Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В.А.Стеклова
Российской академии наук

На правах рукописи

Дьяконова Елена Евгеньевна

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Павлов Юрий Леонидович
зав. отделом лаборатории теории вероятностей
и компьютерной статистики
ФГБУН Институт прикладных математических
исследований Карельского научного центра РАН

доктор физико-математических наук,
профессор Топчий Валентин Алексеевич
директор Омского филиала ФГБУН Институт
математики им. С. Л. Соболева СО РАН

доктор физико-математических наук,
профессор Хохлов Юрий Степанович
зав. кафедрой теории вероятностей
и математической статистики факультета
физико-математических и естественных наук
ФГБОУ ВПО "Российский университет
дружбы народов"

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО "Новосибирский национальный
исследовательский государственный университет"

Защита диссертации состоится 21 февраля 2013 года в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.022.01 при МИАН по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, 9-й этаж, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН.

Автореферат разослан 2013 года.
Ученый секретарь диссертационного
совета Д 002.022.01 при МИАН
доктор физико-математических наук,
профессор В. А. Ватутин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория ветвящихся процессов изучает вероятностные модели, отражающие поведение различных совокупностей размножающихся и погибающих частиц. Основы этой теории были заложены в середине двадцатого столетия работами Колмогорова А.Н. и Дмитриева Н.А., Севастьянова Б.А., Яглома А.М., Беллмана Р. и Харриса Т. С тех пор теория ветвящихся процессов постоянно и интенсивно развивается.

Изложению теории ветвящихся процессов посвящены широко известные монографии Севастьянова Б.А., Харриса Т., Атрейя К. и Нея П., Мода К., Ягерса П. Классической моделью ветвящегося процесса является процесс Гальтона-Ватсона, описывающий число частиц в популяции, в которой законы размножения частиц не меняются от поколения к поколению. Стремление исследовать более сложные ситуации, когда эти законы меняются с течением времени, привело к формированию в семидесятых годах двадцатого столетия двух новых направлений в теории ветвящихся процессов.

Для первого из этих направлений характерно исследование ветвящихся процессов в среде, изменяющейся детерминированным образом (так называемые, неоднородные процессы). Под средой при этом подходе понимается совокупность заданных для каждого поколения законов размножения частиц. В посвященных этому направлению работах таких авторов, как Линдвалл Т., Ягерс П., Д'Суза Ж., Иржина М., Агрести А., Биггинс Дж., описаны условия, налагаемые на среду, при выполнении которых ветвящийся процесс в изменяющейся среде обладает тем или иным важным свойством. Например, вырождается с вероятностью единица, или является надкритическим, или имеет определенную скорость роста и т.д.

Вторым направлением является теория ветвящихся процессов в случайной среде. Внимание к таким процессам было вызвано стремлением выявить наиболее характерные свойства различных ветвящихся процессов в изменяющихся средах. Поэтому в рамках этого направления предполагается, что сами среды являются реализациями некоторого случайного механизма. Для исследования ветвящегося процесса в случайной среде нужно знать вероятностную природу этого механизма.

Одним из интереснейших объектов исследования в этой области ветвящихся процессов являются процессы Гальтона-Ватсона в случайной среде, естественным образом обобщающие классические процессы Гальтона-Ватсона. Опишем модель ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона в случайной среде подробнее.

Пусть $J^p := \{\mathbf{s} = (s_1, ..., s_p) : 0 \leqslant s_i \leqslant 1, i = 1, ..., p\}, p \geqslant 1,$ – p-мерный единичный куб с вершиной в начале координат, $\mathbf{N}_0 := \{0, 1, 2, ...\}$ – множество неотрицательных целых чисел и $\mathbf{N}_0^p := \{\mathbf{t} = (t_1, ..., t_p) : t_i \in \mathbf{N}_0, i = 1, ..., p\}$. Для $\mathbf{s} = (s_1, ..., s_p) \in J^p$ и $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_p) \in \mathbf{N}_0^p$ положим $\mathbf{s}^t := \prod\limits_{i=1}^{p} s_i^{t_i}$.

Рассмотрим цепь Маркова $\{\zeta_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ с множеством состояний Θ. Будем называть эту последовательность марковской случайной средой, а в случае, когда $\{\zeta_n\}$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин, будем говорить, что случайная среда порождается последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. С каждым значением $\theta \in \Theta$ свяжем p-мерный вектор $\mathbf{f}_{(\theta)}(s) = (f_{(\theta)}^{(1)}(\mathbf{s}), ..., f_{(\theta)}^{(p)}(\mathbf{s}))', \mathbf{s} \in J^p$, вероятностных производящих функций $f_{(\theta)}^{(i)}(\mathbf{s}), i = 1, ..., p$, соответствующих $p-$мерным распределениям вероятностей $\pi_{(\theta)}^{(i)}(\{\mathbf{t}\}), \mathbf{t} \in \mathbf{N}_0^p$. Таким образом,

$$f_{(\theta)}^{(i)}(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{N}_0^p} \pi_{(\theta)}^{(i)}(\{\mathbf{t}\})\, \mathbf{s}^{\mathbf{t}},\ i = 1, ..., p.$$

Последовательность случайных $p-$мерных векторов $\mathbf{Z}(n) = (Z_1(n), ..., Z_p(n)),\ n \in \mathbf{N}_0$, с неотрицательными целочисленными координатами называется ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона с p типами частиц в случайной марковской среде ζ, если $\mathbf{Z}(0)$ не зависит от ζ и для всех $n \in \mathbf{N}_0$, $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_p) \in \mathbf{N}_0^p$ и $\theta^{(0)}, \theta^{(1)}, ... \in \Theta$

$$\mathcal{L}(\mathbf{Z}(n+1) \mid \mathbf{Z}(0), ..., \mathbf{Z}(n-1), \mathbf{Z}(n) = (z_1, ..., z_p), \zeta = (\theta^{(0)}, \theta^{(1)}, ...))$$

$$= \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{z_i} \bar{\xi}_i^{(j)}(n)\right), \tag{1}$$

где случайные $p-$мерные векторы $\bar{\xi}_i^{(1)}(n), \bar{\xi}_i^{(2)}(n), ..., \bar{\xi}_i^{(z_i)}(n), i = 1, ..., p$, имеют целочисленные неотрицательные координаты, независимы в совокупности, и, кроме того, при каждом i случайные векторы $\bar{\xi}_i^{(1)}(n), \bar{\xi}_i^{(2)}(n), ..., \bar{\xi}_i^{(z_i)}(n)$ распределены согласно вероятностной мере $\pi_{\left(\theta^{(n)}\right)}^{(i)}$.

Соотношение (1) задает ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона в случайной среде, в котором величина $Z_i(n), i = 1, ..., p$, – это число частиц типа i в $n-$ом поколении. Частицы в этом процессе эволюционируют следующим образом. Если $\zeta_n = \theta \in \Theta$, то все частицы типа i, принадлежащие n-му поколению, производят потомков согласно закону распределения $\pi_{(\theta)}^{(i)}$, порождаемому p-мерной производящей функцией $f_{(\theta)}^{(i)}(s)$, независимо от других частиц этого поколения и предыстории процесса. Таким образом, если $\zeta_n = \theta$, то в момент времени $n+1$ потомство частицы типа i из n-го поколения описывается случайным вектором $\bar{\xi}_i(n)$ с распределением $\pi_{(\theta)}^{(i)}$.

Отметим, что модели многотипных и однотипных ветвящихся процессов как в случайной среде, так и без нее, естественным образом возникают в различных задачах биологии и физики (см. монографии[1, 2]).

Ветвящиеся процессы в случайной среде – сложные вероятностные объекты, исследование которых требует значительных усилий. Впервые эта модель была рассмотрена в

[1] *Haccou P., Jagers P., Vatutin V.A.* Branching Processes: Variation, Growth and Extinction of Populations. — Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

[2] *Ватутин В.А., Телевинова Т.М., Чистяков В.П.* Вероятностные методы в физических исследованиях. — М.: Наука, 1985.

основополагающей работе Смита В. и Вилкинсона У.[3], где были найдены необходимые и достаточные условия невырождения процесса для случая среды, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Затем Атрейя К. и Карлин С.[4] проанализировали свойства ветвящихся процессов, находящихся под влиянием случайной среды более общего вида. С тех пор было опубликовано большое количество работ, посвященных этой тематике (см., например, соответствующую библиографию в обзоре Ватутина В.А. и Зубкова А.М.[5], дающую представление о результатах, опубликованных до 1985 г., и более современные работы[6]).

Основными характеристиками, привлекающими внимание ученых при исследовании свойств ветвящихся процессов в случайной среде, являются асимптотика вероятности невырождения и функциональные предельные теоремы о распределении числа частиц в процессе, как правило, при условии невырождения процесса к далекому моменту времени.

Отметим, что бóльшая часть публикаций по теории ветвящихся процессов в случайной среде посвящена изучению ветвящихся процессов с одним типом частиц. Многотипные же ветвящиеся процессы в случайной среде, ввиду значительной сложности модели, являются гораздо менее исследованным объектом. В этой связи можно упомянуть работы Танни Д.[7] и Каплана Н.[8], где были найдены условия невырождения процесса с вероятностью единица и установлены предельные теоремы о распределении числа частиц в процессе.

До появления работ автора диссертации [7], [13], [16] вопрос об асимптотике вероятности невырождения критических и докритических многотипных ветвящихся процессов в случайной среде оставался открытым даже для случая среды, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, не говоря

[3] *Smith W.L., Wilkinson W.E.* On branching processes in random environments. — Ann. Math. Stat., 1969, v. 40, p. 814–827.

[4] *Athreya K.B., Karlin S.* On branching processes with random environments, I: Extinction probability, II: Limit theorems. — Ann. Math. Statist., 1971, v. 42, N 5,6, p. 1499–1520, 1843–1858.

[5] *Ватутин В.А., Зубков А.М.* Ветвящиеся процессы I. — В сб.: Итоги науки и техники: Теория вероятностей, Математическая статистика, Кибернетика, т. 28, М.: ВИНИТИ, 1985, с. 3–67.

[6] *Козлов М.В.* Условная функциональная предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. — Доклады РАН, 1995, т. 344, N 1, с. 12–15; *Afanasyev V.I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V.A.* Criticality for branching processes in random environment. — Ann. Probab., 2005, v. 33, N 2, p. 645–673; *Bansaye V., Boeinghoff C.* Upper large deviations for branching processes in random environment with heavy tails. — Electron. J. Probab., 2011, v. 16, N 69, p. 1900–1933; *Afanasyev V.I., Boeinghoff C., Kersting G., Vatutin V.A.* Limit theorems for weakly subcritical branching processes in random environment. — J. Theoret. Probab., 2012, v. 25, N 3, p. 703–732.

[7] *Tanny D.* On multitype branching processes in a random environment. — Adv. Appl. Prob., 1981, v. 13, N 3, p. 464–497.

[8] *Kaplan N.* Some results about multidimentional branching processes with random environments. — Ann. Prob., 1974 v. 2, N 3, p. 441–455.

уже о марковской случайной среде.

Заметим, что даже для процессов с одним типом частиц нахождение асимптотики вероятности невырождения ветвящегося процесса $\{Z(n)\}$ в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, оказалось непростой задачей. Как оказалось, асимптотика вероятности невырождения такого процесса существенным образом зависит от поведения **случайного блуждания** $\{S_n, n \in \mathbf{N}_0\}$, **сопровождающего** процесс $\{Z(n)\}$. Это блуждание определяется соотношением

$$S_0 = 0, S_n = X_1 + \cdots + X_n, n > 1,$$

где $X_n = \ln f'_{n-1}(1), n \geqslant 1$, а $f_n(s)$ – производящая функция распределения числа непосредственных потомков частиц n-го поколения. Козлов М.В.[9] впервые обнаружил глубокую связь между распределением числа частиц в ветвящихся процессах и свойствами сопровождающих их случайных блужданий.

