x,t)\partial_x^k$ фиксированного порядка $r \geqslant 2$ выбирается так, чтобы порядок оператора $[P, L] := PL - LP$ тоже не превосходил $n-2$. В полной аналогии с утверждением 3(B), это условие на коэффициенты $w_0, w_1, \dots, w_{r-2} \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ оператора P выполнено тогда и только тогда, когда

$$P = L_+^{r/n} + \sum_{k=0}^{r-2} \gamma_k(t) L_+^{k/n} \tag{32}$$

для произвольных ростков $\gamma_0, \dots, \gamma_{r-2} \in \mathcal{O}(t_0)$. Ограничиваясь, как и в (14), случаем, когда $\gamma_k(t) \equiv \gamma_k = \mathrm{const}$ в равенстве (32), мы можем записать эволюционную задачу (31) в виде системы $n-1$ уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = F_j(u_0, u_1, \dots, u_{n-2}), \qquad j = 0, 1, \dots, n-2, \tag{33}$$

где $F_0, F_1, \dots, F_{n-2}$ — полиномы от функций $u_0, u_1, \dots, u_{n-2}$ и их производных по x. Основной результат § III.4 (теорема III.5) представляет собой следующий точный аналог утверждения 12 для случая вспомогательной линейной системы (7) вместо (8).

Утверждение 15. *Пусть целые числа $n, r \geqslant 2$ взаимно просты и набор ростков $u_0, u_1, \dots, u_{n-2} \in \mathcal{O}(x_0, t_0)$ удовлетворяет в окрестности данной точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2$ системе* (33), *эквивалентной уравнению* (31) *для некоторого оператора P вида* (32) *с коэффициентами $\gamma_k(t) \equiv \gamma_k = \mathrm{const}$, $k = 0, 1, \dots, r-2$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(A) *Все ростки $u_0(x, t_0), u_1(x, t_0), \dots, u_{n-2}(x, t_0) \in \mathcal{O}(x_0)$ допускают аналитическое продолжение до функций $\widetilde{u}_0(x), \widetilde{u}_1(x), \dots, \widetilde{u}_{n-2}(x)$, мероморфных на всей плоскости $\mathbb{C}_x^1$ комплексного переменного x.*

(B) *Оператор $\widetilde{L} := \partial_x^n + \sum_{j=0}^{n-2} \widetilde{u}_j(x)\partial_x^j$ обладает следующим свойством тривиальной монодромии во всех полюсах своих коэффициентов: при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$ обыкновенное дифференциальное уравнение $\widetilde{L}\varphi = \lambda\varphi$ имеет фундаментальную систему решений, мероморфных на всей плоскости $\mathbb{C}_x^1$ переменного x. Иными словами, любое решение $\varphi \in \mathcal{O}(x_0)$ уравнения $\widetilde{L}\varphi = \lambda\varphi$ аналитически продолжается до мероморфной функции на $\mathbb{C}_x^1$.*

(C) *Все полюсы каждой из функций $\widetilde{u}_j(x)$, $j = 0, 1, \dots, n-2$, имеют порядок не выше $n-j$.*

(D) *Любое решение $u_0, u_1, \dots, u_{n-2} \in \mathcal{O}(D)$ системы* (33) *в бидиске $D := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \mid |x - x_0| < \delta_1,\ |t - t_0| < \delta_2\}$ аналитически продолжается до набора* *мероморфных функций в полосе $S := \{(x,t) \in \mathbb{C}^2 \mid |t-t_0| < \delta_2\}$ и, вообще говоря, не может быть аналитически продолжено дальше ни через одну граничную точку области S.*

(E) *Тем не менее, все решения $u_0, u_1, \dots, u_{n-2} \in \mathcal{O}(x_0,t_0)$ общего положения допускают аналитическое продолжение до набора мероморфных функций на всем пространстве $\mathbb{C}^2$ переменных x, t.*

Для доказательства мы, следуя В. Г. Дринфельду и В. В. Соколову[34], разлагаем оператор L в произведение n операторов первого порядка:

$$L = (\partial_x - v_n(x,t)) \dots (\partial_x - v_1(x,t))$$

для некоторых ростков $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{O}(x_0,t_0)$ и определяем (автоматически внедиагональный в силу равенства $v_1 + \ldots + v_n \equiv 0$) матричнозначный росток

$$q(x,t) := K^{-1} \operatorname{diag}(v_1(x,t), \dots, v_n(x,t)) K$$

с помощью матрицы $K \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ с элементами $K_{ij} = (\alpha_j)^{i-1}$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — все корни n-ой степени из единицы, перечисленные в произвольном порядке. Тогда вспомогательная линейная система (7), условием совместности которой является (31), принимает вид уравнений нулевой кривизны (8), (14) с номером $m = r$ для диагональных матриц

$$a := \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad b := a^r, \quad c_j := \gamma_{r-j} a^{r-j},\ j = 1, \dots, r.$$

