На правах рукописи

Гусев Николай Анатольевич

# ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕКТНОСТИ И АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

01.01.03 — Математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена в Московском физико–техническом институте.

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | доктор физико-математических наук,<br>профессор<br>Шифрин Э. Г. |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук,<br>профессор<br>Михайлов В. П. |
| | доктор физико-математических наук,<br>профессор<br>Фурсиков А. В. |
| Ведущая организация: | Воронежский государственный<br>университет |

Защита состоится “ 17 ” ноября 2011 г. в 14 ч. 00 мин. на заседании Диссертационного совета Д 002.022.02 при Математическом инститите им. В.А. Стеклова РАН по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

Автореферат разослан “____” августа 2011 г.

Учёный секретарь Диссертационного совета
доктор физико-математических наук Ю. Н. Дрожжинов

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Многие математические модели физических явлений включают в себя краевые и начально–краевые задачи для систем дифференциальных уравнений в частных производных. Решения этих задач определяют значения физических величин, входящих в соответствующую модель. Фундаментальную роль для таких моделей играет *корректность* входящих в них начально–краевых задач, т.е. наличие для них теорем существования и единственности решений, а также непрерывной зависимости решений от данных задачи. Изучение этих вопросов позволяет определить понятие решения соответствующей задачи и обосновать возможность использования той или иной модели с математической точки зрения. Оно также необходимо для того, чтобы понять, в каком смысле можно аппроксимировать решение данной задачи и, таким образом, важно́ при построении и использовании численных методов. (Более того, некоторые методы доказательств теорем существования одновременно представляют собой и численные методы нахождения соответствующих решений.)

Общая модель физического явления часто зависит от некоторых параметров, которые при определённых условиях достаточно малы́. При этом случаю, когда такими параметрами можно пренебречь, соответствует другая модель рассматриваемого явления, которую мы для краткости будем называть *подмоделью* рассматриваемой общей модели. (Термин «подмодель» в несколько ином смысле использовался Л.В. Овсянниковым.) Подмодели не всегда являются непосредственными частными случаями общих моделей и нередко создаются независимо от последних. На практике широко используются именно подмодели, что обусловлено их сравнительной простотой. При этом замена модели подмоделью допустима тогда и только тогда, когда результаты, полученные с помощью них, отличаются незначительно. Если эти две модели описываются начально–краевыми задачами, то данное требование сводится к тому, что решения этих задач должны быть в некотором смысле близки́, т.е. решение задачи, соответствующей подмодели, должно быть *асимптотическим* пределом решений задач, соответствующих общей модели, при стремлении соответствующих параметров к нулю. Для математического описания динамики сплошных сред имеются общая модель сжимаемой среды и (под)модель несжимаемой жидкости, которая используется в случаях, когда сжимаемостью можно пренебречь. Модель несжимаемой жидкости является идеализацией, так как любая реальная жидкость, существующая в природе, является *слабо сжимаемой*. В связи с этим возникает задача о нахождении достаточных условий, при которых решения соответствующих уравнений отличаются незначительно.

Данной задачей занимались Д. Эбин (D. Ebin), С. Клэйнерман (S. Klainerman), А. Мэйда (A. Majda), Н. Масмуди (N. Masmoudi), П.-Л. Лионс (P.-L. Lions), Т. Алацард (T. Alazard), Э. Файрайзл (E. Feiresl), Э.Г. Шифрин, В.В. Пухначёв и многие другие авторы.

Асимптотические свойства решений уравнений движения слабо сжимаемых сред исследовались, в основном, при малых числах Маха. Установлена слабая сходимость поля скорости при стремлении числа Маха к нулю, а также (при условии что начальное условие для поля скорости соленоидально) сильная сходимость поля скорости для локальных решений.

С физической точки зрения представляет интерес не только сходимость скорости, но и сходимость давления, которая изучена в значительно меньшей степени. В диссертации эта сходимость исследуется для линеаризованных уравнений Навье–Стокса. Эти уравнения описывают первую поправку к решению уравнений несжимаемой жидкости, обусловленную сжимаемостью среды. Они значительно проще исходных нелинейных уравнений, что делает возможным более детальное исследование влияния фактора сжимаемости на их решения. Линеаризованные уравнения сжимаемой среды представляют и самостоятельный интерес.

В большинстве работ рассматривались уравнения движения сжимаемой среды, линеаризованные в окрестности состояния покоя. П. Муха (P. Mucha) и В. Заяцковски (W. Zajaczkowski) получили априорную оценку сильного обобщённого решения начально–краевой задачи для этих уравнений в ограниченной области. Существование сильного обобщённого решения для этих же уравнений было доказано Р. Икехата (R. Ikehata), Т. Кобояси (T. Koboyashi) и Т. Матсуяма (T. Matsuyama). Влияние коэффициента сжимаемости на решения этих задач в данных работах не изучалось. Существование и единственность слабых решений также не исследовались. В диссертации рассматривается начально–краевая задача для уравнений движения слабо сжимаемой жидкости, линеаризованных в окрестности произвольного поля скорости. Исследуются существование и единственность обобщённых решений. Устанавливаются достаточные условия слабой и сильной сходимости этих решений при стремлении фактора сжимаемости к нулю.