Афанасьев В.И., Ватутин В.А., Гайгер Й. и Керстинг Г.[10] ввели классификацию ветвящихся процессов с одним типом частиц, эволюционирующих в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Эта классификация основана на свойствах случайных блужданий, сопровождающих процессы. Согласно данной классификации однотипный ветвящийся процесс $\{Z(n),\ n \in \mathbf{N}_0\}$ называется *докритическим*, если с вероятность 1

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty;$$

критическим, если с вероятность 1

$$\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty,\ \limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty;$$

надкритическим, если с вероятность 1

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty.$$

Вырожденный случай $S_n = 0$ для всех $n = 0, 1, 2, ...$, в настоящей работе не рассматривается. Приведенная выше классификация естественным образом обобщает классическую классификацию, предложенную ранее в работах Смита В. и Вилкинсона В.[3], Атрейя К. и Карлина С.[4], Танни Д.[11] Эта классификация предполагала существование конечного математического ожидания у случайной величины $X_1 = \ln f_0{}'(1)$ и основывалась на знаке величины $\mathbf{E}X_1 = \mathbf{E}\ln f_0{}'(1)$.

[9] *Козлов М.В.* Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. 21, в. 4, с. 813–825.

[10] *Afanasyev V.I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V.A.* Criticality for branching processes in random environment. – Ann. Probab., 2005, v. 33, N 2, p. 645-673

[11] *Tanny D.* Limit theorems for branching processes in a random environment. — Ann. Probab., 1977, v. 5, p. 100–116.

Существуют два подхода к исследованию ветвящихся процессов в случайной среде. При одном из них (английский термин – quenched approach) характеристики, связанные со свойствами ветвящегося процесса в случайной среде (например, такие, как вероятность вырождения процесса или закон распределения числа частиц в момент n), трактуются как случайные величины или меры, зависящие от реализаций среды (см., например, работы[4,11,12]). Такую ситуацию мы будем называть эволюцией процесса в замороженной среде. При другом подходе (annealed approach) производится усреднение упомянутых характеристик относительно распределения, заданного на множестве всевозможных реализаций среды (см., например, работы[9,10], а также статьи[13,14]).

Для случая замороженной среды свойства вероятности невырождения процесса рассматривали, например, Атрейя К. и Ней П.[12], Атрейя К. и Карлин С.[4], Танни Д.[11] В этих работах для случая $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$ было установлено, что вероятность невырождения критических и докритических процессов равна 1 для почти всех процессов.

В рамках annealed approach асимптотика вероятности невырождения докритического ветвящегося процесса с одним типом частиц в случайной среде исследовалась Афанасьевым В.И.[15], Гюиварчем И. и Лиу К.[16] и в более широких условиях Афанасьевым В.И., Боингхоффом К., Ватутиным В.А. и Керстингом Г.[17] Было установлено, что указанная асимптотика существенно зависит от знака величины $\mathbf{E}X_1e^{X_1}$. В ситуации, когда $\mathbf{E}X_1 = 0, \mathbf{E}X_1^2 < \infty$, асимптотика вероятности невырождения однотипного критического ветвящегося процесса в случайной среде была найдена Козловым М.В.[9] для случая дробно-линейных производящих функций $f_n(s)$. Вопрос о нахождении асимптотики вероятности невырождения для произвольных производящих функций долгое время оставался открытым. Лишь в 2000 г. Гайгеру Й. и Керстингу Г.[18] удалось найти асимптотическое представление для вероятности невырождения в предположениях $\mathbf{E}X_1 = 0, \mathbf{E}X_1^2 < \infty$.

[12] *Athreya K.B., Ney P.E.* Branching Processes. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1972.

[13] *Borovkov K.A., Vatutin V.A.* Reduced critical branching processes in random environment. — Stoch. Proc. Appl., 1997, v. 71, p. 225–240.

[14] *Афанасьев В.И.* Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. – Дискретная математика, 1997, т. 9, N 3, с. 52–67; *Афанасьев В.И.* Функциональная предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. — Дискретная математика, 2001, т. 13, N 4, с. 73-91; *Ватутин В.А.* Редуцированные ветвящиеся процессы в случайной среде. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 1, с. 100–126.

[15] *Афанасьев В.И.* Предельные теоремы для условного случайного блуждания и некоторые применения. Диссертация кандидата наук. — М.: МГУ, 1980.

[16] *Guivarc'h Y., Liu Q.* Proprietes asymptotique des processus de branchement en environment aletoire. — C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math., 332, 2001, p. 339–344.

[17] *Afanasyev V.I., Boeinghoff C., Kersting G., Vatutin V.A.* Limit theorems for weakly subcritical branching processes in random environment. — J. Theoret. Probab., 2012, v. 25, N 3, p. 703–732.

[18] *Geiger J., Kersting G.* The survival probability of a critical branching process in random environment.— Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 607–615.

До появления работ Ватутина В.А. и Дьяконовой Е.Е. [9], [10], [21] – [23] вопрос о поведении в рамках quenched approach асимптотики вероятности невырождения критического ветвящегося процесса, допускающего возможность $\mathbf{E}X_1^2 = \infty$, а тем более не требующего существования математического ожидания $\mathbf{E}X_1$, оставался нерешенным, поскольку ранее критический ветвящийся процесс в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, в рамках quenched approach, рассматривался в лишь случае $\mathbf{E}X_1 = 0, \mathbf{E}X_1^2 < \infty$ (см. работы Атрейя К. и Ней П.[12], Атрейя К. и Карлин С.[4], Танни Д.[11]).

При изучении свойств ветвящегося процесса большой интерес представляет структура генеалогического дерева процесса, которую можно описать при помощи редуцированного процесса $\{Z(k,m), 0 \leqslant k \leqslant n < \infty\}$, где $Z(k,m)$ – число частиц, существовавших в процессе в момент времени k и имеющих ненулевое потомство в момент времени n. Редуцированные процессы для обычных процессов Гальтона-Ватсона изучали Фляйшманн К. и Прен У.[19], Зубков А.М.[20], Фляйшманн К. и Зигмунд-Шультце Р.[21] Первые результаты для редуцированных ветвящихся процессов в случайной среде с дробно-линейными производящими функциями получили, применяя annealed approach (т.е. усредняя характеристики и меры относительно распределения P, заданного на пространстве сред), Боровков К.А. и Ватутин В.А.[13], Фляйшманн К. и Ватутин В.А.[22] В дальнейшем Ватутин В.А.[23] обобщил результаты работы[13] и доказал, используя annealed approach, условную предельную теорему о распределении числа частиц в критических редуцированных ветвящихся процессах в случае производящих функций общего вида.

Редуцированные ветвящиеся процессы в замороженной среде впервые исследовали Ватутин В.А. и Дьяконова Е.Е. в [21]. Дальнейшее развитие этого направления нашло отражение в диссертации (см. работу [12]).

Исследование различных моделей ветвящихся процессов с разнообразными типами миграции важно как само по себе, так и в связи с различными приложениями, в частности, в биологии[1]. Критический процесс Гальтона-Ватсона с миграцией исследовали Нагаев С.В. и Хан Л.В.[24], а также Янев Г. и Янев Н.[25] Ветвящиеся процессы с им-

[19] *Fleischmann K., Prehn U.* Ein Grenzfersatz für subkritische Verzweigungsprozesse mit eindlich vielen Typen von Teilchen. — Math. Nachr., 1974, v. 64, p. 233–241.

[20] *Зубков А.М.* Предельные распределения расстояния до ближайшего общего предка. — Теория вероятн. и ее примен., 1975, т. 20, в. 3, с. 614–623.

[21] *Fleischmann K., Siegmund-Schultze R.* The structure of reduced critical Galton-Watson processes. — Math. Nachr., 1977, v. 79, p. 357–362.

[22] *Fleischmann K., Vatutin V.A.* Reduced subcritical branching processes in random environment. — Adv. Appl. Probab., 1999, v. 31, N 1, p. 88–111.

[23] *Ватутин В.А.* Критические редуцированные процессы в случайной среде. – Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 47, в. 1, с. 21-38.

[24] *Нагаев С.В., Хан Л.В.* Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона с миграцией. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, в. 3, с. 523–534.

[25] *Yanev G.P., Yanev N.M.* On a new model of branching migration processes. — C.R. Acad. Bulg. Sci.,

миграцией анализировал Зубков А.М. в работе[26]. Фостер Дж.[27] и Пейкс А.[28] изучали критические ветвящиеся процессы, в которых иммиграция в поколении n происходит лишь в том случае, когда в процессе в этот момент нет частиц. Модель критического процесса Гальтона-Ватсона с эмиграцией одной частицы в каждом поколении была исследована Ватутиным В.А.[29] Однако все эти работы рассматривали ветвящиеся процессы с миграцией в предположении, что среднее значение числа потомков одной частицы в следующем поколении фиксировано. Описанные в работах автора диссертации [1] – [3] переходные явления для процессов с миграцией, которые были затем перенесены в статьях [5], [6] на случай марковской случайной среды, явились актуальной проблемой в теории ветвящихся процессов.

Цель работы. Основной целью настоящей работы является изучение свойств однотипных и многотипных ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона в случайной среде.

Научная новизна. Предложен новый метод исследования многотипных ветвящихся процессов в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Этот метод связан с переходом к изучению сопровождающего случайного блуждания специального вида. С помощью предложенного подхода установлен ряд результатов, описывающих поведение асимптотики вероятности невырождения критического и докритического многотипных ветвящихся процессов в случайной среде, а также получена условная фукциональная предельная теорема о распределении числа частиц в критическом процессе. Следует отметить, что многие результаты, доказанные в диссертации для многотипных ветвящихся процессов, получены при условиях, гораздо более слабых, чем известные до появления работ автора ограничения на характеристики однотипных ветвящихся процессов в случайной среде.

Разработан новый метод исследования многотипных ветвящихся процессов в марковской случайной среде – так называемый метод "вложения" в исследуемый ветвящийся процесс некоторого вспомогательного многотипного ветвящегося процесса, который эволюционирует в случайной среде, порожденной уже последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Этот метод позволяет найти асимптотику вероятности невырождения многотипного ветвящегося процесса в марковской случайной среде и установить предельную теорему, описывающую распределение числа

1991, v. 44, N3, p. 19–22.

[26] *Зубков А.М.* Периоды жизни ветвящегося процесса с иммиграцией. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. 17, в. 1, с. 179–188.

[27] *Foster F.G.* A limit theorem for a branching process with state dependent immigration. — Ann. Math. Stat., 1971, v. 42, N 5, p.1773–1776.

[28] *Pakes A.G.* A branching process with a state dependent immigration component. — Adv. Appl. Probab., 1971, v. 3, N 2, p. 301–314.

[29] *Ватутин В.А.* Критический ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона с эмиграцией. – Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в. 3, с. 482-497.

частиц в процессе при условии его невырождения. Отметим, что ранее, кроме грубых оценок сверху и снизу, об асимптотике вероятности невырождения многотипных ветвящихся процессов в случайной марковской среде ничего не было известно. Более того, даже для однотипных ветвящихся процессов в случайной марковской среде асимптотика вероятности невырождения была получена в работе Ле Пажа Э. и Йе Й.[30] лишь в 2010 г., причем при условиях, являющихся гораздо более сильными, чем налагаемые нами, и только для случая марковской цепи с конечным множеством состояний.

