Программа вступительных экзаменов в аспирантуру МИАН по направлению 01.06.01 математика и механика

специальность 1.1.2 — Дифференциальные уравнения и математическая физика

ЧАСТЬ 1

1) Предел числовой последовательности и функции; критерий Коши существования предела. Непрерывные функции: локальные свойства непрерывных функций; свойства функций, заданных на отрезке.

2) Основные теоремы дифференциального исчисления: теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о конечных приращениях. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций, правило Лопиталя. Формула Тейлора.

3) Неопределенный и определенный интеграл, формула Ньютона–Лейбница. Основные приемы интегрирования. Несобственные интегралы. Определенные интегралы, зависящие от параметра; непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру;

4) Функции многих переменных: пределы, непрерывность; дифференциал и частные производные функции многих переменных; производная по направлению; дифференцирование сложных функций; условный экстремум; теорема о неявном отображении.

5) Числовые ряды: критерий Коши; признаки сходимости; абсолютная и условная сходимость; теорема Римана. Функциональные последовательности и ряды: теоремы о предельном переходе; о непрерывности, почленном интегрировании и дифференцировании.

6) Степенные ряды, формула Коши–Адамара; непрерывность суммы степенного ряда; почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Разложение элементарных функций в степенные ряды.

7) Ряд Фурье и интеграл Фурье, преобразование Фурье.

8) Двойной интеграл и интегралы высшей кратности, замена переменных в кратном интеграле; несобственные кратные интегралы. Криволинейные и поверхностные интегралы. Формулы Грина, Остроградского, Стокса.

9) Системы линейных уравнений, ранг матрицы; определители, их свойства. Векторные пространства; базис и размерность; подпространства; сумма и пересечение подпространств; прямые суммы. Линейные операторы; собственные векторы и собственные значения; понятие о жордановой нормальной форме.

10) Билинейные и квадратичные формы; приведение квадратичной формы к нормальному виду; закон инерции; положительно определенные квадратичные формы; критерий Сильвестра. Евклидовы векторные пространства, ортонормированные базисы; процесс ортогонализации; ортогональные матрицы; линейный оператор, сопряженный к данному, приведение квадратичной формы к главным осям; ортогональные и унитарные линейные операторы; канонический базис для них.

11) Аффинные и евклидовы аффинные пространства. Движения евклидова пространства; классификация движений трехмерного пространства; группа невырожденных аффинных преобразований и группа движений. Векторы: скалярное, векторное и смешанное произведение. Прямая линия и плоскость. Линии второго порядка: эллипс, гипербола и парабола. Поверхности второго порядка: эллипсоид; гиперболоид; параболоид; цилиндр; конические сечения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ЧАСТИ 1

[1] Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М.: Лань, 2007.
[2] Мальцев А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. — М.: Лань, 2009.
[3] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Высшая школа, 1985.
[4] Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. / Г.М. Фихтенгольц — М.: Наука, 1968
[5] Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: Физматлит, 2006.

ЧАСТЬ 2

1) Понятие дифференциального уравнения; поле направлений, решения; интегральные кривые, векторное поле; фазовые кривые. Уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейное уравнение. Теорема о продолжении решения. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (Пикара). Теорема Пеано (без доказательства).

2) Случай линейных уравнений. Линейные системы. Определитель Вронского. Фундаментальные системы и общее решение линейной однородной системы уравнений. Теорема Лиувилля для уравнений 2-го порядка. Неоднородные системы линейных уравнений. Метод вариации постоянных. Решение систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами и неоднородностями специального вида.

3) Теорема о непрерывной зависимости и дифференцируемости решений по начальным условиям и параметрам. Уравнения в вариациях.

4) Уравнения с частными производными. Порядок системы уравнений. Характеристики систем уравнений 1-го порядка. Решение задачи Коши для уравнения 1-го порядка с частными производными.

5) Нормальные системы уравнений и задача Коши. Теорема Коши–Ковалевской (без доказательства). Классификация линейных уравнений 2-го порядка и их приведение к каноническому виду. Основные уравнения математической физики. Постановки начально-краевых задач. Решение смешанных задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности методом разделения переменных (метод Фурье).

6) Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Функция Грина задачи Дирихле и ее свойства. Гармонические функции и их свойства: теорема о среднем, принцип максимума, теорема Лиувилля, теорема об устранимости особенности. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Единственность решения и условия разрешимости.

7) Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Решение задачи Коши в различных классах начальных функций. Решение задачи Коши для волнового уравнения методом преобразования Фурье. Формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгофа, их физический смысл.

8) Пространства Соболева и их свойства. Обобщенные решения краевых и начально-краевых задач для линейных уравнений 2-го порядка общего вида: эллиптического, гиперболического и параболического. Применение метода Галёркина.

9) Численные методы решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: Эйлера, Рунге – Кутта, Адамса, стрельбы, прогонки. Численные методы решения задач математической физики: бегущего счета (гиперболические уравнения), явные и неявные схемы (параболические уравнения), итерационные методы (уравнение Лапласа).

10) Общие свойства динамических систем. Особые точки линейных систем на плоскости. Устойчивость по Ляпунову.

11) Простейшие задачи вариационного исчисления. Задача Лагранжа. Достаточные условия слабого экстремума. Принцип максимума Понтрягина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ЧАСТИ 2

[1] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений / А.Ф. Филиппов — М.: Ленанд, 2015

[2] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд — М.: МЦНМО, 2012

[3] Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. — М.: Физматлит, 2003.

[4] Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И. Г. Петровский. — М.: Наука, 1970.

[5] Зеликин М. И., Оптимальное управление и вариационное исчисление / М. И. Зеликин — М.: Ленанд, 2017.