Как известно, существует разработанная теория задачи Коши для гиперболических уравнений на глобально гиперболических многообразиях. Гиперболические уравнения на *не* глобально гиперболических многообразиях изучены значительно меньше, хотя хорошо известны многочисленные примеры таких многообразий, которые представляются решениями уравнений гравитационного поля, таких как решения Геделя, Керра, Готта и многие другие. В диссертации рассматривается задача Коши для волнового уравнения на плоскости Минковского с двумя разрезами, стороны которых определенным образом склеены. Ранее эта задача рассматривалась И.Я. Арефьевой, И.В. Воловичем и Т. Ишиватари. Было доказано существование решения, вообще говоря, разрывного на характеристиках, выходящих из конических точек. В данной работе рассматривается вопрос о существовании и единственности усиленно классического решения.

При изучении течений жидкостей в пористых средах решение классических уравнений гидродинамики, описывающих эти течения на микроскопическом уровне, часто становится затруднительным (в силу сложной структуры пор, большой разницы масштабов и т.п.). В связи с этим возникает необходимость в выборе модели, описывающей эти течения на макроскопическом уровне. Такие модели, как правило, являются феноменологическими. Наиболее распространенной моделью из этого класса является модель Дарси. Вывод уравнений Дарси из уравнений для микровеличин обсуждался Н.С. Бахваловым, Г. П. Панасенко и многими другими авторами. Несмотря на то, что макроскопические модели строятся на основе экстраполяции результатов экспериментов, величины, входящие в эти модели (так называемые макровеличины) часто определяются через микровеличины, соответствующие классическому описанию этих течений в поровом пространстве. В данной работе в качестве таких макровеличин рассматриваются осреднения по Стеклову продолженных нулём на твёрдый скелет полей скорости и давления. Даётся строгий вывод системы уравнений, которой удовлетворяют эти макровеличины. Предполагается, что на микроскопическом уровне течение описывается стационарной системой Стокса. Для абсолютно однородных сред проводится сравнение полученной системой с моделью Дарси.

Во многих задачах гидродинамики используются ортогональные проекторы на подпространства потенциальных и соленоидальных векторных полей. Эти проекторы, как известно, тесно связаны с задачей Немана для уравнения Лапласа. В данной работе эта задача рассматривается в случае, когда входящее в неё граничное условие зависит от параметра. В предположении о том, что эта зависимость непрерывна по Гёльдеру, исследуется зависимость решения (и его градиента) от данного параметра. Изучение этой зависимости важно, например, для уточнения характера зависимости потенциальной компоненты векторного поля от параметра.

**Цель работы.** Основными целями диссертации являются: 1) получение достаточных условий существования и единственности решений начально–краевой задачи для линеаризованных в окрестности произвольного поля скорости уравнений движения слабо сжимаемой сплошной среды (жидкости); 2) анализ поведения этих решений при стремлении коэффициента сжимаемости к нулю.

Другими целями диссертации являются: 1) получение достаточных условий существования и единственности усиленно классического решения задачи Коши для волнового уравнения на не глобально гиперболическом многообразии; 2) точный анализ характера зависимости решения задачи Неймана для уравнения Лапласа от параметра; 3) строгий вывод уравнений для осреднённых по Стеклову полей скорости и давления, описывающих стационарное течение несжимаемой вязкой жидкости в пористой среде.

**Научная новизна.** Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем:

1. Доказана корректность начально–краевой задачи для линеаризованных в окрестности произвольного поля скорости уравнений движе-

ния слабо сжимаемой вязкой баротропной жидкости. При стремлении коэффициента сжимаемости к нулю исследована сходимость полей скорости и давления к соответствующим полям для несжимаемой жидкости. Установлено, что:

– в общем случае поле скорости сходится *слабо*;
– если начальное условие для поля скорости соленоидально, то поле скорости сходится *сильно* и поле давления сходится *слабо*;
– если, кроме того, начальное условие для давления совпадает со значением давления в несжимаемой жидкости в начальный момент времени, а последнее удовлетворяет некоторому дополнительному соотношению, то сходимость поля давления является *сильной*. При этом давление в несжимаемой жидкости определено однозначно.

2. Получен критерий существования и единственности усиленно классического решения волнового уравнения на не глобально гиперболическом многообразии.

3. Дан строгий вывод уравнений, которым удовлетворяют осреднённые по Стеклову поля скорости и давления, описывающие стационарное течение несжимаемой вязкой жидкости в пористой среде.