Предложен новый метод исследования ветвящихся процессов с одним типом частиц в замороженной случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, в основе которого лежит "расщепление" сопровождающего случайного блуждания на две части – до момента глобального минимума на отрезке $[0, n]$ и после него. Основное предположение, касающееся сопровождающего случайного блуждания, которое используется в доказательствах, – это условие Спитцера-Дони, гарантирующее критичность рассматриваемых процессов. Применение метода "расщепления" для доказательства предельных теорем позволяет избавиться от многих излишних ограничений, характерных для более ранних работ (см. публикации Атрейя К. и Карлин С.[4], Атрейя К. и Ней П.[12], Танни Д.[11]).

Этот метод оказался очень плодотворным и уже был использован рядом авторов при исследовании ветвящихся процессов в случайной среде (см., например, работы Бансайе В. и Боингхофф К.[31], Боингхофф К. и Керстинг Г.[32]).

Все полученные в диссертации результаты являются новыми. Основные результаты состоят в следующем.

1. Найдена асимптотика вероятности невырождения многотипных критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона, функционирующих в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, и имеющих матрицы средних с общим левым собственным вектором, соответствующим перроновым корням этих матриц.

2. Для многотипных критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона, эволюционирующих в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, и имеющих матрицы средних с общим правым собственным вектором, соответствующим перроновым корням этих

[30] *Le Page E., Ye Y.* The survival probability of a critical branching process in a Markovian random environment. — C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 2010, v. 348, p. 301 – 304.

[31] *Bansaye V., Boeinghoff C.* Upper large deviations for branching processes in random environment with heavy tails. — Electron. J. Probab., 2011, v. 16, N 69, p. 1900–1933.

[32] *Boeinghoff C., Kersting G.* Upper large deviations of branching processes in a random environment – offspring distributions with geometrically bounded tails. — Stochastic Process. Appl., 2010, v. 120, N 10, p. 2964–2077.

матриц, найдена асимптотика вероятности невырождения и доказана условная функциональная предельная теорема о распределении числа частиц в процессе при условии невырождения процесса к данному моменту времени.

3. Для широкого класса многотипных критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона, функционирующих в случайной марковской среде, найдена асимптотика вероятности невырождения, а также доказана предельная теорема о распределении числа частиц в процессе при условии невырождения процесса к данному моменту времени.

4. Получены предельные теоремы, описывающие поведение критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона с одним типом частиц в замороженной случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. В частности, показано, что условные распределения числа частиц в процессе в моменты времени, близкие к локальным минимумам сопровождающего случайного блуждания на отрезке $[0, n]$, при условии невырождения процесса к моменту времени n, сходятся к дискретным распределениям.

5. Доказаны предельные теоремы, описывающие поведение редуцированного критического ветвящегося процесса в замороженной случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин.

6. Установлены предельные теоремы, описывающие переходные явления для процессов Гальтона-Ватсона с одним типом частиц, миграцией и марковским характером случайной среды.

Методы исследования. Для изучения многотипных ветвящихся процессов в марковской случайной среде разработан новый метод "вложения" в исследуемый ветвящийся процесс вспомогательного многотипного ветвящегося процесса, функционирующего в случайной среде, порожденной уже последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Для многотипных ветвящихся процессов в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, развит и используется метод исследования, связанный с переходом к анализу свойств сопровождающего процесс случайного блуждания специального вида. При изучении ветвящегося процесса с одним типом частиц в замороженной случайной среде мы опираемся на новый метод "расщепления" сопровождающего его случайного блуждания. В работе применяются методы теории слабой сходимости вероятностных мер. Также используется метод перехода к сопряженной случайной среде.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Развитые в ней методы и полученные результаты могут найти применение в научноисследовательской работе специалистов по теории вероятностей, теории ветвящихся процессов. Они уже используются другими авторами в их научных работах.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Российско-Шведском симпозиуме по ветвящимся процессам, Киев, Украина, 1990; на 13-м Семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей, Суздаль, Россия, 1991; на 7-й Международной летней школе по теории вероятностей и стохастическим моделям, Варна, Болгария, 1991; на 3-й Петрозаводской конференция по дискретной математике, Петрозаводск, Россия, 1992; на 1-м Международном конгрессе по ветвящимся процессам, Варна, Болгария, 1993; на 16-м Семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей, Эгер, Венгрия, 1994; на 1-м Скандинавско-Российском симпозиуме по стохастике, Хельсинки, Финляндия, 1996; на Семинарах отдела дискретной математики МИАН им. В.А. Стеклова, Москва, Россия, 1997–2012; на 4-м Венгерском коллоквиуме по предельным теоремам теории вероятностей и статистики, Балатон, Венгрия, 1999; на 23-м Семинаре по проблемам устойчивости стохастических моделей, Памплона, Испания, 2006; на 3-м Коллоквиуме по математике и компьютерному обеспечению (алгоритмы, деревья, комбинаторика и вероятность), Вена, Австрия, 2004; на конференции "Ветвящиеся процессы в случайной среде" , Франкфурт, Германия, 2004; на 4-м Коллоквиуме по математике и компьютерному обеспечению (алгоритмы, деревья, комбинаторика и вероятность), Нанси, Франция, 2006; на конференции "Стохастическое моделирование в эволюции" , Гетеборг, Швеция, 2007; на конференции "Стохастическое моделирование в популяционной динамике" , Марсель, Франция, 2007; на 73-й ежегодной конференции Института математической статистики, Гетеборг, Швеция, 2010; на конференции "Ветвящиеся процессы и случайные блуждания в случайной среде" , Франкфурт, Германия, 2011; на научном семинаре в INRA, Париж, Франция, 2011; на совместной конференции МИАН-ПОМИ "Вероятность и функциональный анализ" , Москва, Россия, 2012; на Международной конференции "Теория вероятностей и ее приложения" , посвященной 100-летию со дня рождения Б.В. Гнеденко, Москва, Россия, 2012; в университете г. Лунд, Швеция, 2012; в Чалмерском университете, Гетеборг, Швеция, 2012.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[17]. К тематике диссертации относятся также работы [18]–[24].

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 227 страниц. Список литературы включает 107 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении приведен краткий исторический обзор по тематике работы, охарактеризованы цели исследования, а также кратко изложены основные результаты работы.

В первой главе рассматриваются многотипные ветвящиеся процессы в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин.

В разделах 1.1 – 1.5 исследуются критические ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона $\{\mathbf{Z}(n) = (Z_1(n), ..., Z_p(n)),\ n \in \mathbf{N}_0\}$ с p типами частиц в случайной среде $\{\zeta_n, n \in \mathbf{N}_0\}$, являющейся последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения из некоторого множества Θ. Здесь для широкого класса критических процессов доказан ряд теорем об асимптотике вероятности невырождения и установлена условная функциональная предельная теорема для числа частиц в процессе при условии невырождения процесса к далекому моменту времени. Найдена также асимптотика вероятности вырождения критического процесса в момент времени n при $n \to \infty$. В разделах 1.6 – 1.7 рассматривается докритический многотипный ветвящийся процесс в случайной среде $\{\zeta_n\}$, и исследовано асимптотическое поведение вероятности невырождения такого процесса.

Для описания основных результатов главы 1 нам понадобятся дополнительные обозначения.

Пусть $\mathbf{e}_i, i = 1, ..., p,$ – $p-$мерная вектор-строка, $i-$я компонента которой равняется 1, а все остальные компоненты – нулю, $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$ – $p-$мерная нулевая вектор-строка, $\mathbf{1} = (1, ..., 1)'$ – $p-$мерный вектор-столбец, все компоненты которого равны 1, $\bar{\pi}_n := \left(\pi^{(1)}_{(\zeta_n)}, ..., \pi^{(p)}_{(\zeta_n)}\right)'$.

Мы будем использовать символы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ для обозначения математического ожидания и, соответственно, вероятности, отвечающих исходной мере ветвящегося процесса на наборах $(\mathbf{Z}(0), \mathbf{Z}(1), ..., \mathbf{Z}(n), ...; \bar{\pi}_0, \bar{\pi}_1, ..., \bar{\pi}_n, ...)$, которая порождается соотношением (1). Символы $\mathcal{E}_{\mathbf{f}}$ и $\mathcal{P}_{\mathbf{f}}$, обозначают условное математическое ожидание и условную вероятность при фиксированной векторнозначной производящей вероятностной функции $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{s}) = (f^{(1)}(\mathbf{s}), ..., f^{(p)}(\mathbf{s}))'$, $\mathbf{s} \in J^p$, компонентами которой служат многомерные вероятностные производящие функции. Кроме того, мы будем использовать символы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{P}$ для обозначения условного математического ожидания и условной вероятности при фиксированной среде $(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, ...)$.

Пусть ζ – случайная величина, принимающая значения из множества Θ, имеющая такое же распределение, что и ζ_0, и не зависящая от последовательности $\{\zeta_n, n \in \mathbf{N}_0\}$.

Пусть M_n – матрица средних закона размножения частиц n-го поколения, т.е.

$$M_n = (M_n(i,j))^p_{i,j=1} = \left(\frac{\partial f^{(i)}_{(\zeta_n)}(\mathbf{1})}{\partial s_j}\right)^p_{i,j=1}, \quad M = (M(i,j))^p_{i,j=1} = \left(\frac{\partial f^{(i)}_{(\zeta)}(\mathbf{1})}{\partial s_j}\right)^p_{i,j=1}.$$

Таким образом, M_n, M – случайные матрицы. Далее всегда будем предполагать, что все элементы матриц средних положительны. Для $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_p)$ и $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_p)'$ положим $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^p x_i y_i$, $|\mathbf{x}| = \sum_{i=1}^p x_i$. Далее, для положительной матрицы $A = (A(i,j))^p_{i,j=1}$ обозначим $R(A)$ ее перронов корень и пусть $\mathbf{v}(A) = (v_1(A), ..., v_p(A))$ – левый и $\mathbf{u}(A) =$

$(u_1(A), ..., u_p(A))'$ – правый собственные векторы матрицы A, соответствующие собственному значению $R(A)$ и удовлетворяющие условию

$$|\mathbf{v}(A)| = 1,\ (\mathbf{v}(A), \mathbf{u}(A)) = 1.$$

Пусть R_n и R – перроновы корни матриц M_n и M, соответственно.

В первой главе предполагается, что выполнено по крайней мере одно из приводимых ниже условий $A1$ и $A2$.

Условие A1. Существует неслучайный вектор $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_p)$ с положительными координатами такой, что $|\mathbf{v}| = 1$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}(M)$, т.е.

$$\mathbf{v}M = R\mathbf{v}. \tag{2}$$

Условие A2. Существуют неслучайный вектор $\mathfrak{u} = (\mathfrak{u}_1, ..., \mathfrak{u}_p)'$ с положительными координатами такой, что $|\mathfrak{u}| = 1$ и

$$M\mathfrak{u} = R\mathfrak{u}. \tag{3}$$

Заметим, что как условию $A1$, так и условию $A2$ удовлетворяет широкий класс матриц. Так, например, условие $A2$ выполнено, если все матрицы средних перестановочны, или если каждая матрица средних имеет не зависящие от номера строки суммы элементов по строке.

Если выполнено условие $A1$, то

$$\mathbf{v}\mathbf{M}_0 \cdots \mathbf{M}_n = R_0 \cdots R_n \mathbf{v},$$

а если выполнено условие $A2$, то

$$\mathbf{M}_0 \cdots \mathbf{M}_n \mathfrak{u} = R_0 \cdots R_n \mathfrak{u}.$$

В обоих случаях, положив $X := \ln R,\ X_n := \ln R_{n-1}, n \geqslant 1$, мы можем ввести **сопровождающее случайное блуждание** $\{S_n, n \in \mathbf{N}_0\}$:

$$S_0 := 0,\ S_n := \ln R(M_0 \cdots M_{n-1}) = X_1 + \cdots + X_n,\ n \geqslant 1.$$

для многотипного ветвящегося процесса $\{\mathbf{Z}(n)\}$.

