Некоторые алгебро-геометрические методы в математической физике

В.В. Жаринов [1] [2]

[1]E-mail: zharinov@mi.ras.ru

[2]Буду рад любым замечаниям, указаниям на ошибки, неточности, опечатки.

Оглавление

Глава 1

Предварительные сведения

В лекциях предполагается рассмотреть ряд алгебраических и геометрических понятий и методов, применяемых в современной математической физике и дифференциальных уравнениях. В полном объеме подобная задача, конечно, неподъемная и мое изложение будет естественно субъективным, отражающим мой личный опыт и мое понимание предмета.

Эта глава носит вводный характер, ее нельзя рассматривать как учебник по затрагиваемым вопросам. Скорее, это сводка определений, соглашение об обозначениях и декларация подхода к основной тематике. Для удобства читателей по каждому разделу приводится список рекомендуемой литературы.

1.1 Стандартные обозначения

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – множество всех целых чисел;

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ – множество всех неотрицательных целых чисел;

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ – множество всех натуральных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество всех вещественных чисел;

$\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ – множество всех комплексных чисел;

$\mathbb{X}^D = \times^D \mathbb{X} = \{x = (\xi^1, \dots, \xi^D); \xi^i \in \mathbb{X}, 1 \leq i \leq D\}$ – декартово произведение D копий множества $\mathbb{X} = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$;

1.2 Язык категорий

Согласно Ю.И. Манину [13], “язык категорий воплощает “социологический” подход к математическому объекту: группа или пространство рассматривается не как множество с внутренне присущей ему структурой, но как член сообщества себе подобных”. В нашем курсе этот язык будет естественным языком, связывающим внешне разнородные объекты и конструкции, позволяющим давать ясные содержательные определения в сложных ситуациях.

1.2.1 Категории

Категория $\mathcal{K}$ задана, если

- определено множество (точнее, класс) $\mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ *объектов* категории $\mathcal{K}$;
- для каждой пары $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ определено множество $\mathrm{Mor}(A, B)$ *морфизмов из A в B*;
- для каждой тройки $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ определен *закон композиции*, т.е. отображение $\mathrm{Mor}(A, B) \times \mathrm{Mor}(B, C) \to \mathrm{Mor}(A, C)$,

  $f \in \mathrm{Mor}(A, B), g \in \mathrm{Mor}(B, C) \mapsto g \circ f \in \mathrm{Mor}(A, C)$;
- выполнены аксиомы:

  (a) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, для всех $h \in \mathrm{Mor}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}(B, C)$, $f \in \mathrm{Mor}(C, D)$ (ассоциативность);

  (b) для каждого $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ существует морфизм $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}(A, A)$ такой, что $\mathrm{id}_A \circ f = f$, $g \circ \mathrm{id}_A = g$ для всех $f \in \mathrm{Mor}(B, A)$, $g \in \mathrm{Mor}(A, B)$ (тождественный морфизм).

Множество $\cup_{A,B\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}} \mathrm{Mor}(A, B)$ всех морфизмов категории $\mathcal{K}$ обозначается $\mathrm{Mor}\,\mathcal{K}$. Если надо уточнить, что речь идет о морфизмах именно категории $\mathcal{K}$ будем писать $\mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ вместо $\mathrm{Mor}(A, B)$.

В ряде категорий морфизмы называются *гомоморфизмами* и вместо символа Mor пишут символ Hom. Морфизмы из $\mathrm{Mor}(A, A)$, $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$, называются *эндоморфизмами*, часто вместо $\mathrm{Mor}(A, A)$ пишут $\mathrm{End}(A)$. Морфизм $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ называется *изоморфизмом*, если существует морфизм $g \in \mathrm{Mor}(B, A)$ такой, что $f \circ g = \mathrm{id}_B$ и $g \circ f = \mathrm{id}_A$; в этом случае g называется *обратным* к f, пишут $g = f^{-1}$. Изоморфизмы из $\mathrm{End}(A)$ называются *автоморфизмами*, множество всех таких автоморфизмов обозначают через $\mathrm{Aut}(A)$. Морфизм $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ называется *мономорфизмом* (*эпиморфизмом*), если равенство $f \circ g_1 = f \circ g_2$, где $g_1, g_2 \in \mathrm{Mor}(A', A)$, возможно лишь при $g_1 = g_2$ (равенство $h_1 \circ f = h_2 \circ f$, где $h_1, h_2 \in \mathrm{Mor}(B, B')$, возможно лишь при $h_1 = h_2$).

Объект $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ называется *универсальным отталкивающим* (*универсальным притягивающим*) *объектом* категории $\mathcal{K}$, если для любого объекта $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ множество $\mathrm{Mor}(X, A)$ (множество $\mathrm{Mor}(A, X)$) состоит ровно из одного элемента. Заметим, что все универсальные отталкивающие (все универсальные притягивающие) объекты, если таковые существуют в данной категории, изоморфны друг другу.

Пример 1.2.1. Категория множеств $\mathcal{S}$: $\mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$ – все множества, $\mathrm{Mor}\,\mathcal{S}$ – всевозможные отображения. Всякое одноэлементное множество есть универсальный притягивающий объект.

Пример 1.2.2. Категория топологических пространств $\mathcal{T}$: $\mathrm{Ob}\,\mathcal{T}$ – все топологические пространства, $\mathrm{Mor}\,\mathcal{T}$ – все непрерывные отображения.

Пример 1.2.3. Категория $\mathcal{S}(M)$ всех подмножеств данного множества: M – данное множество, $\mathrm{Ob}\,\mathcal{S}(M)$ – множество всех подмножеств множества M, частично упорядоченное по включению, для пары подмножеств $A, B \subset M$ множество морфизмов $\mathrm{Mor}(A, B)$ состоит из одного элемента, если $A \subset B$, и пустое в противном случае.