Ясно, что матрица a имеет простой спектр. В то же время матрица b имеет простой спектр тогда и только тогда, когда r и n взаимно просты. В этих предположениях к полученному уравнению (13), эквивалентному (31), применимо утверждение 12. Из него и вытекают все пункты утверждения 15, кроме пункта (C), являющегося следствием широко известного критерия регулярной особой точки, принадлежащего Л. Фуксу (1868).

Глава IV начинается с изложения подхода К. Уленбек[26] к задаче описания гармонических отображений сферы Римана S^2 (с обычной сферической метрикой) в унитарную группу $U(n)$, снабженную метрикой Киллинга $\langle A, B \rangle = \operatorname{Re}\operatorname{tr} AB^*$. Рассмотрим функционал энергии

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{C}} |\phi^{-1} d\phi|^2 \, dxdy = 2 \int_{\mathbb{C}} |\phi^{-1} \overline{\partial} \phi|^2 \, dxdy \tag{34}$$

на множестве всех гладких отображений $\phi : \mathbb{C} \to U(n)$. Здесь $\overline{\partial}\phi = (\phi_x + i\phi_y)/2$ означает производную по $\overline{z}$, а норма матрицы A определяется как $|A|^2 =$

[34]В. Г. Дринфельд и В. В. Соколов, Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега–де Фриза // Итоги науки техн. Соврем. проблемы математики. 24(1984), 81–180.

$\mathrm{tr}(AA^*)$. *Гармонические отображения из* S^2 *в* $U(n)$ — это критические точки функционала $E(\phi)$, т.е. решения уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\partial(\phi^{-1}\overline{\partial}\phi) + \overline{\partial}(\phi^{-1}\partial\phi) = 0$$

с $E(\phi) < \infty$, где $\partial\psi = (\psi_x - i\psi_y)/2$ означает производную по z. Простейшие примеры таких решений задаются голоморфными и антиголоморфными отображениями из $S^2 = \mathbb{C}P^1$ в комплексный грассманиан $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$, вложенный в унитарную группу $U(n)$ в качестве вполне геодезического подмногообразия по формуле $V \mapsto \phi = I - 2Q$, где $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ есть ортопроектор с образом V. Результат Уленбек[26] гласит, что для любого гармонического отображения $\phi : S^2 \to U(n)$ найдется последовательность гармонических отображений $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_m : S^2 \to U(n)$ такая, что ϕ_0 есть постоянное отображение (или, эквивалентно, решение нулевой энергии), $\phi_m = \phi$, а каждое отображение ϕ_{j+1} получается из ϕ_j добавлением некоторого ϕ_j-*унитона*. Последнее означает, что $\phi_{j+1}(\zeta) = \phi_j(\zeta)(I - 2P_j(\zeta))$ для некоторого семейства $\{P_j(\zeta) \,|\, \zeta \in \mathbb{C}\}$ ортопроекторов на $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих уравнениям

$$PAP^{\perp} = 0, \qquad P^{\perp}AP + 2P^{\perp}\overline{\partial}P = 0, \tag{35}$$

где $P = P_j$ есть указанное семейство проекторов, а $A = \phi_j^{-1}\overline{\partial}\phi_j$ есть логарифмическая $\overline{\partial}$-производная отображения ϕ_j. Дж. Валли[35] вывел из (35) формулу для скачка энергии

$$E(\phi_{j+1}) - E(\phi_j) = 8\pi c_1(P_j)[S^2], \tag{36}$$

где $c_1(P_j)$ есть первый класс Чженя векторного расслоения на S^2, слоем которого над точкой $\zeta \in S^2$ является образ проектора $P_j(\zeta)$, а правая часть (36) с точностью до множителя 8π равна значению этого класса когомологий на фундаментальном цикле базы $[S^2] \in H_2(S^2)$. Поскольку числа $c_1(P_j)[S^2]$ всегда целые, отсюда вытекает, что энергия любого гармонического отображения из S^2 в $U(n)$ есть целое кратное 8π. Неизвестно, как можно было бы получить этот результат без теории унитонов.