Хорошо известно, что любое невырожденное случайное блуждание с $S_0 = 0$ можно отнести к одному из следующих классов:

1) $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ с вероятностью 1;

2) $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ с вероятностью 1;

3) $\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty$ и $\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty$ с вероятностью 1.

Распространяя расширенную классификацию для однотипных ветвящихся процессов в случайной среде, предложенную в работе[10], мы будем называть ветвящийся процесс $\{\mathbf{Z}(n)\}$ с p типами частиц, удовлетворяющий условию $A1$ или $A2$, в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, *надкритическим, докритическим* и *критическим*, если сопровождающее его случайное блуждание принадлежит классам 1), 2) и 3), соответственно.

Известно, что многие важные выводы о свойствах однотипных ветвящихся процессов в случайной среде могут быть сделаны на основе анализа свойств сопровождающих их случайных блужданий (см., например, работы[10], [9] и [10]). В главе 1 показано, что аналогичное явление имеет место и для широкого класса многотипных ветвящихся процессов в случайной среде.

Заметим, что если для критических и докритических процессов выполнено условие $A1$, то при $n \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{p} v_i \mathcal{P}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \,|\, \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i) \leqslant \min_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |\mathbf{v} M_0 \cdots M_k|$$

$$= \min_{0 \leqslant k \leqslant n-1} R_0 \cdots R_k = \exp\{\min_{0 \leqslant k \leqslant n-1} S_k\} \to 0 \quad \mathbf{P}\text{-п.н. },$$

откуда при $n \to \infty$

$$\mathcal{P}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \,|\, \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i) \to 0 \quad \mathbf{P}\text{-п.н.}$$

для любого $i = 1, \ldots, p$. Такой же вывод справедлив для докритических и критических процессов, удовлетворяющих условию $A2$.

Пусть C_d, $0 < d < 1$, – класс всех матриц $A = (A(i,j))_{i,j=1}^{p}$ таких, что

$$d \leqslant \frac{A(i_1, j_1)}{A(i_2, j_2)} \leqslant d^{-1}, 1 \leqslant i_1, i_2, j_1, j_2 \leqslant p.$$

Будем говорить, что случайная матрица M принадлежит классу C_d, если все возможные реализации матрицы M принадлежат C_d.

В дальнейшем мы будем часто использовать следующие два условия.

Условие A3. Существует число $0 < d < 1$ такое, что при всех n

$$M_n \in \mathcal{C}_d.$$

Условие A4 (условие Спитцера-Дони). Существует число $\rho \in (0, 1)$ такое, что

$$\mathbf{P}(S_n > 0) \to \rho, \; n \to \infty. \tag{4}$$

Будем называть число ρ параметром, с которым случайное блуждание $\{S_n\}$ удовлетворяет условию Спитцера-Дони. Заметим, что условию $A4$ удовлетворяют невырожденные случайные блуждания с нулевым сносом и конечной дисперсией приращений, а также невырожденные симметричные случайные блуждания. Для этих случайных блужданий $\rho = 1/2$. Условие $A4$ также выполняется для случайного блуждания, распределение приращений которого принадлежит без центрировки области притяжения некоторого устойчивого распределения с параметром $\alpha \in (0, 2]$.

Ясно, что любое случайное блуждание, удовлетворяющее условию $A4$, является осциллирующим.

Нам также понадобится функция восстановления, характеризующая случайное блуждание $S = \{S_n\}$. Пусть $\gamma_0 := 0, \quad \gamma_{j+1} := \min(n > \gamma_j : S_n < S_{\gamma_j})$, $j \geqslant 0$, – строгие убывающие лестничные моменты случайного блуждания $\{S_n\}$. Введем функцию восстановления $V(x) = V_S(x)$, построенную по лестничным моментам $\{\gamma_n\}$, с помощью соотношения

$$V(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_{\gamma_j} \geqslant -x),\, x > 0, \quad V(0) = 1, \quad V(x) = 0,\, x < 0. \tag{5}$$

Для $a \in \mathbf{N}_0$ положим

$$\mathbf{U}_a = \{\mathbf{t} = (t_1, ..., t_p) \in \mathbf{N}_0^p \mid t_i < a, i = 1, ..., p\},\ \mathbf{N}_a^p = \mathbf{N}_0^p \setminus \mathbf{U}_a. \tag{6}$$

Введем случайную величину, представляющую собой урезанный второй момент случайной меры $\bar{\pi}_{(\zeta)} = \left(\pi_{(\zeta)}^{(1)}, ..., \pi_{(\zeta)}^{(p)}\right)$ вида

$$\vartheta(a) := \sum_{t \in \mathbf{N}_a^p} \sum_{i=1}^{p} v_i \sum_{j,k=1}^{p} \pi_{(\zeta)}^{(i)}(\{\mathbf{t}\}) t_j t_k / R^2, a \in \mathbf{N}_0,$$

где вектор $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_p)$ тот же, что и в условии $A1$.

Условие A5. Существуют $\varepsilon > 0$ и $a \in \mathbf{N}_0$ такие, что

$$\mathbf{E}\left[\ln^+ \vartheta(a)\right]^{1/\rho+\varepsilon} < \infty,\ \mathbf{E}\left[V(X)(\ln^+ \vartheta(a)\right]^{1+\varepsilon} < \infty,$$

где величина ρ та же, что и в условии $A4$, а $\ln^+ x = \max(0, \ln x)$.

Для исследования вероятности невырождения введем случайные величины

$$Q_i(n) := \mathcal{P}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i), \ \ \mathbf{Q}(n) := (Q_1(n), ..., Q_p(n))'.$$

Положим

$$q_i(n) := \mathbf{P}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} | \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i) = \mathbf{E} Q_i(n).$$

Обозначим $\mathbf{u}(n) = (u_1(n), ..., u_p(n))' := \mathbf{u}(M_0 \cdots M_n), n \geqslant 0$, правый собственный вектор произведения матриц $M_0 \cdots M_n$, соответствующий перронову корню $R_0 \cdots R_n$ произведения этих матриц, и отнормированный так, что $(\mathbf{v}, \mathbf{u}(n)) = 1$, где вектор $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_p)$ из условия $A1$.

Для описания асимптотического поведение вероятностей $q_i(n)$ и $Q_i(n)$ при $n \to \infty$ нам понадобится следующее вспомогательная теорема, характеризующее асимптотику вектора $\mathbf{u}(n)$.

Теорема 1.1 *Если выполнены условия $A1$ и $A3$, то найдется случайный вектор $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_p)'$ такой, что при $n \to \infty$, $\mathbf{u}(n) \to \mathbf{u}$ равномерно, т.е. для всех $i = 1, ..., p$ и некоторой функции $g(n) \geqslant 0, g(n) \to 0, n \to \infty$*

$$|u_i(n) - u_i| \leqslant g(n).$$

Здесь и далее нумерация теорем и утверждений совпадает с нумерацией в диссертации. Выделим следующие основные результаты первой главы.

Теорема 1.2 *Если выполнены условия* $A1, A3$ *и* $A4$, *то при* $n \to \infty$

$$\frac{Q_i(n)}{(\mathbf{v}, \mathbf{Q}(n))} \to u_i \qquad \mathbf{P} - \text{п.н.}, \;\; i = 1, ..., p,$$

где вектор $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_p)'$ *тот же, что и в теореме 1.1*

Эта теорема характеризует вероятность невырождения процесса в рамках quenched approach, т.е. в замороженной среде. Асимптотика вероятности невырождения в рамках annealed approach описывается следующей теоремой.

Теорема 1.3 *Если выполнены условия* $A1$, $A3$, $A4$ *и* $A5$, *то при* $n \to \infty$

$$q_i(n) \sim c_i n^{-(1-\rho)} l(n), \;\; i = 1, ..., p, \tag{7}$$

где константы $c_i > 0, i = 1, ..., p$, *а* $l(n)$ *– медленно меняющаяся на бесконечности функция.*

Сохраняется ли асимптотика (7) при наличии не левого, а правого общего собственного вектора у матриц средних? Для ответа на этот вопрос введем еще несколько условий.

Условие A8. Выполняется соотношение

$$\mathbf{P}\left(\min_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathcal{P}_{\mathbf{f}}\left(|\bar{\xi}_i| > 1\right) > 0\right) = 1,$$

где $\bar{\xi}_i = \bar{\xi}_i(1)$ – p-мерный вектор, описывающий существующее в момент времени 1 потомство частицы типа i из 0-го поколения.

Накладывая это ограничение, мы тем самым исключаем из анализа ситуацию, когда векторнозначная производящая функция $\mathbf{f}_0(\mathbf{s}) := \mathbf{f}_{\zeta_0}(\mathbf{s})$ с положительной вероятностью имеет компоненты вида $f_0^{(i)}(\mathbf{s}) = p_0 + p_{i1}s_1 + p_{i2}s_2 + \dots + p_{ip}s_p$.

Для $\beta > 0$ положим

$$\Delta_{ij}(\beta) := \mathcal{E}_{\mathbf{f}}\left|\xi_{ij} - M(i,j)\right|^{\beta}, \quad \Delta_{ij}(k;\beta) := \mathcal{E}\left|\xi_{ij}(k-1) - M_{k-1}(i,j)\right|^{\beta},$$

$$\Delta_{\beta} := \max_{i,j} \Delta_{ij}(\beta), \;\; \Delta_{\beta}(k) := \max_{i,j} \Delta_{ij}(k;\beta), \;\; \Delta_{\beta}^{*} := e^{-\beta X}\Delta_{\beta}. \tag{8}$$

Условие A9. Существуют числа $\beta \in (1, 2]$ и $\varepsilon > 0$ такие, что с вероятностью 1

$$\Delta_{\beta}(k) < \infty, \quad k \geqslant 1,$$

$$\mathbf{E}[\ln^{+}\Delta_{\beta}^{*}]^{1/\rho+\varepsilon} < \infty, \qquad \mathbf{E}[V(X)(\ln^{+}\Delta_{\beta}^{*})^{1+\varepsilon}] < \infty,$$

где величина ρ та же, что и в условии $A4$.

Теорема 1.5 *Пусть выполнены условия* $A2$, $A4$, $A8$ *и* $A9$. *Тогда при* $n \to \infty$,

$$q_i(n) \sim c_i n^{-(1-\rho)} l(n), \;\; i = 1, ..., p,$$

где $c_i > 0, i = 1, ..., p$, *а* $l(n)$ *– функция, медленно меняющаяся на бесконечности.*

Отметим, что, согласно условиям теоремы 1.5, конечность вторых моментов распределений численности потомства частиц не требуется. Таким образом, даже в случае $p = 1$ условия, налагаемые в теореме 1.5, являются более слабыми, чем соответствующие условия из следствия 1.2 в статье[10]. Упомянутое следствие являлось, до появления работы [15], наиболее сильным результатом, описывающим асимптотическое поведение вероятности невырождения однотипных ветвящихся процессов в случайной среде, и оно было доказано в предположении конечности вторых моментов численности потомства.

Для фиксированного начального значения $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, и целых чисел $0 \leqslant r \leqslant n$, определим процесс $W_{r,n} = W_{r,n,\mathbf{z}} = \{W_{r,n,\mathbf{z}}(t), 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ соотношением

$$W_{r,n,\mathbf{z}}(t) := \frac{(\mathbf{Z}(r + [(n-r)t]), \mathfrak{u})}{\exp\left\{S_{r+[(n-r)t]}\right\}},\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Здесь и далее $[x]$ обозначает целую часть числа x.