4. Установлена непрерывная по Гёльдеру зависимость градиента решения задачи Неймана от параметра, входящего в граничное условие. Найден точный показатель Гёльдера для этой зависимости.

**Методы исследования.** В диссертации используются методы функционального анализа, теории уравнений в частных производных, теории обобщённых функций.

**Теоретическая и практическая ценность.** Настоящая работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в главе 1, могут использоваться для оценки погрешности аппроксимации решений уравнений движения слабо сжимаемой жидкости решением соответствующих уравнений движения несжимаемой жидкости.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались автором на 51, 52 и 53 научных конференциях МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук» (2008, 2009 и 2010 г.), на Международной конференции по математической физике и ее приложениям (Самара, 8–13 сентября 2008 г.), на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2–7 июля 2010 г.), на Второй Международной конференции «Математическая физика и ее приложения» (Самара, 29 августа – 4 сентября 2010 г.), на семинарах отдела математической физики МИАН (5 марта 2009 г., 11 ноября 2010 г. и 12 мая 2011 г.), на семинаре НИИ Механики МГУ (7 апреля 2010 г.), на летней школе «Mathematical Problems in Hydrodynamics» (университет г. Сержи-Понтуаз (Cergy-Pontoise), Франция, 14–25 июня 2010), на семинаре под рук. О.Г. Смолянова (МГУ, 13 декабря 2010 г.), на семинаре под рук. А.Л. Скубачевского, (РУДН, 22 марта 2011 г.), на семинаре под рук. В.Г. Звягина, (ВГУ, 7 апреля 2011 г.). на семинаре под рук. М.И. Вишика, (МГУ, 25 апреля 2011 г.). на семинаре отдела теории функции МИАН под рук. Л.Д. Кудрявцева (11 мая 2011 г.), на Международной конференции «Ninth meeting on Hyperbolic Conservation Laws, Fluid Dynamics and Transport Equations: Recent results and Research perspectives» (SISSA, 18–22 июля 2011 г.)

**Публикации.** Основные результаты, перечисленные выше, опубликованы в работах [1–6].

**Структура и объём работы.** Диссертация состоит из введения, списка основных обозначений, четырёх глав, заключения, приложений и библиографии. Объём диссертации составляет 135 страниц. Библиография включает 69 наименований.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность исследуемой проблемы, приводится исторический обзор по теме диссертации. Проводится сравнение подходов и результатов других авторов.

В начале **главы 1** линеаризованные уравнений движения слабо сжимаемой сплошной среды выводятся из уравнений Навье–Стокса. В разделе

1.4 рассматривается вспомогательная задача для уравнения переноса

$$u_t - (\mathbf{b}, \nabla)u + cu = f \qquad \text{в} \quad \mathbb{R}^d \times (0,T), \tag{1.22}$$

$$u|_{t=0} = u^\circ, \qquad \text{в} \quad \mathbb{R}^d \tag{1.23}$$

где $\mathbf{b}\colon \mathbb{R}^d \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, $u, c, f\colon \mathbb{R}^d \times [0,T] \to \mathbb{R}$, $u^\circ\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — начальное условие для неизвестной функции $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0,T]$. Даётся следующее определение решения рассматриваемой задачи:

**Определение 1.2.** Пусть $1 < p < \infty$, $q = p'$. Пусть $\mathbf{b} \in L^1(0,T; W^{1,q}(\mathbb{R}^d)^d)$, $c \in L^1(0,T; L^q(\mathbb{R}^d))$, $f \in L^1(0,T; L^1(\mathbb{R}^d))$ и $u^\circ \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Функция $u \in L^\infty(0,T; L^p(\mathbb{R}^d))$ называется *обобщённым решением* задачи (1.22), (1.23), если для $\forall\ \Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d \times [0,T))$ выполняется равенство

$$- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} u\Phi_t \, dx\, dt - \int_{\mathbb{R}^d} u^\circ \Phi(\cdot, 0)\, dx + \\ + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} u[(c + \operatorname{div} \mathbf{b})\Phi + (\mathbf{b}, \nabla)\Phi]\, dx\, dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f\Phi\, dx\, dt \tag{1.24}$$

Для уравнения переноса устанавливается аналог энергетического равенства:

**Теорема 1.2.** *Если $u \in L^\infty(0,T; L^p(\mathbb{R}^d))$ — обобщённое решение задачи (1.22), (1.23), причём $\{c, \operatorname{div} \mathbf{b}\} \subset L^1(0,T; L^\infty(\mathbb{R}^d))$ и $f \in L^1(0,T; L^p(\mathbb{R}^d))$, то для любого $\psi \in \mathscr{D}([0,T))$*

$$- \int_0^T \psi_t \int_{\mathbb{R}^d} |u|^p \, dx\, dt - \int_{\mathbb{R}^d} |u^\circ|^p \psi(0)\, dx + \\ + \int_0^T \psi \int_{\mathbb{R}^d} \big(|u|^p \operatorname{div} \mathbf{b} + pc|u|^p - p|u|^{p-1} f \operatorname{sign} u\big)\, dx\, dt = 0. \tag{1.38}$$

При $f = 0$ данная теорема была получена Р. ДиПерна (R. DiPerna) и П.-Л. Лионсом (P.-L. Lions).