1.2.2 Полезные конструкции

Пусть $\mathcal{K}$ – некоторая категория, *дуальная категория* $\mathcal{K}^\circ$ определяется так: $\mathrm{Ob}\,\mathcal{K}^\circ = \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$, $\mathrm{Mor}(A, B)^\circ = \mathrm{Mor}(B, A)$ для всех $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$, закон композиции не меняется. Подробнее, пусть $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}^\circ}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(B, A)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}^\circ}(B, C) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(C, B)$, $A, B, C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}^\circ = \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$, тогда композиция $f \circ g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}^\circ}(A, C) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(C, A)$. При переходе к дуальной категории универсальный отталкивающий объект переходит в универсальный притягивающий и обратно.

Произведение $\prod \mathcal{K}_i = \prod_{i \in I} \mathcal{K}_i$ семейства категорий $\{\mathcal{K}_i; i \in I\}$ определяется следующим образом: объекты этой категории суть семейства объектов $\prod A_i = \{A_i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}_i; i \in I\}$, а морфизмы из $\prod A_i$ в $\prod B_i$ суть семейства морфизмов $\prod f_i = \{f_i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}_i}(A_i, B_i)\}$, закон композиции покомпонентный, т.е. $(\prod f_i) \circ (\prod g_i) = \prod (f_i \circ g_i)$.

Категория $\mathcal{K}$ называется *подкатегорией* категории $\mathcal{L}$, если объекты $\operatorname{Ob}\mathcal{K} \subset \operatorname{Ob}\mathcal{L}$, морфизмы $\operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(A,B) \subset \operatorname{Mor}_{\mathcal{L}}(A,B)$, $A,B \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$, и закон композиции в $\mathcal{K}$ индуцирован из $\mathcal{L}$. Подкатегория $\mathcal{K}$ называется *полной*, если $\operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(A,B) = \operatorname{Mor}_{\mathcal{L}}(A,B)$.

Пусть $\mathcal{K}$ – категория и $S \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$. Категория $\mathcal{K}_S$ *объектов над* S определяется следующим образом: объекты этой категории суть морфизмы $f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(A,S)$, $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$, а морфизмы из объекта $f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(A,S)$ в объект $g \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(B,S)$, суть морфизмы $h \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(A,B)$ такие, что $g \circ h = f$.

При описании категорных конструкций обычно используется наглядная диаграммная запись. Именно, морфизм $f \in \operatorname{Mor}(A,B)$ записывается как стрелка $A \xrightarrow{f} B$, а композиция морфизмов как последовательность стрелок $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Так, объекты построенной только что категории $\mathcal{K}_S$ суть стрелки $A \xrightarrow{f} S$, а равенство $g \circ h = f$ записывается как коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Часто морфизм $f \in \operatorname{Mor}(A,B)$ удобно записывать как $f : A \to B$.

1.2.3 Сумма и произведение семейства объектов

Пусть дана категория $\mathcal{K}$ и семейство ее объектов $\{X_i; i \in I\} \subset \operatorname{Ob}\mathcal{K}$. Категория $\mathcal{K}_I$ определятся так: объекты категории $\mathcal{K}_I$ суть семейства морфизмов $\{X_i \xrightarrow{f_i} A; i \in I\})$, $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$, а морфизмы из объекта $\{X_i \xrightarrow{f_i} A\}$ в объект $\{X_i \xrightarrow{g_i} B\}$, $A,B \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$, суть морфизмы $A \xrightarrow{h} B$ категории $\mathcal{K}$ такие, что для всех $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X_i \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "g_i"] & \\ A \arrow[rr, "h"'] & & B \end{tikzcd}$$

Если в категории $\mathcal{K}_I$ существует универсальный отталкивающий объект $\{X_i \xrightarrow{\iota_i} X\}$, то объект $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ называется *суммой* данного семейства $\{X_i; i \in I\}$, причем обычно пишут $\sum_{i\in I} X_i$ вместо X, а морфизмы

$\iota_i \in \mathrm{Mor}(X_i, X)$ называются *каноническими инъекциями* слагаемых X_i в $\sum X_i$. По определению, в этом случае для всякого семейства $\{X_i \xrightarrow{f_i} A\}$ существует единственный морфизм $X \xrightarrow{f} A$ такой, что для всех $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X_i \arrow[dl, "\iota_i"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ \sum X_i \arrow[rr, "f"'] & & A \end{tikzcd}$$

Дуальным образом, пусть дана категория $\mathcal{K}$ и семейство ее объектов $\{Y^i; i \in I\} \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$. Категория $\mathcal{K}^I$ определятся так: объекты категории $\mathcal{K}^I$ суть семейства морфизмов $\{A \xrightarrow{f^i} Y^i; i \in I\}$, $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$, а морфизмы из объекта $\{A \xrightarrow{f^i} Y^i\}$ в объект $\{B \xrightarrow{g^i} Y^i\}$, $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$, суть морфизмы $h \in \mathrm{Mor}(A, B)$ категории $\mathcal{K}$ такие, что для всех $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f^i"'] & & B \arrow[dl, "g^i"] \\ & Y^i & \end{tikzcd}$$

Если в категории $\mathcal{K}_I$ существует универсальный притягивающий объект $\{Y \xrightarrow{\pi^i} Y^i\}$, то объект $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ называется *произведением* семейства $\{Y^i; i \in I\}$, причем обычно пишут $\prod_{i \in I} Y^i$, а морфизмы $\pi^i \in \mathrm{Mor}(Y, Y^i)$ называются *каноническими проекциями* из $\prod Y^i$ в Y^i. По определению, в этом случае для всякого семейства $\{A \xrightarrow{f^i} Y^i\}$ существует единственный морфизм $A \xrightarrow{f} Y$ такой, что для всех $i \in I$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^i"'] & & \prod Y^i \arrow[dl, "\pi^i"] \\ & Y^i & \end{tikzcd}$$

В ряде категорий вместо терминов *сумма* и *произведение* используют термины *прямая сумма* и *прямое произведение*, а вместо символов $\sum$ и $\prod$ используют символы $\oplus$ и $\times$.