Теорема 1.6 *Пусть выполнены условия A2, A4, A8 и, кроме того, условие A9 с* $\beta = 2$. *Пусть* $r_1, r_2, ...$ *– последовательность натуральных чисел такая, что* $r_n \leqslant n$ *и* $r_n \to \infty$. *Тогда при* $n \to \infty$,

$$\mathcal{L}\left(W_{r,n} \,|\, \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}; \mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}\right) \implies \mathcal{L}\left(W_{\mathbf{z}}(t), 0 \leqslant t \leqslant 1\right),$$

где предельный процесс является случайным процессом с п.н. постоянными траекториями, т.е. $\mathbf{P}(W_{\mathbf{z}}(t) = W_{\mathbf{z}}$ при всех $t \in [0,1]) = 1$. *Более того,*

$$\mathbf{P}(0 < W_{\mathbf{z}} < \infty) = 1.$$

Здесь символ $\implies$ обозначает слабую сходимость в топологии Скорохода в пространстве $D[0,1]$ функций, определенных на $[0,1]$, непрерывных справа и имеющих конечные левосторонние пределы.

Во второй главе, озаглавленной "Ветвящиеся процессы с несколькими типами частиц в марковской случайной среде" , рассматриваются ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона $\mathbf{Z}(n) = (Z_1(n), ..., Z_p(n))$, $n \in \mathbf{N}_0$, эволюционирующие в случайной среде $\{\zeta_n, n \in \mathbf{N}_0\}$, являющейся неприводимой непериодической марковской цепью с множеством состояний Θ. Предполагается, что исследуемые процессы обладают свойством критичности, а именно, соответствующие им вложенные сопровождающие случайные блуждания удовлетворяют условию Спитцера-Дони.

В разделах 2.1 – 2.2 получены теоремы, описывающие асимптотику вероятности невырождения процессов $\{\mathbf{Z}(n)\}$. В разделе 2.3 установлены условные предельные теоремы о распределении числа частиц в процессе при условии невырождения процесса.

Для описания основных результатов этой главы введем дополнительные обозначения. Пусть множество состояний Θ счетно. Обозначим $\left(P_{\theta_i\theta_j}\right)_{i,j=0}^{\infty}$, $\theta_i, \theta_j \in \Theta$, матрицу переходных вероятностей цепи $\{\zeta_n\}$. Пусть

$$M_{(\theta)} = \left(M_{(\theta)}(i,j)\right)_{i,j=1}^{p} := \left(\frac{\partial f_{(\theta)}^{(i)}(\mathbf{1})}{\partial s_j}\right)_{i,j=1}^{p}$$

– матрица средних значений, соответствующая производящей вектор-функции $\mathbf{f}_{(\theta)}(\mathbf{s})$. Предполагается, что элементы всех матриц $M_{(\theta)}, \theta \in \Theta$, положительны.

Доказательство результатов главы 2 основано на следующем ключевом допущении, справедливость которого требуется на протяжении всей этой главы.

Существует **особое** состояние $\theta_0 \in \Theta$, для которого матрица $M_{(\theta_0)}$ имеет вид

$$M_{(\theta_0)} = R\left(M_{(\theta_0)}\right)\left(u_i v_j\right)_{i,j=1}^{p}, \tag{9}$$

где

$$\mathbf{v} = (v_1, ..., v_p), \mathbf{u} = (u_1, ..., u_p)',\ v_i > 0,\ u_i > 0, 1 \leqslant i \leqslant p, \tag{10}$$

$$|\mathbf{v}| = 1,\ (\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 1. \tag{11}$$

Ясно, что

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}\left(M_{(\theta_0)}\right), \mathbf{u} = \mathbf{u}\left(M_{(\theta_0)}\right).$$

Пусть начальное распределение марковской цепи ζ_n задается соотношением $\mathbf{P}\left(\zeta_0 = \theta_j\right) = P_{\theta_0\theta_j},\ j = 0, 1, ...$

Положим $\eta(0) := -1$. Обозначим $\eta(1)$ момент первого попадания марковской цепи ζ_n в особое состояние θ_0, и пусть

$$\eta(k+1) := \min\left\{n > \eta(k) : \zeta_n = \theta_0, \right\},\ k = 1, 2, ...,$$

– k-ый момент попадания марковской цепи ζ_n в состояние θ_0. Последовательность $\eta(1), \eta(2), \eta(3), ...$ образует процесс восстановления, причем случайные величины $\eta(k+1) - \eta(k), k \in \mathbf{N}_0$, независимы и одинаково распределены. Если рассмотреть исследуемый процесс $\mathbf{Z}(n)$ только в моменты времени $\eta(k) + 1, k \in \mathbf{N}_0$, то мы получим *вложенный* многотипный ветвящийся процесс

$$\mathbf{Z}'(k) := \mathbf{Z}(\eta(k) + 1),$$

который, в силу того, что наборы $\zeta_{\eta(k)+1}, \zeta_{\eta(k)+2}, ..., \zeta_{\eta(k+1)}$, $k \in \mathbf{N}_0$, одинаково распределены и не зависят друг от друга, оказывается эволюционирующим в случайной среде с *независимыми одинаково распределенными* компонентами. Таким образом, траектории цепи разбиваются на участки регенерации $\zeta_{\eta(k)+1}, \zeta_{\eta(k)+2}, ..., \zeta_{\eta(k+1)}$, $k \in \mathbf{N}_0$, порождаемые интервалами регенерации $[\eta(k) + 1, \eta(k+1)]$.

Конечно, мы могли бы рассмотреть такую конструкцию для любого состояния $\theta \in \Theta$, но преимуществом выбора моментов попадания в особое состояние является то, что, как оказывается, матрицы средних значений $M_n' = \prod_{i=\eta(n)+1}^{\eta(n+1)} M_{(\zeta_i)}$ вложенного процесса $\mathbf{Z}'(n)$ имеют *неслучайный общий собственный* вектор $\mathbf{v}$, входящий в определение (9) особого состояния. Это дает нам возможность применить результаты главы 1 к исследованию многотипных ветвящихся процессов в марковской среде. Приведем здесь важную вспомогательную лемму, обеспечивающую наличие такого общего собственного вектора у матриц средних вложенного ветвящегося процесса.

Лемма 2.2 *Пусть $A = (A(i,j))_{i,j=1}^{p}$ - матрица размера $p \times p$ с положительными элементами. Если матрица $M_{(\theta_0)}$ имеет вид (9), то*

$$\mathbf{v}\left(AM_{(\theta_0)}\right) = \mathbf{v},\ \mathbf{u}\left(M_{(\theta_0)}A\right) = \mathbf{u},$$

$$R\left(AM_{(\theta_0)}\right) = R\left(M_{(\theta_0)}A\right) = R\left(M_{(\theta_0)}\right)(\mathbf{v}, A\mathbf{u}).$$

где векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ те же, что и в (9) – (11).

Пусть

$$R_n' = R\left(M_n'\right),\ X_n' := \ln R_{n-1}',\ n \in \mathbf{N}_0,$$

$X'_{-1} := 0$. Введем последовательность $\{S_n'\}$, определяемую соотношениями

$$S_0' := 0, \qquad S_n' := \ln R\left(M_0' M_1' \cdots M_{n-1}'\right),\ n \geqslant 1,$$

которая является случайным блужданием

$$S_n' = X_1' + \cdots + X_n',\ n \geqslant 1,$$

в силу наличия общего собственного вектора $\mathbf{v}$ у матриц средних M_n'. Мы будем называть последовательность $S' = \{S_n'\}$ **вложенным сопровождающим случайным блужданием**.

Обозначим η момент первого попадания марковской цепи $\{\zeta_n\}$ в состояние θ_0. Для формулировки результатов нам понадобится независимая вероятностная копия $\{\Sigma_n, n \geqslant 0\}$ вложенного сопровождающего случайного блуждания. Пусть

$$X := \ln R\left(\prod_{i=0}^{\eta} M_{(\zeta_i)}\right),$$

а $\{X_i, i = 1, 2, ...\}$ - последовательность независимых случайных величин, имеющих такое же распределение, что и величина X, и не зависящих от нее. Положим

$$\Sigma_0 := 0, \qquad \Sigma_n := X_1 + \cdots + X_n,\ n \geqslant 1,$$

и будем говорить, что случайное блуждание $\Sigma = \{\Sigma_n, n \geqslant 0\}$ порождено случайной величиной X.

В дальнейшем предполагается, что случайное блуждание Σ удовлетворяет условию Спитцера-Дони, т.е. выполняется следующее требование.

Условие B1. Существует число $\rho \in (0,1)$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\Sigma_n > 0) = \rho. \tag{12}$$

Нам также потребуется следующее условие на хвост распределения случайной величины η.

Условие B2. Найдется $\delta > 1-\rho$ такое, что

$$\mathbf{P}(\eta > n) = o\left(\frac{1}{n^{1+\delta}L(n)}\right),$$

где ρ – из условия (12), а $L(n)$ – неотрицательная неубывающая медленно меняющаяся функция.

Для случайного блуждания Σ сохраним обозначение $V(x) = V_\Sigma(x)$ для функции, определенной в (5). Пусть, далее,

$$\mathbf{f}_{0,\eta+1}(\mathbf{s}) = \left(f_{0,\eta+1}^{(1)}(\mathbf{s}), ..., f_{0,\eta+1}^{(p)}(\mathbf{s})\right)' := \mathbf{f}_{(\zeta_0)}\left(\mathbf{f}_{(\zeta_1)}\left(...\mathbf{f}_{(\zeta_\eta)}(\mathbf{s})\right)\right),$$

а $\pi_{0,\eta+1}^{(i)}(\{\mathbf{t}\}), t = (t_1, ..., t_p) \in \mathbf{N}_0^p$, – p -мерное распределение вероятностей на $\mathbf{N}_0^p$, соответствующее производящей функции $\mathbf{f}_{0,\eta+1}(\mathbf{s})$:

$$f_{0,\eta+1}^{(i)}(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{t}\in\mathbf{N}_0^p} \pi_{0,\eta+1}^{(i)}(\{\mathbf{t}\})\,\mathbf{s}^{\mathbf{t}},\ i = 1, ..., p.$$

Введем случайную величину

$$\kappa(a) := \frac{1}{R^2} \sum_{\mathbf{t}\in\mathbf{N}_a^p} \sum_{j,k,i=1}^{p} \pi_{0,\eta+1}^{(i)}(\{\mathbf{t}\})\, t_j t_k,$$

где $R = R(M_0 \cdots M_\eta)$, а $\mathbf{N}_a^p$ – из соотношения (6).

Условие B3. Существуют $\varepsilon > 0$ и $a \in \mathbf{N}_0$ такие, что

$$\mathbf{E}\left[\ln^+ \kappa(a)\right]^{1/\rho+\varepsilon} < \infty,\ \mathbf{E}\left[V(X)(\ln^+ \kappa(a))^{1+\varepsilon}\right] < \infty.$$

Выделим следующие основные результаты второй главы.

Теорема 2.1 *Если выполнены условия $A3, B1, B2$ и $B3$, то при $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i\right) \sim \frac{c_i l(n)}{n^{1-\rho}},$$

где $c_i > 0,\ i = 1, ..., p$, а $l(n)$ - функция, медленно меняющаяся на бесконечности.

Отметим, что вероятность невырождения критических и докритических ветвящихся процессов с одним типом частиц, функционирующих в стационарной случайной среде изучали Д'Суза Дж. и Хембли Б.[33] Что дает теорема 2.1 для однотипного ветвящегося процесса в марковской среде? Для ответа на этот вопрос обозначим $\{Z(n), n \in \mathbf{N}_0\}$ процесс с одним типом частиц в марковской среде $\{\zeta_n\}$.