Далее в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^d$ с кусочно–гладкой границей $\partial D$ рассматривается начально–краевая задача для линеаризованных уравнений движения слабо сжимаемой сплошной среды:

$$\rho_t - (\mathbf{b}, \nabla)\rho + c\rho + \operatorname{div}\mathbf{u} = \sigma, \tag{1.52}$$

$$\mathbf{u}_t + \nabla p = -A\mathbf{u} + \rho\mathbf{f} + \mathbf{s}, \tag{1.53}$$

$$\rho = \alpha p, \tag{1.54}$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^\circ, \tag{1.55}$$

$$p|_{t=0} = p^\circ, \tag{1.56}$$

$$\mathbf{u}|_{\partial D} = 0, \tag{1.57}$$

где

$$-A\mathbf{u} \equiv \nu\Delta\mathbf{u} + \kappa\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} - (\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{u} + M\mathbf{u} \tag{1.58}$$

Предполагается, что $\mathbf{b}|_{\partial D} = 0$ и

1°. $\nu > 0$, $\kappa \geqslant 0$,
$M \in L^\infty(D \times (0,T); \mathbb{M}^d)$,
$\mathbf{a} \in L^\infty(D \times (0,T); \mathbb{R}^d)$,
$\mathbf{f} \in L^2(0,T; L^\infty(D)^d)$;

2°. $\mathbf{b} \in L^1(0,T; H_0^1(D)^d)$,
$\operatorname{div}\mathbf{b} \in L^1(0,T; L^\infty(D))$,
$c \in L^1(0,T; L^\infty(D))$;

3°. $\sigma \in L^2(0,T; L^2(D))$,
$\mathbf{s} \in L^2(0,T; H^{-1}(D)^d)$,
$\mathbf{u}^\circ \in L^2(D)^d$,
$p^\circ \in L^2(D)$;

Даётся определение обобщённого решения. Доказывается лемма, в которой устанавливается эквивалентное определение:

**Лемма 1.13.** *Пара* $\{\mathbf{u}, p\} \in L^2(0,T; H_0^1(D)^d) \times L^\infty(0,T; L^2(D))$ *является обобщённым решением задачи (1.52)–(1.57) тогда и только тогда, когда для любых функций* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ *и* $\Phi \in \mathscr{D}(D)^d$ *функции* $t \mapsto (\rho(t), \varphi)_D$ *и* $t \mapsto (\mathbf{u}(t), \Phi)_D$ *удовлетворяют уравнениям*

$$\frac{d}{dt}(\rho, \varphi)_D + (\rho[c + \operatorname{div}\mathbf{b}], \varphi)_D + (\rho\mathbf{b}, \nabla\varphi)_D + (\operatorname{div}\mathbf{u} - \sigma, \varphi)_D = 0, \tag{1.64}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \Phi)_D - (p, \operatorname{div}\Phi)_D = -\langle A\mathbf{u}, \Phi\rangle + (\rho\mathbf{f}, \Phi)_D + \langle \mathbf{s}, \Phi\rangle \tag{1.65}$$

*в смысле* $\mathscr{D}'(0,T)$, *причём*

$$(\rho(t),\varphi)_D\,|_{t=0} = (\rho^\circ,\varphi)_D\,,$$
$$(\mathbf{u}(t),\Phi)_D\,|_{t=0} = (\mathbf{u}^\circ,\Phi)_D\,.$$

Далее с помощью метода Галёркина доказывается теорема существования:

**Теорема 1.6.** *Если выполнены предположения* $1^\circ$–$3^\circ$, *то задача (1.52)–(1.57) имеет обобщённое решение* $\{\mathbf{u},p\}$.

