

Программа вступительных экзаменов в аспирантуру по направлению 01.06.01 математика и механика специальность 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

Раздел 1. Теория вероятностей.

1. Основные понятия теории вероятностей.
 - 1.1. Случайное явление в объективной реальности. Случайный эксперимент. Математическое описание случайного эксперимента.
 - 1.2. Пространство элементарных событий. Алгебра и σ – алгебра событий. Операции над событиями и их свойства.
 - 1.3. Вероятность как характеристика случайного события. Аксиомы вероятности (система Колмогорова). Свойства вероятности.
2. Основные вероятностные схемы.

Классическое определение вероятности. Дискретные вероятностные пространства. Геометрические вероятности. Абсолютно непрерывные вероятностные пространства.
3. Условные вероятности и независимость.
 - 3.1. Понятие условной вероятности. Вероятность совместного осуществления событий (формула умножения вероятностей). Независимость системы событий.
 - 3.2. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
4. Последовательность независимых испытаний.

Вероятностное описание последовательности независимых испытаний (схема Бернулли). Дискретные вероятностные распределения, связанные с последовательностью независимых испытаний.
5. Случайные величины и распределения вероятностей.
 - 5.1. Понятие случайной величины (идея и формальное определение).
 - 5.2. Функции распределения случайных величин и их свойства.
 - 5.3. Дискретные и абсолютно непрерывные случайные величины и соответствующие вероятностные распределения. Общее описание. Основные виды дискретных и абсолютно непрерывных вероятностных распределений.
 - 5.4. Совместные распределения системы случайных величин. Независимость случайных величин.
 - 5.5. Распределения функций от случайных величин.
6. Числовые характеристики случайных величин и соответствующих вероятностных распределений.
 - 6.1. Определение математического ожидания случайной величины. Свойства математического ожидания.
 - 6.2. Определение дисперсии случайной величины. Свойства дисперсии.
 - 6.3. Моменты и центральные моменты высших порядков.
 - 6.4. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин.
 - 6.5. Классические неравенства, связанные с моментами. Неравенство Коши – Буняковского. Неравенство Минковского. Неравенство Чебышева.
 - 6.6. Условные математические ожидания и условные распределения вероятностей относительно отдельных событий. Условные математические ожидания относительно систем событий.
 - 6.7. Многомерное нормальное (гауссовское) распределение и его моментные характеристики.

- 7. Предельные теоремы в теории вероятностей.
 - 7.1. Классические предельные теоремы в схеме независимых испытаний (локальная и интегральная).
 - 7.2. Математический аппарат для доказательства предельных теорем. Производящие функции. Характеристические функции случайных величин и их основные свойства. Связь характеристических функций с моментами. Формула обращения и теорема единственности. Теорема непрерывности (необходимое и достаточное условие слабой сходимости в форме сходимости характеристических функций).
 - 7.3. Закон больших чисел. Идея вероятностного свойства, называемого законом больших чисел. Закон больших чисел в форме Хинчина. Теорема о достаточных условиях применимости закона больших чисел к последовательности независимых, произвольным образом распределенных случайных величин.
 - 7.4. Усиленный закон больших чисел. Теорема Колмогорова о достаточных условиях применимости усиленного закона больших чисел к последовательности независимых, произвольным образом распределенных случайных величин.
 - 7.5. Центральная предельная теорема теории вероятностей и ее различные формы. Центральная предельная теорема для сумм независимых, одинаково распределенных случайных величин (теорема Ляпунова). Центральная предельная теорема для сумм произвольных независимых случайных величин. Условие Линдеберга.
- 8. Различные виды сходимости последовательностей случайных величин.
 - Сходимость по вероятности. Сходимость в среднем квадратическом, сходимость в среднем порядка p , $0 < p < \infty$. Сходимость с вероятностью, равной единице (сходимость почти наверное). Сходимость по распределению (слабая сходимость). Связи между различными видами сходимости.

Раздел 2. Основы теории случайных процессов.

- 9. Понятие случайного процесса. Случайный процесс как математический объект.
 - 9.1. Первый подход к определению случайного процесса (случайный процесс как семейство случайных величин, зависящих от временного параметра). Случайный процесс как функция двух аргументов. Траектории случайного процесса. Конечномерные распределения случайного процесса.
 - 9.2. Второй подход к определению случайного процесса (случайный процесс как измеримое отображение). Пространство траекторий.
 - 9.3. Теорема Колмогорова о существовании случайного процесса с заданной системой конечномерных распределений.
- 10. Марковские процессы с дискретным временем и дискретным множеством состояний (цепи Маркова).
 - 10.1. Определение марковской цепи. Различные формы марковского свойства.
 - 10.2. Вероятности перехода марковской цепи и их свойства. Уравнения Колмогорова – Чепмена. Представление произвольных совместных распределений через вероятности перехода.
 - 10.3. Классификация состояний марковской цепи. Определения свойств существенности, возвратности, положительности и периодичности. Связи между свойствами существенности, возвратности и положительности для конечных и счетных марковских цепей.