Следствие 2.1 *Если для процесса* $\{Z(n)\}$ *выполняются условия* $B1, B2$ *и* $B3$, *в которых* $X := \sum_{i=0}^{\eta} \ln f_{(\zeta_i)}{}'(1)$, *то при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(Z(n) > 0 \mid Z(0) = 1\right) \sim \frac{l(n)}{n^{1-\rho}},$$

где $l(n)$ *- функция, медленно меняющаяся на бесконечности.*

Для описания поведения числа частиц в процессе при условии его невырождения мы несколько изменим условия, налагаемые на характеристики процесса. Нам будет удобнее считать теперь, что $\zeta_0 = \theta_0, \eta(0) = 0$, и поэтому интервалы регенерации теперь имеют вид $[\eta(k), \eta(k+1) - 1], k \in \mathbf{N}_0$, а участки регенерации $\zeta_{\eta(k)}, \zeta_{\eta(k)+1}, \zeta_{\eta(k)+2}, ..., \zeta_{\eta(k+1)-1}$, $k = 0, 1, ...$, начинаются с особого состояния. Положим

$$\mathcal{R} := R\left(\prod_{i=0}^{\eta-1} M_{(\zeta_i)}\right), \quad \mathcal{X} := \ln \mathcal{R},$$

где η – первый момент возвращения в особое состояние. Заметим, что из леммы 2.2 следует, что $X \overset{d}{=} \mathcal{X}$. То есть можно считать, что случайное блуждание $\{\Sigma_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ порождается случайной величиной $\mathcal{X}$.

Условие B4. Существуют числа $b_n > 0, n \geqslant 1$, такие, что нормированные суммы Σ_n / b_n сходятся по распределению к устойчивому распределению λ с параметром $\alpha \in (0, 2]$, причем $0 < \lambda(\mathbf{R}^+) < 1$.

Известно, что для случайного блуждания Σ_n, удовлетворяющего условию $B4$, $b_n = n^{1/\alpha} l(n)$, где $l(n)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция, и для Σ_n выполняется условие Спитцера-Дони с параметром $\rho = \lambda(\mathbf{R}^+)$, т.е.

$$\mathbf{P}(\Sigma_n > 0) \to \rho = \lambda\left(\mathbf{R}^+\right), \; n \to \infty. \tag{13}$$

Пусть $\overline{\xi}_i(n)$ – случайный p-мерный вектор, который описывает существующее в момент времени $n+1$ потомство частицы типа i из n-го поколения. Символом $\mathcal{P}_{\zeta_n}$ будем обозначать условную вероятность при фиксированной векторнозначной вероятностной производящей функции $\mathbf{f}_{(\zeta_n)}(\mathbf{s})$.

Условие B6. При всех $n \geqslant 0$ выполняется соотношение

$$\mathbf{P}\left(\min_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathcal{P}_{\zeta_n}\left(|\overline{\xi}_i(n)| > 1\right) > 0\right) = 1.$$

Пусть теперь случайная величина η, являющаяся первым моментом возвращения в особое состояние, удовлетворяет следующему условию.

[33] *D'Souza J.C., Hambly B.M.* On the survival probability of a branching process in a random environment. — Adv. Appl. Probab., 1997, v. 29, N 1, p. 38–55.

Условие B7. Найдется $\delta > 0$ такое, что $\mathbf{E}\eta^{2+\delta} < \infty$.

Для $0 \leqslant k \leqslant n$ положим

$$M_{k,n} := M_k \cdots M_{n-1},\ R_{k,n} := R\left(M_{k,n}\right),\ R_k := R\left(M_k\right).$$

Пусть теперь $S_n := \ln R\left(M_{0,n}\right), S_0 := 0$. Отметим, что определенная таким образом последовательность $\{S_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ не является, вообще говоря, случайным блужданием с независимыми приращениями. Введем случайные величины

$$\sigma_n := R_n^{-2}\left(\max_{i,k}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial s_i \partial s_j} f_{(\zeta_n)}^{(k)}\left(\mathbf{1}\right) + 1\right), \quad \mu := \sum_{i=0}^{\eta-1}\sigma_i e^{-S_i}.$$

Положим $g(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}\left(\mu \geqslant x, \eta > k\right)$.

Условие B8. Существует число $\beta > (1-\rho)\,/\,(1/\alpha + \rho)$ такое, что $\lim_{x\to\infty} x^{\beta}g(x) = 0$, где величины α и ρ те же, что в условии $B4$ и в соотношении (13), соответственно.

Пусть, далее, $\mathbf{f}_{0,\eta}\left(\mathbf{s}\right) = \left(f_{0,\eta}^{(1)}\left(\mathbf{s}\right), ..., f_{0,\eta}^{(p)}\left(\mathbf{s}\right)\right)' := \mathbf{f}_{(\zeta_0)}\left(\mathbf{f}_{(\zeta_1)}\left(...\mathbf{f}_{(\zeta_{\eta-1})}\left(\mathbf{s}\right)\right)\right)$, а $\pi_{0,\eta}^{(i)}\left(\{\mathbf{t}\}\right), t = (t_1, ..., t_p) \in \mathbf{N}_0^p$, – p-мерное распределение вероятностей на $\mathbf{N}_0^p$, соответствующее производящей функции $f_{0,\eta}^{(i)}\left(\mathbf{s}\right)$: $f_{0,\eta}^{(i)}\left(\mathbf{s}\right) = \sum_{\mathbf{t}\in\mathbf{N}_0^p}\pi_{0,\eta}^{(i)}\left(\{\mathbf{t}\}\right)\mathbf{s}^{\mathbf{t}},\ i = 1, ..., p$. Наше следующее условие связано со случайной величиной

$$\kappa_1(a) := \frac{1}{\mathcal{R}^2}\sum_{\mathbf{t}\in\mathbf{N}_a^p}\sum_{j,k,i=1}^{p}\pi_{0,\eta}^{(i)}\left(\{\mathbf{t}\}\right)t_j t_k.$$

Условие B9. Существуют числа $\varepsilon > 0$ и $a \in \mathbf{N}_0$ такие, что $\mathbf{E}\left[\ln^+\kappa_1(a)\right]^{\alpha+\varepsilon} < \infty$, где величина α та же, что и в условии $B4$.

Для фиксированного начального значения $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, определим процесс $W\left(n\right) = W\left(n, \mathbf{z}\right)$ соотношением

$$W\left(n\right) := \frac{\left(\mathbf{Z}\left(n\right), \mathfrak{u}\right)}{\exp\left\{S_n\right\}},$$

где $\mathfrak{u} = \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$, а вектор $\mathbf{u}$ тот же, что и в (9) – (11).

Теорема 2.5 *Пусть выполнены условия* $A3, B4, B6, B7$ *и* $B9$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\mathcal{L}\left(W\left(n\right) \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}; \mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{L}\left(W_{\mathbf{z}}\right),$$

где случайная величина $W_{\mathbf{z}}$ *положительна и конечна с вероятностью* 1.

Здесь и далее символ $\xrightarrow{d}$ обозначает сходимость по распределению.

Для случая процесса $Z(n),\ n \in \mathbf{N}_0$, с одним типом частиц и начальным значением $Z(0) = 1$ теорема 2.5 выглядит следующим образом.

Следствие 2.3 *Если* $p = 1$ *и выполняются условия* $B4, B6, B7$ *и* $B9$, *в которых* $X := \sum_{i=0}^{\eta-1}\ln f_{(\zeta_i)}{}'\left(1\right)$,

$$\mu := \sum_{i=0}^{\eta-1}\left(\frac{f_{(\zeta_i)}{}''\left(1\right)}{\left(f_{(\zeta_i)}{}'\left(1\right)\right)^2} + 1\right)e^{-S_i},\ S_i := \sum_{k=0}^{i-1}\ln f_{(\zeta_k)}{}'\left(1\right),$$

то при $n \to \infty$

$$\mathcal{L}\left(\frac{Z(n)}{e^{S_n}} \mid Z(n) > 0; Z(0) = 1\right) \xrightarrow{d} \mathcal{L}(W),$$

где случайная величина W *положительна и конечна с вероятностью* 1.

В третьей главе, озаглавленной "Ветвящиеся процессы с одним типом частиц в замороженной среде", в рамках quenched approach рассматривается ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона $\{Z(n),\ n \in \mathbf{N}_0\}$ с одним типом частиц в случайной среде $\{\zeta_n, n \in \mathbf{N}_0\}$, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Предполагается, что сопровождающее случайное блуждание $\{S_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ исследуемого процесса удовлетворяет условию Спитцера-Дони, т.е. рассматриваются критические процессы.

В главе 3 предложен новый метод исследования ветвящегося процесса в случайной среде, в основе которого лежит "расщепление" сопровождающего его случайного блуждания на отрезке $[0, n]$ на две части – до момента глобального минимума на этом отрезке и после него. Метод "расщепления" позволяет путем получения условных предельных теорем для сопровождающего случайного блуждания, сохраняющего свой знак, исследовать различные характеристики ветвящегося процесса в случайной среде.

В разделах 3.1 – 3.4 в ситуации замороженной среды изучается асимптотика вероятности невырождения процесса $\{Z(n)\}$ и доказывается условная предельная теорема о распределении числа частиц в процессе в момент времени n при условии $\{Z(n) > 0\}$.

В разделе 3.5 законы распределения числа частиц трактуются как случайные меры, определенные на множестве реализаций среды. Для этих законов доказаны теоремы, которые можно интерпретировать как предельные теоремы ягломовского типа об асимптотическом поведении при $n \to \infty$ распределения вектора числа частиц $(Z(nt_1), Z(nt_2), \ldots, Z(nt_b))$, $0 < t_1 < ... < t_b = 1$ при условии $Z(n) > 0$ (здесь и далее для краткости мы пишем nt_i вместо $[nt_i]$). Пусть $\tau(n) := \min\{i \in [0, n] :\ S_j \geqslant S_i,\ j = 0, 1, \ldots, n\}$ – самая левая точка интервала $[0, n]$, в которой достигается минимальное значение на этом интервале сопровождающего случайного блуждания $S = \{S_n\}$. Из упомянутых теорем следует, что если $t \in (0, 1]$ фиксировано, то условное распределение случайной величины $Z(nt)e^{S_{\tau(nt)} - S_{nt}}$ при условии $Z(n) > 0$ сходится в некотором смысле к собственному предельному распределению, не имеющему атома в нуле. Это, нестрого говоря, означает, что если процесс не выродился к моменту времени n, то размер $Z(nt)$ популяции в момент времени nt пропорционален $e^{S_{nt} - S_{\tau(nt)}}$. Таким образом, в отличие от условных предельных теорем для классических критических или надкритических ветвящихся процессов, в которых функция, нормирующая размер популяции, растет линейно или экспоненциально с течением времени, (случайная) функция, нормирующая размер популяции в критических ветвящихся процессах в случайной среде, подвержена большим колебаниям. Следовательно, популяция критического ветвящегося процесса в случайной среде проходит в моменты, близкие к моментам последовательных минимумов сопровождающего случайного блуждания, через бутылочные горлышки.

В разделе 3.6 – 3.7 этот феномен изучается более детально (как и ранее, в ситуации замороженной среды). В частности, показано, что при фиксированном $t \in (0,1]$ и фиксированном $m \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ (случайное) распределение величины $Z(\tau(nt) + m)$ при условии $Z(n) > 0$ сходится (в некотором смысле) к собственному дискретному предельному распределению. Следовательно, в отличие от неслучайных моментов вида nt, в которые размер популяции является большим (и даже экспоненциально большим, см. раздел 3.5), количество индивидуумов в популяции в (случайные) моменты последовательных глобальных минимумов сопровождающего случайного блуждания оказывается разительно малым, но потом опять начинает расти с экспоненциальной скоростью. Это дает объяснение (разумеется, в рамках рассматриваемой нами модели) следующему хорошо известному факту в биологии популяций: многие популяции в течении их эволюции проходят через "благоприятные периоды" (быстрый рост размера популяции) и "неблагоприятные периоды" (стремительное вырождение, когда выживают лишь несколько представителей популяции, которые впоследствии порождают новую быстро растущую популяцию).