В начале XXI столетия потребности физики (теории струн) и некоммутативной геометрии привели к рассмотрению следующего "проквантованного по Вейлю" варианта задачи об описании гармонических двумерных сфер в унитарной группе[27]. Пусть H есть сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_0, e_1, \ldots\}$. Зададим неограниченный оператор a на H с областью определения $\mathrm{dom}(a) = \{x \in H \mid \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)|x_j|^2 < \infty\}$ по формуле $a(e_j) = \sqrt{j}e_{j-1}$ для $j = 0, 1, 2, \ldots$. Сопряженный к нему оператор a^*

[35] G. Valli, On the energy spectrum of harmonic 2-spheres in unitary groups // Topology 27(1988), 129–136.

имеет ту же область определения $\mathrm{dom}(a^*) = \mathrm{dom}(a)$ и действует по формуле $a^*(e_j) = \sqrt{j+1}e_{j+1}$. Для каждого целого $n \geqslant 1$ распространим обозначения a и a^* на гильбертово пространство $H^n := H \oplus H \oplus \ldots \oplus H$ (n слагаемых) $= \mathbb{C}^n \otimes H$, полагая $a(x_1, \ldots, x_n) := (ax_1, \ldots, ax_n)$ и аналогично для a^*. Теперь при каждом значении параметра $\theta > 0$ заменим отображения $\phi : \mathbb{C} \to U(n)$ на унитарные операторы $\Phi \in U(H^n)$, производные $\overline{\partial}$ и ∂ — на коммутаторы с $(2\theta)^{-1/2}a$ и $-(2\theta)^{-1/2}a^*$ соответственно, а взятие интеграла по $\mathbb{C}$ — на взятие $2\pi\theta\,\mathrm{Tr}$, где $\mathrm{Tr}\,X$ означает след ядерного оператора X на H^n. Тогда функционал (34) превратится в не зависящий от θ функционал

$$E(\Phi) := 2\pi\|[a, \Phi]\|^2_{\mathrm{HS}} \tag{37}$$

на множестве всех операторов $\Phi \in U(H^n)$ таких, что коммутатор $[a, \Phi]$ плотно определен и продолжается по непрерывности со своей области определения на все H^n, причем это продолжение принадлежит классу $\mathrm{HS}(H^n)$ операторов Гильберта–Шмидта. Здесь $\|A\|^2_{\mathrm{HS}} := \mathrm{Tr}(AA^*)$ означает квадрат нормы Гильберта–Шмидта. Чтобы избежать рассмотрения тонких вопросов, связанных с областями определения различных операторов, но сохранить геометрические аналогии, мы будем дополнительно предполагать, что оператор $\Phi - \Phi_0$ имеет конечномерный образ для какого-либо оператора вида $\Phi_0 = U_0 \otimes I$, где $U_0 \in U(n)$, а I есть тождественный оператор на H (тогда $E(\Phi_0) = 0$).

Основной целью главы IV является развитие теории унитонов для критических точек функционала (37) (далее именуемых просто *решениями* $U(n)$-*модели*), доказательство целочисленности энергии всех решений (в надлежащих единицах измерения) и описание пространств всех решений достаточно малой энергии.

В § IV.2 мы вводим обозначения и обсуждаем различные классы решений $U(n)$-модели без привлечения теории унитонов. Сначала выводятся различные формы записи уравнений экстремалей и устанавливается эффект эллиптической регулярности: для каждого решения Φ с $\mathrm{im}(\Phi - \Phi_0) \subset \mathrm{dom}(a^2)$ автоматически имеем $\mathrm{im}(\Phi - \Phi_0) \subset \mathrm{dom}(a^k)$ для всех $k \geqslant 2$. Затем рассмотрены решения энергии 0 и *грассмановы решения* (т.е. решения вида $I - 2P$ для некоторого ортопроектора $P : H^n \to H^n$).

В § IV.3 изложены общие результаты теории унитонов, начиная с некоммутативных аналогов класса Чженя в формуле (36) и процедуры добавления унитона (35). Из существования канонических отрицательных унитонов (п. IV.3.3) выводится наличие унитонной факторизации и целочисленность энергии (с точностью до множителя 8π) всех изучаемых решений. В оставшейся части § IV.3 введено понятие *канонического ранга* решения и дано описание решений с наименьшим и наибольшим возможным значением канонического ранга при данной энергии, а также установлены некоторые общие свойства грассмановых решений, которые затем иллюстрируются на примере диагональных решений

$U(1)$-модели. В частности, в п. IV.3.5 вводится важное для дальнейшего понятие *дефекта* грассманова решения.