Затем с помощью доказанной выше теоремы 1.2 получаются априорные оценки обобщённых решений, из которых следует единственность последних:

**Теорема 1.7.** *Пусть выполнены предположения* $1^\circ$–$3^\circ$, *и* $\{\mathbf{u},p\}$ *— обобщённое решение задачи (1.52)–(1.57). Тогда*

1. *для* $\{\mathbf{u},p\}$ *выполняется* энергетическое равенство*:*

$$\tfrac{1}{2}\left(\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(D)^d}+\alpha\|p\|^2_{L^2(D)}\right)_t+\alpha\left(p\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{div}\mathbf{b}+c\right],p\right)_D+ \\ +\langle A\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle=(p,\sigma)_D+(\rho\mathbf{f},\mathbf{u})_D+\langle\mathbf{s},\mathbf{u}\rangle \quad \textit{в} \quad \mathscr{D}'(0,T); \qquad (1.76)$$

2. *при* $0<\alpha<1$ *существует константа* $C>0$ *(зависящая только от* $T$, *области* $D$, *коэффициентов оператора* $A$ *и полей* $\mathbf{b}$, $c$ *и* $\mathbf{f}$*) такая, что для* $\{\mathbf{u},p\}$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^1_0(D)^d)}\leqslant C\cdot E,$$
$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2(D)^d)}+\sqrt{\alpha}\|p\|_{L^\infty(0,T;L^2(D))}\leqslant C\cdot E,$$

*где*

$$E\equiv\|\mathbf{u}^\circ\|_{L^2(D)^d}+\sqrt{\alpha}\|p^\circ\|_{L^2(D)}+ \\ +\|\mathbf{s}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(D)^d)}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\|\sigma\|_{L^2(0,T;L^2(D))}.$$

В разделе 1.6 рассматривается начально–краевая задача для линеаризованных уравнений движения несжимаемой жидкости, в которые переходят линеаризованные уравнения движения слабо сжимаемой сплошной среды при нулевом коэффициенте сжимаемости:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{1.91}$$

$$\boldsymbol{v}_t + \nabla q = -A\boldsymbol{v} + \mathrm{s}, \tag{1.92}$$

$$\boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{v}^\circ, \tag{1.93}$$

$$\boldsymbol{v}|_{\partial D} = 0, \tag{1.94}$$

Даётся определение обобщённого решения:

**Лемма 1.15.** *Пара $\{\boldsymbol{v}, q\} \in L^2(0,T;V(D)) \times \mathscr{D}'(D \times (0,T))$ является обобщённым решением задачи (1.91)–(1.94) тогда и только тогда, когда (1.91), (1.92) выполняются в $\mathscr{D}'(D \times (0,T))$ и для любой функции $\Phi \in \mathscr{V}(D)$*

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}, \Phi)_D = \langle -A\boldsymbol{v} + \mathrm{s}, \Phi \rangle \tag{1.96}$$

*в смысле $\mathscr{D}'(0,T)$, причём $(\boldsymbol{v}(t), \Phi)_D\,|_{t=0} = (\boldsymbol{v}^\circ, \Phi)_D$.*

Приводится теорема единственности, обобщающая известный в случае нестационарной системы Стокса результат:

**Теорема 1.11.** *Для любого $\boldsymbol{v}^\circ \in H(D)$ задача (1.91)–(1.94) имеет обобщённое решение $\{\boldsymbol{v}, q\}$. Если $\{\boldsymbol{v}_1, q_1\}$ — другое обобщённое решение задачи (1.91)–(1.94), то $\boldsymbol{v}_1(t) = \boldsymbol{v}(t)$ при п.в. $t \in [0,T]$ и $\nabla q_1 = \nabla q$.*

Приводятся условия, достаточные для того, чтобы соответствующее обобщённое решение обладало некоторой регулярностью.

В разделе 1.7 рассматривается семейство начально–краевых задач вида (1.52)–(1.57), в которых начальные условия и неоднородные слагаемые зависят от коэффициента сжимаемости $\alpha$. Изучается сходимость решений $\{\mathbf{u}_\alpha, p_\alpha\}$ этих задач при $\alpha \to 0$ к решению $\{\boldsymbol{v}, q\}$ задачи (1.91)–(1.94) с начальным условием $\boldsymbol{v}^\circ = P_H \mathbf{u}^\circ$, где $P_H$ — ортогональный проектор $L^2(D)^d$ на $H(D)$.

**Теорема 1.12.** *Если при $\alpha \to 0$*

$$\|\sigma_\alpha\|_{L^2(0,T;L^2(D))} = O(\sqrt{\alpha}), \qquad \mathrm{s}_\alpha \xrightarrow{*} \mathrm{s} \quad \text{в} \;\; L^2(0,T;H^{-1}(D)^d),$$

$$\mathbf{u}^\circ_\alpha \rightharpoonup \mathbf{u}^\circ \quad \text{в} \;\; L^2(D)^d, \qquad \|p^\circ_\alpha\|_{L^2(D)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right),$$

*то при* $\alpha \to 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\alpha &\rightharpoonup \boldsymbol{v} \ \ \textit{в} \ \ L^2(0,T;H_0^1(D)^d), \\ \mathbf{u}_\alpha &\overset{*}{\rightharpoonup} \boldsymbol{v} \ \ \textit{в} \ \ L^\infty(0,T;L^2(D)^d), \\ \nabla p_\alpha &\overset{*}{\rightharpoonup} \nabla q \ \ \textit{в} \ \ H^{-1}(D\times(0,T))^d. \end{aligned} \tag{1.107}$$

Теорема 1.12 является аналогом теорем, полученных Н. Масмуди, П.-Л. Лионсом и Э. Файрайзлом для уравнений Навье–Стокса.