В разделах 3.8–3.12 для случая замороженной среды рассматривается еще один важный процесс, построенный по ветвящемуся процессу $\{Z(k),\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$. А именно, изучается так называемый редуцированный ветвящийся процесс $\{Z(k,n),\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$, где $Z(k,n)$ – число частиц в первоначальном процессе в момент времени $k \leqslant n$, имеющих ненулевое число потомков в момент времени n. Из результатов, установленных в разделах 3.8–3.12, следует, что при условии $Z(n) > 0$ конечномерные условные (случайные) распределения процесса $\{Z(\tau(n) + m, n), m \in \mathbf{Z}\}$ сходятся (в некотором смысле) к конечномерным распределениям ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона в неоднородной случайной среде. Получены условные предельные теоремы, описывающие при условии $Z(n) > 0$ свойства редуцированного процесса в моменты времени $nt, 0 < t < 1$. Найдено также предельное распределение при $n \to \infty$ момента рождения ближайшего общего предка частиц, существующих в процессе в момент времени n.

Приведем некоторые основные результаты третьей главы.

Мы будем отождествлять вероятностную производящую функцию $f_n(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \pi_n(k) s^k$ распределения числа потомков частицы из n-го поколения с бесконечномерным вектором π_n :

$$\pi_n := \{\pi_n(0), \pi_n(1), \pi_n(2) ...\}, \pi_n(k) \geqslant 0, \sum_{k=0}^{\infty} \pi_n(k) = 1, n \in \mathbf{N}_0.$$

Для $f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \pi(k) s^k \stackrel{d}{=} f_n(s)$ и $a \in \mathbf{N}_0$ положим

$$\vartheta(a) := \sum_{k=a}^{\infty} k^2 \pi(k) / \left(\sum_{k=0}^{\infty} k\pi(k) \right)^2, \tag{14}$$

$X := \ln f'(1)$. Пусть $S_0 = 0, S_n = \ln f_0'(1) + \cdots + \ln f_{n-1}'(1), n \geqslant 1$, – сопровождающее случайное блуждание. Будем предполагать, что распределение случайной величины X либо нерешетчато, либо центрально решетчато (то есть, X принимает лишь значения $hk, h > 0, k \in \mathbf{Z}$ и $\mathbf{P}(X = 0) > 0$), и что сопровождающее случайное блуждание удовлетворяет условию Спитцера-Дони с параметром ρ (см. (4)), т.е. для него выполнено условие $A4$.

Пусть

$$\gamma_0 := 0,\ \gamma_{j+1} := \min(n > \gamma_j : S_n < S_{\gamma_j}), \quad \Gamma_0 := 0,\ \Gamma_{j+1} := \min(n > \Gamma_j : S_n > S_{\Gamma_j}),\ j \geqslant 0,$$

– строгие убывающие и, соответственно, строгие возрастающие лестничные моменты сопровождающего случайного блуждания $\{S_n\}$. Наряду с функцией восстановления $V(x)$ (см. (5)) введем еще одну функцию восстановления

$$U(x) := 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(S_{\Gamma_j} < x),\ x > 0, \quad U(0) = 1, \quad U(x) = 0,\ x < 0, \tag{15}$$

построенную по строго возрастающим лестничным моментам $\{\Gamma_n\}$.

Условие C1 Существуют числа $\varepsilon > 0$ и $a \in \mathbf{N}_0$ такие, что

$$\mathbf{E}\left[\ln^+ \vartheta(a)\right]^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon} < \infty, \qquad \mathbf{E}[V(X)(\ln^+ \vartheta(a))^{1+\varepsilon}] < \infty, \tag{16}$$

$$\mathbf{E}\left[\ln^+ \vartheta(a)\right]^{\frac{1}{1-\rho}+\varepsilon} < \infty, \qquad \mathbf{E}[U(-X)(\ln^+ \vartheta(a))^{1+\varepsilon}] < \infty. \tag{17}$$

Для формулировки основных результатов главы введем дополнительные обозначения. Пусть Ω_n – множество элементарных событий, соответствующих наборам $(Z(0), Z(1), \ldots, Z(n), \pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n-1})$; при этом $\Omega = \Omega_\infty$, а

$$\mathcal{F}_n = \sigma(Z(0), Z(1), \ldots, Z(n), \pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n-1}),\ n \in \mathbf{N}_0, \quad \mathcal{F} := \bar{\bigvee_n} \mathcal{F}_n$$

– последовательность естественных σ-алгебр, порожденных рассматриваемым ветвящимся процессом. Всюду далее символы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ используются для обозначения математического ожидания и вероятности, порождаемых исходной мерой ветвящегося процесса на наборах $(Z(0), Z(1), \ldots, Z(n), ...; \pi_0, \pi_1, ..., \pi_n, ...)$. Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ является нашим основным вероятностным пространством. Нам также потребуются две копии этого вероятностного пространства, обозначаемые $(\Omega^-, \mathcal{F}^-, \mathbf{P}^-)$ и $(\Omega^+, \mathcal{F}^+, \mathbf{P}^+)$, на которых заданы две последовательности случайных элементов $\{f_n^-, n \in \mathbf{N}_0\}$ и, соотвественно, $\{f_n^+, n \in \mathbf{N}_0\}$, порождающие соотвествующие им сопровождающие случайные блуждания $\{S_n^-, n \in \mathbf{N}_0\}$ и $\{S_n^+, n \in \mathbf{N}_0\}$. В дальнейшем нам будет удобно любые характеристики или случайные величины, связанные с $\Omega^\pm$, $\mathcal{F}^\pm$ и (если это имеет смысл) с $\mathbf{P}^\pm$, снабжать знаками $-$ и $+$, соответственно. Например, мы будем писать $\{f_n^-, n \in \mathbf{N}_0\}$ и $\{f_n^+, n \in \mathbf{N}_0\}$ и обозначать $\{S_n^-, n \in \mathbf{N}_0\}$ и $\{S_n^+, n \in \mathbf{N}_0\}$ сопровождающие случайные блуждания, соответствующие этим реализациям. Нам будут также необходимы случайные величины $\Gamma^- = \min\{n \geqslant 1 : S_n^- \geqslant 0\}$ и $\gamma^+ = \min\{n \geqslant 1 : S_n^+ < 0\}$.

Положим $D = \sum\limits_{j=1}^{\infty} j^{-1} P\left(S_j = 0\right)$ и $\mathcal{A}_{k,p} := \left\{\Gamma^- > k, \gamma^+ > p\right\}$. Свяжем с исходными мерами $\mathbf{P}^-$ и $\mathbf{P}^+$ вероятностную меру $\widehat{\mathbf{P}}$ на измеримом пространстве $\left(\Omega^- \times \Omega^+, F^- \times F^+\right)$, полагая для $\mathcal{A} \in F_k^- \times F_p^+$

$$\widehat{\mathbf{P}}(\mathcal{A}) = e^D \int_{\mathcal{A}} U\left(-S_k^-\right) V(S_p^+) I\{\mathcal{A}_{k,p}\} d\left(\mathbf{P}^- \times \mathbf{P}^+\right),$$

где $I\{\mathcal{A}\}$ – индикатор события $\mathcal{A}$. Будем использовать символ $\widehat{\mathbf{E}}$ для обозначения математического ожидания относительно меры $\widehat{\mathbf{P}}$.

Обозначим через $\mathbf{M}^{\#}$ пространство всех (возможно несобственных) вероятностных мер на $\mathbf{N}_0$, оснащение которого расстоянием по вариации превращает его в банахово пространство. Для $m \in \mathbf{Z}$ и $t \in [0,1]$ положим

$$\mathcal{M}_m^{(n)}(k) = \mathcal{M}_m^{(n)}(k, \pi) = \mathcal{P}\left(Z(\tau(n) + m) = k \,|\, Z(n) > 0\right). \tag{18}$$

Будем считать, что $Z(\tau(n) + m) = 1$, если $\tau(n) + m \leqslant 0$. Для меры $\mathcal{M} \in \mathbf{M}^{\#}$ и функции $J : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{R}$ положим $\mathcal{M}\left[J\right] := \sum_{k=0}^{\infty} J(k)\mathcal{M}(k)$. Теперь мы можем сформулировать условную предельную теорему о распределении числа частиц в популяции в моменты времени, близкие к точке глобального минимума сопровождающего случайного блуждания.

Теорема 3.5 *Если выполнены условия A4 и C1, то для любого $m \in \mathbf{Z}$ существует собственная вероятностная мера $\mathcal{M}_m \in \mathbf{M}^{\#}$ такая, что*

$$\mathcal{M}_m^{(n)} \overset{w(\mathbf{P},\widehat{\mathbf{P}})}{\longmapsto} \mathcal{M}_m, \ n \to \infty,$$

где символ $\overset{w(\mathbf{P},\widehat{\mathbf{P}})}{\longmapsto}$ обозначает следующий вид сходимости случайных мер $\mathcal{M}_m^{(n)}$ из (18) к $\mathcal{M}_m$: для любой неслучайной ограниченной функции $J : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{R}$ и любой неслучайной ограниченной непрерывной функции $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$\mathbf{E}\left[g\left(\mathcal{M}_m^{(n)}\left[J\right]\right)\right] \to \widehat{\mathbf{E}}\left[g\left(\mathcal{M}_m\left[J\right]\right)\right], \ n \to \infty.$$

Для редуцированного процесса $Z(k,n)$ положим

$$\mathcal{E}\ \left[s^{Z(\tau(n)+m,n)} \mid Z(n) > 0\right] := \sum_{k=1}^{\infty} \mu_m^{(n)}(k) s^k, \ m \in \mathbf{Z}.$$

Распределение числа частиц в редуцированном процессе в моменты времени, расположенные вблизи точки глобального минимума сопровождающего случайного блуждания, описывается следующей условной предельной теоремой.

Теорема 3.9 *Если выполнены условия A4 и C1, то для любого $m \in \mathbf{Z}$ существует собственная вероятностная мера $\mu_m \in \mathbf{M}^{\#}$ такая, что*

$$\mu_m^{(n)} \overset{w(\mathbf{P},\widehat{\mathbf{P}})}{\mapsto} \mu_m, \ n \to \infty.$$

В четвертой главе, озаглавленной "Процессы с миграцией" , в разделах 4.1–4.2 рассматриваются ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона $Z(n)$ с иммиграцией и эмиграцией и процесс Гальтона-Ватсона $\mathcal{Z}(n)$ с иммиграцией, зависящей от состояния процесса, а именно, с иммиграцией только в нулевом состоянии. В разделах 4.3 – 4.4 исследуются аналоги процессов $Z(n)$ и $\mathcal{Z}(n)$, функционирующие в марковской случайной среде. Изучаются переходные явления для всех этих процессов. Приведем некоторые основные результаты четвертой главы.

Рассмотрим следующий процесс Гальтона-Ватсона $\{\mathcal{Z}(n),\ n \in \mathbf{N}_0\}$ с иммиграцией в нуле. Предположим, что число иммигрирующих частиц η имеет закон распределения, задаваемый производящей функцией $g(s) = \mathbf{E}s^{\eta},\ s \in [0,1]$. Размножение частиц, живущих в момент времени $n \in \mathbf{N}_0$ происходит независимо друг от друга, от момента времени и от состояния процесса, причем распределение числа потомков каждой частицы описывается производящей функцией $f(s) = \mathbf{E}s^{\xi},\ s \in [0,1]$.