В § IV.4 изучаются пространства решений $U(1)$-модели, отличающихся от тождественного оператора на конечномерный. Основными целочисленными характеристиками таких решений являются нормированная энергия e, канонический ранг r и минимальное унитонное число u, всегда удовлетворяющие неравенствам $r \leqslant e$ и $u \leqslant e$. В п. IV.4.2 мы описываем множество всех BPS-*решений*, т.е. решений с $u = 1$ или, что то же самое, некоммутативных аналогов голоморфных отображений из $\mathbb{C}P^1$ в грассманианы, вложенные в $U(n)$. Оказывается, что все BPS-решения энергии e составляют пространство $\mathbb{C}^e$, вещественно-аналитически вложенное в унитарную группу $U(H)$ гильбертова пространства H. Это автоматически дает описание всех решений, для которых либо $e \leqslant 2$, либо $r = 1$, либо $r = e$: все они являются BPS-решениями. В п. IV.4.3 доказано, что всякое грассманово решение G дефекта 2 порождает сферу неграссмановых решений, интерполирующую между G и некоторым BPS-решением той же энергии. Поскольку любое не-BPS-решение с $r = e - 1$ принадлежит одной из этих сфер, мы автоматически получаем описание всех решений с $e = 3$ (п. IV.4.4). В п. IV.4.5 установлено, что множество всех не-BPS-решений энергии e и канонического ранга 2 является прямым произведением $\mathbb{C}^1$ на цепочку из $[(e-1)/2]$ двумерных сфер, последовательно склееных друг с другом своими полюсами. Это автоматически дает описание случая $e = 4$ (п. IV.4.6). В п. IV.4.7 изучены случаи $r = e - 2$ (частично) и $e = 5$. Кроме уже известных нам множеств решений с $e = 5, r = 4$ (3-параметрическое семейство сфер) и $e = 5, r = 2$ (произведение $\mathbb{C}^1$ на цепочку из двух сфер), найдено множество решений с $e = 5, r = 3$: оно состоит из 3 непересекающихся экземпляров $\mathbb{C}^3 \setminus \mathbb{C}^2$, расположенных вокруг общей оси $\mathbb{C}^2$ как 3 листа книги вокруг переплета. В заключительном п. IV.4.8 мы вкратце суммируем все полученные результаты.

Список публикаций автора по теме диссертации

1. Об одном варианте задачи Римана в теории интегрируемых систем. Доклады Росс. Акад. Наук, 390 (2003), вып. 3, 301–303.

2. Достаточное условие разрешимости задачи Римана и его приложения к теории интегрируемых систем. “Геометрический анализ и его приложения”. Труды международной школы-конференции, г. Волгоград (24.05.04 — 30.05.04). Изд-во Волгоградского госуд. ун-та, 2005. Стр. 33–43.

3. Задача Римана и матричнозначные потенциалы со сходящейся функцией Бейкера–Ахиезера. Теор. и Матем. Физика, 144 (2005), вып. 3, стр. 453–471.

4. Замечания о локальном варианте метода обратной задачи рассеяния. Труды Матем. Института им. В.А.Стеклова РАН, 253 (2006), стр. 46–60.

5. A noncommutative uniton theory. Journal of Geometry and Symmetry in Physics, 10 (2007), pages 1–7.

6. Локальная голоморфная задача Коши для солитонных уравнений параболического типа. Доклады Росс. Акад. Наук, 420 (2008), стр. 14–17.

7. (совместно с А. В. Домриной) О расходимости ряда Концевича–Виттена. Успехи Матем. Наук 63 (2008), вып. 4, стр. 185–186.

8. Некоммутативные унитоны. Теор. и Матем. Физика, 154 (2008), вып. 2, стр. 220–239.

9. Пространства модулей решений некоммутативной сигма-модели. Теор. и Матем. Физика 156 (2008), вып. 3, стр. 307–327.

10. Мероморфное продолжение решений солитонных уравнений. Известия АН Сер. Матем. 74 (2010), вып. 3, стр. 23–44.

11. О голоморфных решениях уравнений типа Кортевега–де Фриза, Труды Московского Матем. Общества 73 (2012), выпуск 2, стр. 241–257.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Тираж 100 экз.