**Теорема 1.13.** *Пусть*

$$\mathbf{b} \in L^\infty(0,T;L^\infty(D)^d), \quad c \in L^2(0,T;L^\infty(D)), \tag{1.109}$$

$$q \in W^{1,2}(0,T;L^2(D)) \cap L^2(0,T;H^1(D)). \tag{1.110}$$

*Если* $\mathbf{u}^\circ \in H(D)$ *и при* $\alpha \to 0$

$$\|\sigma_\alpha\|_{L^2(0,T;L^2(D))} = o(\sqrt{\alpha}), \qquad \mathbf{s}_\alpha \to \mathbf{s} \quad \textit{в } L^2(0,T;H^{-1}(D)^d),$$
$$\mathbf{u}_\alpha^\circ \to \mathbf{u}^\circ \quad \textit{в } L^2(D)^d, \qquad \|p_\alpha^\circ\|_{L^2(D)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right),$$

*то при* $\alpha \to 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\alpha &\to \boldsymbol{v} \ \ \textit{в } L^2(0,T;H_0^1(D)^d), \\ \mathbf{u}_\alpha &\to \boldsymbol{v} \ \ \textit{в } L^\infty(0,T;L^2(D)^d), \\ \nabla p_\alpha &\to \nabla q \ \ \textit{в} \ \ H^{-1}(D\times(0,T))^d. \end{aligned}$$

Теорема 1.13 является аналогом соответствующего результата из теории метода искуственной сжимаемости, предложенного Н.Н. Яненко.

**Теорема 1.15.** *Пусть выполнены предположения (1.109)–(1.110) и* $\mathbf{u}^\circ \in H(D)$, *а также* $\forall \alpha \in (0,1) \ \ \sigma_\alpha \in L^2(0,T;\widehat{L}^2(D))$. *Если при* $\alpha \to 0$

$$\|\sigma_\alpha\|_{L^2(0,T;\widehat{L}^2(D))} = O(\alpha), \qquad \|\mathbf{s}_\alpha - \mathbf{s}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(D)^d)} = O(\sqrt{\alpha}),$$
$$\|\mathbf{u}_\alpha^\circ - \mathbf{u}^\circ\|_{L^2(D)^d} = O(\sqrt{\alpha}), \qquad p_\alpha^\circ \rightharpoonup p^\circ \quad \textit{в } L^2(D),$$

*то при* $\alpha \to 0$

$$p_\alpha \overset{*}{\rightharpoonup} \hat{q} \quad \textit{в} \quad L^\infty(0,T;L^2(D)),$$

*где* $\{\boldsymbol{v}, \hat{q}\}$ *является обобщённым решением (1.91)–(1.94), причём*

$$\frac{d}{dt}\int_D \hat{q}(t)\,dx + \int_D (c(t) + \operatorname{div}\mathbf{b}(t))\hat{q}(t)\,dx = 0$$

*и* $\int_D \hat{q}\,dx\big|_{t=0} = \int_D p^\circ\,dx.$

Приведённая ниже теорема даёт достаточные условия сильной сходимости давления:

**Теорема 1.16.** *Пусть*

$$\mathbf{b} \in W^{1,2}(0,T; W^{1,\infty}(D)^d), \quad c \in W^{1,2}(0,T; L^{\infty}(D)), \qquad (1)$$
$$q \in W^{2,2}(0,T; L^2(D)) \cap L^2(0,T; H^1(D)),$$

*причём*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_D q\,dx + \int_D (c + \operatorname{div}\mathbf{b})q\,dx = 0 \quad \text{\textit{при п.в.}}\ t \in [0,T].$$

*Если* $\mathbf{u}^\circ \in H(D)$ *и при* $\alpha \to 0$

$$\|\sigma_\alpha\|_{L^2(0,T;L^2(D))} = o(\alpha), \qquad \|\mathbf{s}_\alpha - \mathbf{s}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(D)^d)} = o(\sqrt{\alpha}),$$
$$\|\mathbf{u}^\circ_\alpha - \mathbf{u}^\circ\|_{L^2(D)^d} = o(\sqrt{\alpha}), \qquad p^\circ_\alpha \to q^\circ \quad \text{\textit{в}}\ L^2(D),$$

*где* $q^\circ = q|_{t=0}$, *то при* $\alpha \to 0$

$$p_\alpha \to q \quad \text{\textit{в}} \quad L^\infty(0,T; L^2(D)).$$

Различные типы сходимости полей скорости и давления сопоставляются в теореме 1.17. Необходимость полученного достаточного условия сильной сходимости скорости устанавливается в теореме 1.14. В разделе 1.8 приводится точное решение одной начально–краевой задачи (1.52)–(1.56) на торе. На примере этого решения демонстрируется необходимость полученного в теореме 1.16 достаточного условия сильной сходимости давления.