Определим класс $\mathcal{K} = \{f(s)\}$ производящих функций следующим образом. Существует функция $\gamma(s) = o(s^2)$ при $s \to 0$ такая, что все функции $f(s)$ из класса $\mathcal{K}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$f(1-s) = 1 - ms + bs^2 + \alpha(s),\ f(0) \geqslant l^* > 0,$$

где $|\alpha(s)| \leqslant \gamma(s), 0 < c < m < 1,\ 0 < B_1 \leqslant b \leqslant B_2$, а l^*, c, B_1 и B_2 – некоторые постоянные. Будем предполагать, что производящая функция $f(s)$ числа потомков принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Относительно производящей функции числа иммигрирующих частиц $g(s)$ будем предполагать, что она принадлежит классу $\mathcal{C} = \{g(s)\}$, состоящему из всех производящих функций $g(s)$, удовлетворяющих условиям

$$g(1-s) = 1 - as + ds^2 + \beta(s),$$

где $|\beta(s)| \leqslant \gamma_1(s) = o(s^2)$ при $s \to 0,\ 0 < a_1 < a < a_2, 0 \leqslant d \leqslant D_2$, а a_1, a_2, D_2 – постоянные.

Введем класс H процессов $\{\mathcal{Z}(n), n \in \mathbf{N}_0\}$, определяемый следующими условиями: в этих процессах производящие функции $f(s) \in \mathcal{K}$, а функции $g(s) \in \mathcal{C}$.

Известно[28], что у процессов $\{\mathcal{Z}(n), n \in \mathbf{N}_0\}$, принадлежащих классу H, существует стационарное распределение числа частиц. Пусть ν – случайная величина, соответствующая стационарному распределению процесса $\{\mathcal{Z}(n), n \in \mathbf{N}_0\}$.

Теорема 4.2 *Если* $\{\mathcal{Z}(n), n \in \mathbf{N}_0\} \in H$, *то*

$$\lim_{m \nearrow 1} \mathbf{P}\left(\frac{\ln \nu}{\ln(1/(1-m))} \leqslant x\right) = x,\ x \in [0,1].$$

Как оказалось, ветвящиеся процессы с иммиграцией в нуле близки по своей вероятностной природе ветвящимся процессам с миграцией.

Рассмотрим следующий процесс Гальтона-Ватсона $\{Z(n), n \in \mathbf{N}_0\}$ с миграцией, функционирующий в случайной марковской среде. Предположим, что эволюция случайной среды описывается некоторой фиксированной марковской цепью $\{\zeta_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ с конечным множеством состояний $\Theta = \{0, 1, ..., l-1\}, l \geqslant 2$, и переходными вероятностями $p_{ij} > 0, i, j \in \Theta$. Предположим, что нам заданы наборы случайных величин на неком вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$

$$\chi_i(n) = \left\{\eta_i(n), \xi_i^{(1)}(n), \xi_i^{(2)}(n), ..., \xi_i^{(j)}(n), ...\right\},\ j = 1, 2, ...,\ n \in \mathbf{N}_0,\ i \in \Theta,$$

таких, что при фиксированных i и n набор $\left\{\xi_i^{(j)}(n)\right\}_{j=1}^{\infty}$ является последовательностью независимых неотрицательных целочисленных случайных величин с производящей функцией $f_i(s) := \mathbf{E}s^{\xi_i^{(j)}(n)}$, $j = 1, 2, ...$, а случайная величина $\eta_i(n)$ не зависит от $\left\{\xi_i^{(j)}(n)\right\}_{j=1}^{\infty}$, причем ее распределение имеет следующий вид: $\mathbf{P}(\eta_i(n) = k) = p_k(i)$, $k = 0, 1, ...$, $\mathbf{P}(\eta_i(n) = -1) = q$, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(i) + q = 1$. Предполагается также, что все наборы $\chi_i(n), n \in \mathbf{N}_0, i \in \Theta$, независимы в совокупности.

Определим процесс $\{Z(n), n \in \mathbf{N}_0\}$ соотношениями $Z(0) = 0$,

$$Z(n+1) = \begin{cases} \xi_{\zeta_n}^{(1)}(n) + \xi_{\zeta_n}^{(2)}(n) + \cdots + \xi_{\zeta_n}^{\left(Z(n)+\eta_{\zeta_n}(n)\right)}(n), & Z(n) + \eta_{\zeta_n}(n) > 0, \\ 0, & Z(n) + \eta_{\zeta_n}(n) \leqslant 0. \end{cases}$$

Введенный таким образом процесс $\{Z(n), n \in \mathbf{N}_0\}$ описывает поведение популяции частиц, которая эволюционирует следующим образом. Размножение живущих в момент времени $n \in \mathbf{N}_0$ частиц происходит независимо друг от друга, от момента времени и от текущего состояния процесса, при этом число потомков каждой частицы задается производящей функцией $f_{\zeta_n}(n)$, определяемой состоянием цепи ζ_n. Кроме того, в каждый момент времени в процессе происходит иммиграция или эмиграция. А именно, в популяцию частиц, существующую в момент времени n, либо с вероятностью $p_k(\zeta_n)$ иммигрируют k частиц, либо с вероятностью q происходит следующее: или в популяции ничего не меняется, если она пуста, или из популяции удаляется одна из присутствующих в ней частиц. Отметим, что в рассматриваемой модели миграция в каждом поколении происходит раньше, чем размножение.

Предположим, что все производящие функции числа потомков $f_i(s)$, $i \in \Theta$, принадлежат классу $\mathcal{K}$, т.е. все $f_i(s)$, $i \in \Theta$, удовлетворяют следующим условиям:

$$f_i(1-s) = 1 - m_i s + b_i s^2 + \alpha_i(s), \tag{19}$$

где $0 < c < m_i < 1, |\alpha_i(s)| \leqslant \gamma(s) = o(s^2)$ при $s \to 0$, $0 < B_1 \leqslant b_i \leqslant B_2, c, B_1, B_2$ – некоторые постоянные, $f_i(0) \geqslant l^* > 0$. Будем также предполагать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p_k(i) - q = 0,\ \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k(i) < \infty,\ i \in \Theta. \tag{20}$$

Положим $\mathbb{M} = \sum_{i=0}^{l-1} w_i \ln m_i$, где $w_i, i \in \Theta$, – стационарные вероятности цепи Маркова $\{\zeta_n\}$. Доказано, что в условиях (19), (20) рассматриваемый процесс $\{Z(n), n \in \mathbf{N}_0\}$ имеет стационарное распределение $\{\pi_j\}_{j=0}^{\infty}$. Пусть теперь случайная величина ν имеет распределение, совпадающее со стационарным распределением $\{\pi_j\}_{j=0}^{\infty}$ процесса $\{Z(n), n \in \mathbf{N}_0\}$.

Теорема 4.3 *Если выполнены условия (19), (20), то при* $\mathbb{M} \to 0$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\ln \nu}{\ln(1/|\mathbb{M}|)} \leqslant x\right) \longrightarrow x, \; x \in [0,1].$$

Работы автора по теме диссертации

[1] Дьяконова Е.Е. О процессе Гальтона-Ватсона с иммиграцией. – В сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. М.: ВНИИСИ, 1991, с. 49-52.

[2] Dyakonova E.E. On transient phenomena for branching migration processes. – In: Probabilistic Methods in Discrete Mathematics. Proceedings of the Third Petrozavodsk Conference, Moscow/Utrecht: TVP/VSP, 1993, p. 148-154.

[3] Дьяконова Е.Е. Близкие к критическим ветвящиеся процессы с миграцией. – Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 1, с. 186-192.

[4] Dyakonova E.E. Transition phenomena for branching processes in a random environment. – J. Math. Sciences, 1996, v. 78, N 1, p. 48-53.

[5] Дьяконова Е.Е. Ветвящийся процесс с миграцией в случайной среде. – Дискретн. матем., 1997, т. 9, N 1, с. 30-42.

[6] Dyakonova E.E. Transition phenomena for a Galton-Watson process with immigration in a Markovian environment. – J. Math. Sciences, 1997, v. 83, N 3, p. 397-400.

[7] Дьяконова Е.Е. Об асимптотике вероятности невырождения многомерного ветвящегося процесса в случайной среде. – Дискретн. матем., 1999, т. 11, N 1, с. 113-128.

[8] Dyakonova E. On multitype branching process in a random environmen. – J. Math. Sciences, 2002, v. 111, N 3, p. 3537-3541.

[9] Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона в случайной среде, II: конечномерные распределения. – Теория вероятн. и ее примен., 2004, т. 49, в. 2, с. 231-268.

[10] Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е. Ветвящиеся процессы в случайной среде и бутылочные горлышки в эволюции популяций. – Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 1, с. 22–46.

[11] Dyakonova E. Survival probability of a critical multi-type branching process in random environment. – In: Proceedings of the Fourth Colloquium on Mathematics and Computer Science. Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities, Nancy: Institute Elie Cartan, 2006, p. 375-380.

[12] Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е. Предельные теоремы для редуцированных ветвящихся процессов в случайной среде. – Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 2, с. 271-300.

[13] Дьяконова Е.Е. Критические многотипные ветвящиеся процессы в случайной среде. – Дискретн. матем., 2007, т. 19, N 4, с. 23-41.

[14] Dyakonova E. On subcritical multi-type branching process in random environment. – In: Proceedings of the Fifth Colloquium on Mathematics and Computer Science. Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities, Nancy: DMTCS, 2008, p. 401-408.

[15] Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е. Асимптотические свойства многотипных критических ветвящихся процессов в случайной среде. – Дискретн. матем., 2010, т. 22, N 2, с. 22-40.

[16] Дьяконова Е.Е. Многотипные ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона в марковской случайной среде. – Теория вероятн. и ее примен., 2011, т. 55, в. 3, с. 592-601.

[17] Дьяконова Е.Е. Многотипные ветвящиеся процессы, эволюционирующие в марковской среде. – Дискретн. матем., 2012, т. 24, N 3, с. 130-151.

Работы автора, близкие к теме диссертации

[18] Dyakonova E.E. Heavy traffic approximation fore some branching processes. – In: Frontiers in Pure and Appl. Probability, II (Ed. A.N. Shiryaev et all.), Moscow/Utrecht: TVP/VSP, 1996, p. 43-50.

[19] Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е. Критические ветвящиеся процессы в случайной среде: вероятность вырождения в фиксированный момент. – Дискретн. матем., 1997, т. 9, N 1, с. 100-126.

[20] Dyakonova E.E. Diffusion approximation of branching migration processes. – J. Math. Sciences, 1999, v. 93, N 4, p. 511-514.

[21] Vatutin V.A., Dyakonova E.E. Reduced branching processes in random environment. – In: Mathematics and Computer Science II: Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities (Ed. B.Chauvin, P.Flajolet, D.Gardy, A.Mokkadem), Basel - Boston- Berlin: Birkhäuser, 2002, p. 455-467.

[22] Vatutin V.A., Dyakonova E.E. Yaglom limit theorems for branching processes in random environment. - In: Mathematics and Computer Science III: Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities (Ed. M. Drmota, P.Flajolet, D.Gardy, B. Gittenberger), Basel - Boston- Berlin: Birkhäuser, 2004, p. 375-386.

[23] Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона в случайной среде, I: предельные теоремы. – Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 2, с. 274-300.

[24] Dyakonova E., Geiger J., Vatutin V. On the survival probability and a functional limit theorem for branching processes in random environment. – Markov Processes and Related Fields, 2004, v. 10, N 2, p. 289-306.

[25] Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е. Волны в редуцированных ветвящихся процессах в случайной среде. – Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, в. 4, с. 665-683.

[26] Boeinghoff C., Dyakonova E.E., Kersting G., and Vatutin V.A. Branching processes in random environment which extinct at a given moment. – Markov Processes and Related Fields, 2010, v. 16, N 2, p. 329-350.