1.2.4 Функторы

Ковариантный функтор F из категории $\mathcal{K}$ в категорию $\mathcal{L}$ есть правило, которое каждому объекту $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ ставит в соответствие объект $F(A) \in \operatorname{Ob}\mathcal{L}$, и каждому морфизму $f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(A,B)$ ставит в соответствие морфизм $F(f) \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{L}}(F(A),F(B))$, причем справедливы равенства $F(\operatorname{id}_A) = \operatorname{id}_{F(A)}$ и коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F"'] & C \arrow[d, "F"'] \\
F(A) \arrow[r, "F(f)"] & F(B) \arrow[r, "F(g)"] & F(C)
\end{tikzcd}$$

Контравариантный функтор F из категории $\mathcal{K}$ в категорию $\mathcal{L}$ есть правило, которое каждому объекту $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ ставит в соответствие объект $F(A) \in \operatorname{Ob}\mathcal{L}$, и каждому морфизму $f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(A,B)$ ставит в соответствие морфизм $F(f) \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{L}}(F(B),F(A))$, причем справедливы равенства $F(\operatorname{id}_A) = \operatorname{id}_{F(A)}$ и коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F"'] & C \arrow[d, "F"'] \\
F(A) & F(B) \arrow[l, "F(f)"'] & F(C) \arrow[l, "F(g)"']
\end{tikzcd}$$

Пусть F и G – функторы из категории $\mathcal{K}$ в категорию $\mathcal{L}$. *Естественное преобразование* Φ функтора F в функтор G есть правило, которое каждому объекту $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ ставит в соответствие морфизм $\Phi(A) \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{L}}(F(A),G(A))$, причем для всякого морфизма $f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(A,B)$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\Phi(A)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\Phi(B)"] & G(B)
\end{tikzcd}$$

Подробнее смотри [13] и [7], а еще подробнее смотри [3],[4],[6], [11] и [12].

1.3 Абелевы группы

1.3.1 Категория абелевых групп

Напомним, что непустое множество G называется *абелевой группой*, если в нем определена коммутативная групповая операция (обычно записываемая аддитивно), причем выполняются аксиомы:

- $a + b = b + a$ для всех $a, b \in G$;
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ для всех $a, b, c \in G$;
- существует *нулевой элемент* $0 \in G$ такой, что $a + 0 = a$ для всех $a \in G$;
- для любого $a \in G$ существует *противоположный элемент* $-a \in G$ такой, что $a + (-a) = 0$.

Определена категория *абелевых групп* $\mathcal{AG}$, объекты которой суть абелевы группы, а морфизмы – аддитивные отображения, переводящие 0 в 0. Именно, пусть G, H – абелевы группы, отображение $f : G \to H$ есть морфизм абелевых групп, если $f(a + b) = f(a) + f(b)$ для всех $a, b \in G$, и f(0)=0. Морфизмы абелевых групп обычно называют *гомоморфизмами*, а вместо символа Mor используют символ Hom. Ниже используется символ Hom, но морфизмы по-прежнему называются морфизмами. Таким образом множество всех морфизмов из абелевой группы G в абелеву группу H есть $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AG}}(G, H)$.

Простейшая абелева группа есть *нулевая группа*, состоящая из одного нулевого элемента; она является одновременно универсальным отталкивающим и универсальным притягивающим объектом категории $\mathcal{AG}$.

Важная абелева группа есть множество всех целых чисел $\mathbb{Z}$ со стандартной операцией сложения.

Непустое подмножество $H \subset G$ есть *подгруппа* группы G, если оно замкнуто относительно групповых операций, индуцированных из G. Пусть G – абелева группа, и H – ее подгруппа. Элементы $a, b \in G$ называются *эквивалентными относительно* H, пишут $a \sim b$, если разность

$a - b \in H$. Класс эквивалентности элемента $a \in G$ есть подмножество $\mathbf{a} = a + H \subset G$. Множество G/H всех таких классов эквивалентности есть абелева группа с групповой операцией, индуцированной из G, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = a + b + H$ для всех $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G/H$. Эта группа называется *фактор-группой* группы G по подгруппе H. Имеется естественный морфизм $\pi : G \to G/H$, $a \mapsto \mathbf{a}$ для всех $a \in G$.

Для абелевых групп G и H множество морфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AG}}(G, H)$ есть абелева группа с поточечной групповой операцией $(f+g)(a) = f(a)+g(a)$ для всех $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{AG}}(G, H)$ и $a \in G$.

Пусть $f : A \to B$ – морфизм абелевых групп. *Ядро* морфизма f есть абелева группа $\ker f = \{a \in A : f(a) = 0\}$, а *образ* морфизма f есть абелева группа $\mathrm{im}\, f = \{b = f(a) \in B; a \in A\}$. очевидно, $\ker f$ – подгруппа в A, а $\mathrm{im}\, f$ – подгруппа в B. Морфизм $f : A \to B$ является *мономорфизмом*, если $\ker f = 0$, и *эпиморфизмом*, если $\mathrm{im}\, f = B$. В категории $\mathcal{AG}$ морфизм является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он мономорфизм и эпиморфизм одновременно.