В **главе 2** доказывается, что волновое уравнение на одном не глобально гиперболическом уравнении сводится к задаче Коши для классического волнового уравнения в области $\Omega = \mathbb{R}^2_+ \setminus \bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2$, где

$$\gamma_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2_+ | x = a_1,\ b_1 < t < b_1 + \ell\} \qquad (2.1)$$

$$\gamma_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2_+ | x = a_2,\ b_2 < t < b_2 + \ell\} \qquad (2.2)$$

В этой задаче требуется найти функцию $u = u(x,t)$ такую, что

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,\ (x,t) \in \Omega \qquad (2.4)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{2.5}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x), \tag{2.6}$$

и функция $u$ удовлетворяет дополнительным условиям склейки:

$$u(a_1 - 0, t) = u(a_2 + 0, t + b_2 - b_1) \tag{2.7}$$

$$u(a_1 + 0, t) = u(a_2 - 0, t + b_2 - b_1)$$

$$u_x(a_1 - 0, t) = u_x(a_2 + 0, t + b_2 - b_1)$$

$$u_x(a_1 + 0, t) = u_x(a_2 - 0, t + b_2 - b_1), \tag{2.10}$$

где $b_1 < t < b_1 + \ell$, в предположении, что указанные пределы справа и слева существуют. Вводится понятие усиленно классического решения:

**Определение 2.2.** Решение $u(x,t)$ задачи (2.4)–(2.6) будем называть *усиленно классическим решением задачи (2.4)–(2.10)*, если $u(x,t) \in \mathcal{K}$ и выполнены условия

$$\lim_{(x,\tau)\to(a_1-0,b_1+t)} u(x,\tau) = \lim_{(x,\tau)\to(a_2+0,b_2+t)} u(x,\tau), \tag{2.12}$$

$$\lim_{(x,\tau)\to(a_1+0,b_1+t)} u(x,\tau) = \lim_{(x,\tau)\to(a_2-0,b_2+t)} u(x,\tau), \tag{2.13}$$

$$\lim_{(x,\tau)\to(a_1-0,b_1+t)} u_x(x,\tau) = \lim_{(x,\tau)\to(a_2+0,b_2+t)} u_x(x,\tau), \tag{2.14}$$

$$\lim_{(x,\tau)\to(a_1+0,b_1+t)} u_x(x,\tau) = \lim_{(x,\tau)\to(a_2-0,b_2+t)} u_x(x,\tau), \tag{2.15}$$

где $t \in [0, \ell]$.

Устанавливается следующий критерий существования и единственности усиленно классического решения:

**Теорема 2.3.** *Усиленно классическое решение задачи (2.4)–(2.10) существует и единственно тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.35),(2.36) согласования начальных данных. Это решение даётся формулой*

$$u(x,t) = u^D(x,t) + U(x - a_1, t - b_1) - U(x - a_2, t - b_2), \tag{2.37}$$

*где*

$$u^D(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+t) + \varphi(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(s)ds,$$

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\theta(t-|x|)\int_0^{t-|x|} \omega(\tau)\,d\tau - \theta(t-|x|)\frac{\operatorname{sign} x}{2}\nu\,(t-|x|)\,,$$

$$\omega(t) = \theta(t)\theta(\ell-t)\cdot\left(u_t^D(a_2,b_2+t) - u_t^D(a_1,b_1+t)\right),$$

$$\nu(t) = \theta(t)\theta(\ell-t)\cdot\int_0^t \left(u_x^D(a_2,b_2+\tau) - u_x^D(a_1,b_1+\tau)\right)d\tau.$$

Здесь

$$D_1'(0) = D_1'(\ell) = 0, \quad D_1(0) + D_1(\ell) = 0, \quad D_1''(0) = D_1''(\ell) = 0, \qquad (2.35)$$

$$\int_0^\ell D_2(\tau)\,d\tau = 0, \quad D_2(0) = D_2(\ell) = 0, \quad D_2'(0) = D_2'(\ell) = 0, \qquad (2.36)$$

где

$$D_1(t) = u^D(a_2,b_2+t) - u^D(a_1,b_1+t),$$

$$D_2(t) = u_x^D(a_2,b_2+t) - u_x^D(a_1,b_1+t).$$

Здесь $u^D$ — решение классической задачи Коши для волнового уравнения, найденное по формуле Даламбера:

$$u^D(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(s)ds = f(x-t)+g(x+t). \quad (2.27)$$

**Глава 3** посвящена строгому выводу уравнений для осреднённых по Стеклову полей скорости и давления, описывающих стационарное течение несжимаемой вязкой жидкости в пористой среде. Рассматривается область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, подобласть $F \subset \Omega$ которой заполнена несжимаемой жидкостью. Предполагается, что движение этой жидкости описывается уравнениями

$$\begin{gathered} \mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \\ \nabla p = \mu\Delta\mathbf{u} + \rho\mathbf{f}, \\ \mathbf{u}|_{\partial B} = 0 \end{gathered} \qquad (3.1)$$

где $B = \Omega \setminus F$, $\rho \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$. Под решением системы (3.1) понимается пара $\{\mathbf{u} \in \mathring{\mathbf{W}}_2^2(F), p \in W_2^1(F)\}$.