- 10.4. Предельное, эргодическое и стационарное распределения марковской цепи. Теоремы о необходимых и достаточных условиях существования эргодического распределения для конечной и счетной марковских цепей.
11. Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множеством состояний.
- 11.1. Определение марковского процесса.
- 11.2. Вероятности перехода марковского процесса и их свойства. Представление произвольных совместных распределений через вероятности перехода.
- 11.3. Инфинитезимальные характеристики марковского процесса (интенсивности перехода и выхода из данного состояния). Соотношения между интенсивностями перехода и выхода.
- 11.4. Дифференциальные уравнения Колмогорова относительно переходных вероятностей (прямая и обратная системы).
- 11.5. Свойства траекторий марковского процесса. Распределения вероятностей, описывающие характер траекторий.
- 11.6. Процесс гибели и размножения. Основные свойства. Условия существования предельного (стационарного) распределения. Аналитическое представление для предельного распределения.
- 11.7. Пуассоновский процесс. Различные определения пуассоновского процесса. Вероятности состояний и вероятности перехода пуассоновского процесса. Свойства траекторий.
12. Марковские процессы с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний.
- 12.1. Вероятностные характеристики марковского процесса. Вероятности перехода и их свойства. Плотности вероятностей перехода. Представление произвольных совместных распределений значений процесса через плотности вероятностей перехода.
- 12.2. Определение диффузионного процесса. Дифференциальные уравнения для диффузионного процесса: обратное уравнение Колмогорова и прямое уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка.
- 12.3. Винеровский процесс (броуновское движение). Определение винеровского процесса. Вероятностные характеристики винеровского процесса. Свойства траекторий.

Раздел 3. Математическая статистика.

13. Основные понятия математической статистики.
Задачи математической статистики. Понятие выборки. Вариационный ряд выборки. Эмпирическая (выборочная) функция распределения. Свойства эмпирических функций распределения. Гистограмма. Выборочные моменты. Моменты выборочных среднего и дисперсии.
14. Основы теории оценивания неизвестных параметров распределений.
- 14.1. Понятие точечной статистической оценки. Несмещенные оценки. Оптимальность несмещенной оценки. Несмещенные оценки с минимальной дисперсией.
- 14.2. Неравенство Рао – Крамера. Эффективность оценки. Критерий Бхаттачария оптимальности оценки.
- 14.3. Оценки максимального правдоподобия. Определение. Уравнения правдоподобия. Общие свойства оценок максимального правдоподобия. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия (состоятельность, асимптотическая нормальность).

- 14.4. Интервальное (доверительное) оценивание. Построение доверительных интервалов с использованием распределения точечной оценки параметра.
15. Проверка статистических гипотез.
 - 15.1. Основные понятия и общие принципы теории проверки гипотез.
 - 15.2. Проверка гипотезы о виде распределения. Критерий согласия Колмогорова. Критерий согласия χ^2 – квадрат К. Пирсона. Критерий χ^2 – квадрат для сложной гипотезы. Критерий пустых ящиков.
 - 15.3. Гипотеза и критерии однородности. Критерий однородности Смирнова. Критерий однородности χ^2 – квадрат.
 - 15.4. Гипотеза независимости. Критерий независимости χ^2 – квадрат. Критерий Спирмена. Критерий Кендалла.
16. Регрессионный анализ.
 - 16.1. Модель линейной регрессии. Описание модели. Оценивание неизвестных параметров (коэффициентов регрессии) в модели линейной регрессии. Метод наименьших квадратов. Оптимальность оценки, полученной по методу наименьших квадратов.
 - 16.2. Модель нормальной регрессии. Оценки максимального правдоподобия для неизвестных параметров нормальной регрессии. Совпадение оценок, полученных по методу наименьших квадратов, с оценками максимального правдоподобия.
 - 16.3. Общая линейная гипотеза нормальной регрессии. F – критерий для проверки линейной гипотезы.

Основная литература

1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Теория вероятностей и прикладная статистика. –М.: издательство Юнити-ДАНА, 2001.
2. Боровков А.А. Теория вероятностей, –М.: издательство Едиториал УРСС, 2003.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. –М.: издательство ЛКИ, 2007.
4. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. – М.: издательство ЛКИ, 2010.
5. Карлин С. Основы теории случайных процессов. –М.: издательство Мир, 1973.
6. Чжун К.Л., АитСахлиа Ф. Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика. –М.: издательство Бинوم. Лаборатория знаний, 2007.
7. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика. –М.: издательство Государственный университет – Высшая школа экономики, 2005.
8. Ширяев А.Н. Вероятность (в двух томах). –М.: издательство МЦНМО, 2007.
9. F.M. Dekking, G. Kraaikamp, H.P. Lopuhaa, L.E. Meester. A Modern Introduction to Probability and Statistics. Cambridge University Press, 2005.
10. Y. Suhov, M. Kelbert. Probability and Statistics by Exemple. Cambridge University Press, 2005.

Дополнительная литература

1. Боровков А.А. Математическая статистика. –М.: издательство Физматлит, 2007.
2. Ватутин В.А., Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков В.П. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах. –М.: издательство Дрофа, 2003.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. –М.: издательство Высшая школа, 2000.
4. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. –М.: издательство Наука, 1977.

5. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания. – М.: издательство Книжный дом «Либроком», 2012.
6. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков А. В. Задачи с решениями по математической статистике. –М.: издательство Дрофа, 2007.
7. Крамер Г. Математические методы статистики. –М.: издательство Мир, 1975.
8. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. –М.: издательство Наука, 1985.
9. Теория вероятностей и математическая статистика: энциклопедия. Главный редактор Ю.В. Прохоров. –М.: издательство Большая Российская энциклопедия , 1999.
10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения (в двух томах). –М.: издательство Книжный дом «Либроком», 2010.
11. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. –М.: издательство Дрофа, 2007.
12. Renyi A. Probability Theory. –Amsterdam, North – Holland, 1970.