В математической физике важное значение имеет категория *топологических абелевых групп* $\mathcal{TAG}$. Это подкатегория категории $\mathcal{AG}$, объектами которой являются абелевы группы, наделенные топологией, в которой групповые операции непрерывны, а морфизмами – непрерывные аддитивные отображения. В категории $\mathcal{TAG}$ каждый изоморфизм является одновременно мономорфизмом и эпиморфизмом, обратное в общем случае неверно, поскольку обратное отображение, хотя оно определено и аддитивно, не обязано быть непрерывным.

Последовательность морфизмов абелевых групп

$$\ldots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \longrightarrow \ldots$$

называется *точной в члене* A_n, если $\mathrm{im}\, f_{n-1} = \ker f_n$, последовательность морфизмов называется *точной*, если она точная во всех своих членах. Например, для всякого морфизма $f : A \to B$ определена точная последовательность

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\pi} B/\mathrm{im}\, f \longrightarrow 0,$$

где $0 \to$ и $\to 0$ – универсальные стрелки, $\ker f \to A$ – естественное вложение, $\pi : B \to B/\mathrm{im}\, f$ – естественный морфизм, описанный выше.

1.3.2 Прямые произведения и прямые суммы

В категории $\mathcal{AG}$ определены произведения и суммы произвольных семейств.

Действительно, пусть дано семейство $\{G_i; i \in I\} \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{AG}$. Множество $\times G_i = \times_{i\in I} G_i$ всевозможных семейств $a = (a_i) = \{a_i \in G_i; i \in I\}$, с покомпонентной групповой операцией, $(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$ для всех $(a_i), (b_i) \in \times G_i$, есть абелева группа. Морфизмы $\pi_k : \times G_i \to G_k$ зададим правилом $(a_i) \mapsto a_k$, $k \in I$, $(a_i) \in \times G_i$. Для каждого семейства морфизмов $\{A \xrightarrow{f_i} G_i; i \in I\}$, $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{AG}$, морфизм $f : A \to \times G_i$ зададим правилом $x \mapsto (a_i) = (f_i(x))$ для всех $x \in A$. Легко проверяется, что эта конструкция определяет абелеву группу $\times G_i$ как произведение семейства $\{G_i; i \in I\}$, а морфизмы $\pi_k : \times G_i \to G_k$ – как канонические проекции.

Дуальным образом, для данного семейства $\{G_i; i \in I\} \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{AG}$, сумма $\oplus G_i = \oplus_{i\in I} G_i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{AG}$ есть подгруппа абелевой группы $\times G_i$, состоящая из всех элементов $a = (a_i) \in \times G_i$, у которых лишь конечное число компонент $a_i \neq 0$, инъекции $\iota_k : G_k \to \oplus G_i$ действуют по правилу $\iota_k(a_k) = (\delta_i^k a_k; i \in I)$, где δ_i^k – символ Кронекера (подробнее, семейство $\iota_k(a_k)$ имеет k-ю компоненту a_k, а все остальные – нулевые). Для каждого семейства морфизмов $\{G_i \xrightarrow{g_i} B; i \in I\}$, $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{AG}$, морфизм $g : \oplus G_i \to B$ задается правилом $a \mapsto \sum_{i\in I} g_i(a_i)$ (лишь конечное число ненулевых слагаемых) для всех $a = (a_i) \in \oplus G_i$. Отождествляя элементы $a_k \in G_k$ с их образами $\iota_k(a_k) \in \oplus G_i$, получим канонические вложения $G_k \subset \oplus G_i$, $k \in I$. Таким образом, каждая группа G_k становится подгруппой группы $\oplus G_i$, а каждый элемент $a \in \oplus G_i$ имеет однозначное представление $a = \sum_{i\in I} a_i$, где сумма содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых $a_i \in G_i$. Другими словами, группа $\oplus G_i$ есть прямая сумма семейства подгрупп G_i, $i \in I$.

Ниже произведения будем называть *прямыми* произведениями, а суммы – *прямыми* суммами.

Итак, для каждого семейства $\{G_i; i \in I\} \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{AG}$ определены и прямая сумма $\oplus_{i\in I} G_i$ и прямое произведение $\times_{i\in i} G_i$, причем имеется естественное вложение $\oplus_{i\in I} G_i \subset \times_{i\in i} G_i$, более того $\oplus_{i\in I} G_i = \times_{i\in i} G_i$, если семейство $\{G_i; i \in I\}$ конечное.

Замечание. Элементы прямой суммы $G = \oplus_{i\in I} G_i$ обычно записывают не как $a = (a_i; i \in I)$, а как $a = \sum_{i\in I} a_i$, такая форма записи подчеркивает, что каждая группа G_i есть прямое слагаемое группы G, и что число ненулевых слагаемых конечно.

В категории $\mathcal{TAG}$ прямые произведения и прямые суммы также определены, причем теми же правилами. Прямое произведение $\times_{i\in I} G_i$ наделяется слабейшей топологией, в которой все проекции $\pi_k : \times G_i \to G_k$ непрерывны, а прямая сумма $\oplus_{i\in I} G_i$ наделяется сильнейшей топологией, в которой все инъекции $\iota_k : G_k \to \oplus G_i$ непрерывны.

1.3.3 Свободные абелевы группы

Пусть S – множество, A – абелева группа. Множество A^S всех отображений из S в A есть абелева группа с обычным поточечным сложением отображений, $(\phi+\psi)(s) = \phi(s)+\psi(s)$ для всех $\phi, \psi \in A^S$ и $s \in S$. Для всякого $\phi \in A^S$ множество $\operatorname{supp}\phi = \{s \in S : \phi(s) \neq 0\}$ называется *носителем отображения* ϕ, отображение называется *конечным*, если его носитель – конечное множество. Множество A^S_{fin} всех конечных отображений из S в A есть подгруппа группы A^S.