**Теорема 3.1.** *Пусть* $\{\mathbf{u} \in \mathbf{W}_1^2(F), p \in W_1^1(F)\}$ *— решение (3.1) в* $F$. *Тогда* $\mathbf{U} \in \mathbf{W}_1^2(\Omega_h)$, $P \in W_1^1(\Omega_h)$ *удовлетворяет в области* $\Omega_h$ *системе*

$$\nabla P = \mu \Delta \mathbf{U} + \rho \mathbf{F} + \mathbf{R}^{(h)}, \mathrm{div} \mathbf{U} = 0 \tag{3.3}$$

*где* $\mathbf{F} = \underline{\mathbf{f}}_h$ *— усреднение нулевого продолжения силы* $\mathbf{f}$,

$$\mathbf{R}^{(h)}(\mathbf{x}) = w_h^{-1} \int\limits_{B_h(\mathbf{x}) \cap \partial F} \Pi \cdot \mathbf{n} dS.$$

Здесь $\Pi_{ik} = \mu(\partial_i u_k + \partial_k u_i) + p\delta_{ik}$, а $\mathbf{U}$ и $P$ — суть усреднения по Стеклову нулевых продолжений $\mathbf{u}$ и $p$, $B_h(\mathbf{x})$ — шар радиуса $h$ с центром в точке $x$.

В **Главе 4** рассматривается задача Неймана для уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \ t \in [0, T]; \\ &\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial \Omega} = g, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где граничное условие $g$ для нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ зависит от параметра $t \in [0, T]$: $g = g(x, t)$, $g \in C^{l+\alpha, m+\beta}(S_T)$, причём при каждом $t \in [0, T]$ $\oint\limits_{\partial\Omega} g(x, t)\, dS = 0.$ Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей, $S_T = \partial\Omega \times [0, T]$

**Теорема 4.1.** *Пусть* $\partial\Omega \in C^{l+1+\alpha}$ *и* $g \in C^{l+\alpha, m+\beta}(S_T)$, *причём при* $t \in [0, T]$ $\oint_{\partial\Omega} g\, dS = 0$. *Решение задачи (4.1) при любом* $\alpha' \in (0, \alpha)$ *удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_{l+1+\alpha', m+\beta} \leqslant C_1 \|g\|_{l+\alpha, m+\beta, S_T},$$

*а его градиент* $\nabla u$ *для каждого* $\beta' \in (0, \beta)$ *удовлетворяет оценке*

$$\|\nabla u\|_{l+\alpha', m+\beta'} \leqslant C_2 \|g\|_{l+\alpha, m+\beta, S_T} \tag{4.3}$$

*где константы* $C_1$ *и* $C_2$ *не зависят от* $g$.

Другими словами, градиент решения непрерывен по Гёльдеру по $t$ с показателем $\beta'$, сколь угодно близким к $\beta$. В теореме 4.2 построен пример граничного условия такого, что градиент решения соответствующей задачи не непрерывен по Гёльдеру по $t$ с показателем $\beta$, то есть оценка $\beta' < \beta$ точна.

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Гусев Н.А. Асимптотические свойства решений линеаризованных уравнений движения слабо сжимаемой среды // Труды МФТИ. — 2011. — Том 3, №1.

[2] Гусев Н.А. Слабая и сильная сходимость решений линеаризованных уравнений слабосжимаемой жидкости// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2011. — №1 (22). С. 47–52.

[3] Гусев Н.А. О решениях уравнений типа Обербека Буссинеска для слабо сжимаемых сред // Вестник СамГУ Естественнонаучная серия. 2008. — 8/1(67). — с. 369–380.

[4] Волович И.В., Грошев О.В., Гусев Н.А., Курьянович Э. А. О решениях волнового уравнения на неглобально гиперболическом многообразии // Труды математического института им. В.А. Стеклова. — 2009. — т. 265. — с. 1-15.

[5] Шифрин Э.Г., Гусев Н.А. Уравнения фильтрации и закон Дарси // ДАН. — 2010. — том 435, №5. — с. 619–623.

[6] Гусев Н.А. О зависимости градиента решения задачи Неймана для уравнения Лапласа от параметра // Труды МФТИ. — 2010. — т. 2, №2(6). — с. 67–69.