Пусть S – множество. Определена категория $\mathcal{AG}^S$, объекты которой суть отображения $\phi \in A^S$, $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{AG}$, а морфизмы из объекта $\phi \in A^S$ в объект $\psi \in B^S$ суть морфизмы $h \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{AG}}(A,B)$ такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ A \arrow[rr, "h"'] & & B \end{tikzcd}$$

Положим $\mathbb{Z}\langle S\rangle = \mathbb{Z}^S_{fin}$, и каждому $s \in S$ поставим в соответствие отображение $\delta_s \in \mathbb{Z}\langle S\rangle$, где

$$\delta_s(t) = \begin{cases} 1, & t = s, \\ 0, & t \neq s, \end{cases} \qquad t \in S,$$

тогда для всякого отображения $\zeta \in \mathbb{Z}\langle S\rangle$ будем иметь однозначное представление $\zeta = \sum_s \zeta(s)\delta_s$ (подчеркнем, что лишь конечное число целых чисел $\zeta(s) \neq 0$). Зададим теперь отображение $\delta = \delta(S) : S \to \mathbb{Z}\langle S\rangle$ правилом $s \mapsto \delta_s$, тогда для всякого $\phi \in A^S$, $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{AG}$, правило $\zeta = \sum_s \zeta(s)\delta_s \mapsto \phi_*(\zeta) = \sum_s \zeta(s)\phi(s)$ определяет единственный морфизм

$\phi_* \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{AG}}(\mathbb{Z}\langle S\rangle, A)$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ \mathbb{Z}\langle S\rangle \arrow[rr, "\phi_*"'] & & A \end{tikzcd}$$

Таким образом, отображение $\delta = \delta(S) : S \to \mathbb{Z}\langle S\rangle$ есть универсальный отталкивающий объект категории $\mathcal{AG}^S$, который называется *свободной абелевой группой, порожденной множеством* S. Обычно элементы $s \in S$ и соответствующие отображения δ_s отождествляют, получая каноническое вложение $S \subset \mathbb{Z}\langle S\rangle$, при этом множество S становится *базисом* абелевой группы $\mathbb{Z}\langle S\rangle$ (заметим, что теперь всякое $\zeta \in \mathbb{Z}\langle S\rangle$ имеет однозначное представление $\zeta = \sum_s \zeta(s)s$, где лишь конечное число целых чисел $\zeta(s) \neq 0$).

Пусть $\mu : S \to T$ – отображение множества S в множество T. Положим $\delta(\mu) = (\delta(T) \circ \mu)_* : \mathbb{Z}\langle S\rangle \to \mathbb{Z}\langle T\rangle$, тогда получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\delta(S)"] \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, "\delta(T)\circ\mu"] & \mathbb{Z}\langle S\rangle \arrow[d, "\delta(\mu)"] \\ T \arrow[r, "\delta(T)"'] & \mathbb{Z}\langle T\rangle \end{tikzcd}$$

Легко проверить, что правила $S \mapsto \delta(S)$, $\mu \mapsto \delta(\mu)$, определяют ковариантный функтор δ из категории множеств $\mathcal{S}$ в категорию абелевых групп $\mathcal{AG}$.

Абелева группа A называется свободной абелевой группой с базисом $S \subset A$, если она изоморфна группе $\mathbb{Z}\langle S\rangle$. Не все абелевы группы свободные, например фактор-группа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, таковой не является (поясним, что $n\mathbb{Z}$ есть подгруппа группы $\mathbb{Z}$, состоящая из целых чисел кратных n). Универсальность базиса $S \subset A$ в том, что для того чтобы определить аддитивное отображение абелевой группы A в какую-либо абелеву группу B достаточно задать его на базисе S и дальше продолжить на всю группу A по аддитивности, причем такое продолжение всегда существует и единственное.

Замечание. Иногда, ради упрощения рассуждений, выражения вида $\zeta = \sum_{s\in S}\zeta(s)s$ называют формальными суммами элементов множества S с коэффициентами из $\mathbb{Z}$, а свободными абелевыми группами называют группы, состоящие из таких формальных сумм с поточечным сложением.

1.3.4 Тензорные произведения

Пусть дано семейство $\{G_i; i \in I\} \subset \operatorname{Ob}\mathcal{AG}$ и пусть $\times G_i = \times_{i\in I} G_i$ – его прямое произведение в категории $\mathcal{AG}$.

Для каждого $k \in I$ определены его дополнение $I \setminus k = \{i \neq k\} \subset I$ и прямое произведение $\times_{i\neq k} G_i$. Имеется естественный изоморфизм абелевых групп

$$(\times_{i\neq k} G_i) \oplus G_k \simeq \times G_i, \quad (a^k, b) \mapsto a^k + b,$$

для всех $a^k = (a_i; i \neq k) \in \times_{i\neq k} G_i$, $b \in G_k$, где

$$a^k + b = (c_i; i \in I) \in \times G_i, \quad c_i = (a^k + b)_i = \begin{cases} a_i, & i \neq k, \\ b, & i = k. \end{cases}$$

Пусть $f : \times G_i \to A$ – отображение прямого произведения $\times G_i$ в абелеву группу $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{AG}$. Для каждого элемента $a^k \in \times_{i\neq k} G_i$ определено отображение $f_{a^k} : G_k \to A$ правилом $f_{a^k}(b) = f(a^k + b)$ для всех $b \in G_k$ (другими словами, f_{a^k} – функция переменной a_k, полученная из f фиксированием остальных переменных). Отображение f называется аддитивным по k-й переменной, если отображение f_{a^k} аддитивное для всех $a^k \in \times_{i\neq k} G_i$, и *полиаддитивным*, если оно аддитивное по каждой переменной. Таким образом, отображение $f : \times G_i \to A$ полиаддитивное, если

$$f(a^k + (b' + b'')) = f(a^k + b') + f(a^k + b'')$$

для всех $k \in I$, $a^k \in \times_{i\neq k} G_i$, $b', b'' \in G_k$.

Рассмотрим категорию, объекты которой суть полиаддитивные отображения $f : \times G_i \to A$, $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{AG}$, а морфизмы из объекта $\times G_i \xrightarrow{f} A$ в объект $\times G_i \xrightarrow{g} B$ суть морфизмы $h \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{AG}}(A, B)$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \times G_i \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[rr, "h"'] & & B \end{tikzcd}$$

В этой категории существует универсальный отталкивающий объект, называемый *тензорным произведением* семейства $\{G_i; i \in I\}$. Действительно, пусть $\mathbb{Z}\langle \times G_i \rangle$ – свободная абелева группа, порожденная множеством $\times G_i$. Обозначим через H подгруппу группы $\mathbb{Z}\langle \times G_i \rangle$, порожденную всеми элементами вида

$$(a^k + (b' + b'')) - (a^k + b') - (a^k + b''),$$

с произвольными $k \in I$, $a^k \in \times_{i \neq k} G_i$, $b', b'' \in G_k$, и рассмотрим фактор-группу $\otimes G_i = \mathbb{Z}\langle \times G_i \rangle / H$. По построению, определена последовательность отображений

$$0 \longrightarrow \times G_i \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z}\langle \times G_i \rangle \xrightarrow{\pi} \otimes G_i \longrightarrow 0,$$

так что определена композиция $\varkappa = \pi \circ \delta : \times G_i \to \otimes G_i$. Легко (хотя и нудно) проверяется, что отображение $\varkappa$ полиаддитивное, и что для любого полиаддитивного отображения $f : \times G_i \to A$, $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{AG}$, коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \times G_i \arrow[dl, "\varkappa"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \otimes G_i \arrow[rr, "\mathbf{f}"'] & & A \end{tikzcd}$$

где фактор-отображение $\mathbf{f} : \otimes G_i \to A$ действует по правилу $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f_*(x)$ для всякого класса эквивалентности $\mathbf{x} = x + H \in \otimes G_i = \mathbb{Z}\langle \times G_i \rangle / H$, морфизм $f_* \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{AG}}(\mathbb{Z}\langle \times G_i \rangle, A)$ был определен выше в конструкции свободной абелевой группы, подчеркнем, что $f_*(x) = 0$ для любого $x \in H$, в силу полиаддитивности исходного отображения f. Таким образом, $\otimes G_i$ – тензорное произведение семейства $\{G_i; i \in I\}$, а $\varkappa$ – каноническое полиаддитивное отображение из $\times G_i$ в $\otimes G_i$. Как правило, полагают

$\varkappa(a) = \otimes_{i\in I} a_i = \otimes a_i$ для всякого $a = (a_i; i \in I) \in \times G_i$, при этом полиаддитивность отображения $\varkappa$ сводится к равенствам

$$\otimes(a^k + (b' + b''))_i = \otimes(a^k + b')_i + \otimes(a^k + b'')_i$$

для всех $k \in I$, $a^k \in \times_{i\neq k} G_i$, $b', b'' \in G_k$.

Замечание. Каждый морфизм $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{AG}}(\otimes G_i, A)$, $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{AG}$, порождается единственным полиаддитивным отображением $f : \times G_i \to A$, именно, $h = \mathbf{f}$ для $f = h \circ \varkappa$. Таким образом, аддитивные отображения из $\otimes G_i$ в произвольную абелеву группу отождествляются с полиаддитивными отображениями из $\times G_i$ в эту группу.

Предложение 1.3.1. (Ассоциативность тензорного произведения) *Для любых абелевых групп G_1, G_2, G_3 существуют единственные изоморфизмы*

$$G_1 \otimes (G_2 \otimes G_3) \simeq G_1 \otimes G_2 \otimes G_3, \quad (G_1 \otimes G_2) \otimes G_3 \simeq G_1 \otimes G_2 \otimes G_3,$$

такие что $a_1 \otimes (a_2 \otimes a_3) \mapsto a_1 \otimes a_2 \otimes a_3$, $(a_1 \otimes a_2) \otimes a_3 \mapsto a_1 \otimes a_2 \otimes a_3$, для всех $a_1 \in G_1$, $a_2 \in G_2$, $a_3 \in G_3$.

Доказательство. Для каждого $a_1 \in G_1$ определено биаддитивное отображение $g_{a_1} : G_2 \times G_3 \to G_1 \otimes G_2 \otimes G_3$ правилом

$$(a_2, a_3) \mapsto a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \quad \text{для всех} \quad a_i \in G_i,\ i = 2, 3,$$

и в силу универсальности тензорного произведения определен морфизм абелевых групп $\mathbf{g}_{a_1} : G_2 \otimes G_3 \to G_1 \otimes G_2 \otimes G_3$, $a_2 \otimes a_3 \mapsto a_1 \otimes a_2 \otimes a_3$ для всех $a_i \in G_i$, $i = 2, 3$. Следовательно, определено биаддитивное отображение $g : G_1 \times (G_2 \otimes G_3) \to G_1 \otimes G_2 \otimes G_3$ правилом

$$(a_1, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{g}_{a_1}(\mathbf{b}) \quad \text{для всех} \quad a_1 \in G_1,\ \mathbf{b} \in G_2 \otimes G_3,$$

и в силу универсальности тензорного произведения определен морфизм абелевых групп $\mathbf{g} : G_1 \otimes (G_2 \otimes G_3) \to G_1 \otimes G_2 \otimes G_3$, обладающий требуемым свойством $a_1 \otimes (a_2 \otimes a_3) \mapsto a_1 \otimes a_2 \otimes a_3$, для всех $a_i \in G_i$, $i = 1, 2, 3$. Легко проверяется, что этот морфизм является изоморфизмом. Единственность такого морфизма следует из того факта, что элементы вида $a_1 \otimes (a_2 \otimes a_3)$ порождают группу $G_1 \otimes (G_2 \otimes G_3)$. $\square$

Аналогичным образом доказывается второе утверждение.

Замечание. Поскольку тензорное произведение, как любой универсальный объект, определено с точностью до изоморфизма, можно считать, что

$$G_1 \otimes (G_2 \otimes G_3) = G_1 \otimes G_2 \otimes G_3 = (G_1 \otimes G_2) \otimes G_3.$$

Предложение 1.3.2. *Пусть дано семейство* $\{G_1, \ldots, G_n\} \subset \operatorname{Ob} \mathcal{AG}$, *и пусть* σ *– подстановка индексов,* $\{1, \ldots, n\} \mapsto \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$. *Тогда существует единственный изоморфизм*

$$G_1 \otimes \cdots \otimes G_n \simeq G_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes G_{\sigma(n)},$$

такой что $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(n)}$ *для всех* $a_1 \in G_1, \ldots, a_n \in G_n$.

Доказательство. Полиаддитивное отображение

$$g_\sigma : G_1 \times \cdots \times G_n \to G_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes G_{\sigma(n)}$$

заданное правилом

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(n)} \quad \text{для всех} \quad a_i \in G_i,\ 1 \leq i \leq n,$$

в силу универсальности тензорного произведения определяет морфизм абелевых групп $\mathbf{g}_\sigma : G_1 \otimes \cdots \otimes G_n \to G_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes G_{\sigma(n)}$ с требуемым свойством. Поскольку всякая подстановка индексов обратима, это изоморфизм. Единственность очевидна. □

Пусть дано семейство $\{G_i \xrightarrow{f_i} H_i\} = \{f_i \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{AG}}(G_i, H_i); i \in I\}$. Правило

$$(a_i) \mapsto (f_i(a_i)) \quad \text{для всех} \quad (a_i) \in \times G_i,$$

определяет морфизм $\times f_i \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{AG}}(\times G_i, \times H_i)$, называемый *прямым произведением семейства аддитивных отображений* $\{G_i \xrightarrow{f_i} H_i\}$. Композиция этого морфизма с каноническим отображением $\varkappa : \times H_i \to \otimes H_i$ есть полиаддитивное отображение $g = \varkappa \circ (\times f_i) : \times G_i \to \otimes H_i$, оно порождает аддитивное отображение $\otimes f_i = \mathbf{g} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{AG}}(\otimes G_i, \otimes H_i)$, называемое *тензорным произведением семейства аддитивных отображений* $\{G_i \xrightarrow{f_i} H_i\}$.

Прямое и тензорное произведения обладают функториальными свойствами. Именно, для всякого множества индексов I определена I-я прямая степень $\mathcal{AG}^I = \times^I \mathcal{AG}$ категории $\mathcal{AG}$. Объекты этой категории суть семейства $\{G_i\}$, или подробнее $\{G_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{AG}; i \in I\}$, морфизмы из объекта $\{G_i\}$ в объект $\{H_i\}$ суть семейства $\{G_i \xrightarrow{f_i} H_i\}$, или подробнее $\{f_i \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{AG}}(G_i, H_i); i \in I\}$, композиция – покомпонентная, или подробнее $\{G_i \xrightarrow{f_i} H_i\} \circ \{F_i \xrightarrow{g_i} G_i\} = \{F_i \xrightarrow{f_i \circ g_i} H_i\}$. Ковариантный функтор $\times$ из категории $\mathcal{AG}^I$ в категорию $\mathcal{AG}$ задается правилами $\{G_i\} \mapsto \times G_i$, $\{G_i \xrightarrow{f_i} H_i\} \mapsto \times G_i \xrightarrow{\times f_i} \times H_i$ (семейство отображается в свое прямое произведение). Аналогичным образом, ковариантный функтор $\otimes$ из категории $\mathcal{AG}^I$ в категорию $\mathcal{AG}$ задается правилами $\{G_i\} \mapsto \otimes G_i$ $\{G_i \xrightarrow{f_i} H_i\} \mapsto \otimes G_i \xrightarrow{\otimes f_i} \otimes H_i$ (семейство отображается в свое тензорное произведение).

Замечание. Отметим, что обычно тензорное произведение определяется для конечного числа сомножителей, когда $I = \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

1.3.5 Градуировка

Говорят, что абелева группа G *градуирована абелевой группой* Γ (иначе, Γ-*градуирована*), если $G = \oplus G_\gamma = \oplus_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ для некоторого семейства абелевых групп $\{G_\gamma; \gamma \in \Gamma\} \subset \operatorname{Ob}\mathcal{AG}$. В этом случае, слагаемые G_γ называются *однородными* (подробнее, γ-*однородными*) компонентами группы G. Пусть $G = \oplus_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$, $H = \oplus_{\gamma\in\Gamma} H_\gamma$ – две Γ-градуированные абелевы группы, морфизм $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{AG}}(G, H)$ называется γ-*однородным*, $\gamma \in \Gamma$, если $f(a) \in H_{\alpha+\gamma}$ для всех $a \in G_\alpha \subset G$, $\alpha \in \Gamma$. Каждый морфизм $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{AG}}(G, H)$ разлагается на γ-однородные компоненты (другими словами, Γ-градуируется). Именно, для всякой пары $\alpha, \beta \in \Gamma$ положим $f_{\alpha\beta} = \pi_\beta \circ f \circ \iota_\alpha : G_\alpha \to H_\beta$, тогда, в силу универсальности суммы, для любого $\gamma \in \Gamma$ существует единственный морфизм $f_\gamma : G \to H$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f_\gamma"] & & H \\ & G_\alpha \arrow[ul, "\iota_\alpha"] \arrow[ur, "g_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

для всех $\alpha \in \Gamma$, где $g_\alpha = \iota_{\alpha+\gamma} \circ f_{\alpha,\alpha+\gamma} = \iota_{\alpha+\gamma} \circ \pi_{\alpha+\gamma} \circ f \circ \iota_\alpha$. Легко проверяется, что морфизмы f_γ суть γ-однородные, корректно определена сумма $\sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma$, и $\sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma = f$ (заметим, что в случае конечной градуирующей группы Γ проблем с определением $\sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma$ вообще нет, поскольку $\operatorname{Hom}_{\mathcal{AG}}(G, H)$ есть абелева группа).

Таким образом, для каждой абелевой группы Γ определена категория $\mathcal{AG}_\Gamma$, объекты которой суть Γ-градуированные абелевы группы, а морфизмы суть Γ-градуированные аддитивные отображения, причем $\mathcal{AG}_\Gamma$ есть полная подкатегория категории $\mathcal{AG}$.

Пример 1.3.1. Каждая абелева группа тривиально градуирована нулевой группой 0, так что $\mathcal{AG}_0 = \mathcal{AG}$.

Пример 1.3.2. Наиболее часто в качестве градуирующей группы используется группа целых чисел $\mathbb{Z}$. В этом случае, $G = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} G_n$. Очень часто $G_n = 0$ для $n < 0$, так что фактически $G = \oplus_{n\in\mathbb{Z}_+} G_n$, и в этом случае группа G называется $\mathbb{Z}_+$-*градуированной*.

Пример 1.3.3. Более детальная градуировка получается, если градуировать группой $\mathbb{Z}^D = \times^D \mathbb{Z} = \{n = (\nu^1, \ldots, \nu^D); \nu^i \in \mathbb{Z}, 1 \le i \le d\}$, $D \in \mathbb{N}$.

Пример 1.3.4. Весьма популярная градуирующая группа есть фактор-группа $\mathbf{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Именно, абелева группа G $\mathbf{Z}_2$-градуирована, если $G = G_{\mathbf{0}} \oplus G_{\mathbf{1}}$, где классы эквивалентности $\mathbf{0} = 0 + 2\mathbb{Z}$, $\mathbf{1} = 1 + 2\mathbb{Z}$, $G_{\mathbf{0}}$ и $G_{\mathbf{1}}$ – *четная* и *нечетная* подгруппы, соответственно. В теоретической физике $\mathbf{Z}_2$-градуированные объекты обычно называют *суперобъектами*, а $\mathbf{Z}_2$-градуированные теории – *супертеориями*.

Подробнее об абелевых группах можно почитать, например, в [4], [11] и [10].

1.4 Линейные пространства

1.4.1 Категория линейных пространств

В абелевых группах, кроме сложения, существующего по определению, имеется умножение на целые числа. Именно, пусть G – абелева группа, и $a \in G$. Тогда,

$$0a = 0,\ 1a = a,\ (-1)a = -a,\ 2a = a + a,\ (-2)a = (-a) + (-a) = -(2a),$$

и так далее. В линейных пространствах операция умножения распространяется на числовые поля.

Пусть $\mathbb{F}$ – фиксированное числовое поле, точнее – поле нулевой характеристики, например, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Абелева группа L называется *линейным (векторным) пространством* над полем $\mathbb{F}$, если в ней определена операция умножения на числа (элементы из $\mathbb{F}$),

$$\mathbb{F} \times L \to L, \quad (\lambda, a) \mapsto \lambda a \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \mathbb{F},\ a \in L,$$

причем выполняются аксиомы:

- $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in L$;
- $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in L$;
- $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$, $a, b \in L$;
- $1a = a$ для всех $a \in L$

(поясним, что 1 – единица из поля $\mathbb{F}$). Элементы линейного пространства часто называются *векторами*.

Определена категория *линейных пространств* $\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$, объекты которой суть линейные пространства (над $\mathbb{F}$), а морфизмы – линейные отображения (над $\mathbb{F}$). Напомним, что отображение $f : L \to M$ линейного пространства L в линейное пространство M называется линейным, если $f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$ для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ и $a, b \in L$. Для данных $L, M \in \operatorname{Ob} \mathcal{LS}$ множество всех морфизмов $f : L \to M$ обозначается через $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(L, M)$ (а не через $\operatorname{Hom}_{\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}}(L, M)$).

В категории линейных пространств справедливы все конструкции из категории абелевых групп. Более того, некоторые из них принимают законченный вид благодаря расширению множества целых чисел до числового поля.

Простейшее линейное пространство есть нулевое пространство, оно является одновременно универсальным отталкивающим и притягивающим объектом в $\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$. Следующее линейное пространство есть поле $\mathbb{F}$.

Абелева подгруппа M линейного пространства L называется *линейным подпространством* пространства L, если она замкнута относительно умножения на числа. Пусть L – линейное пространство, и M – его подпространство. Векторы $a, b \in L$ называются эквивалентными относительно M, если разность $a - b \in M$. Класс эквивалентности вектора $a \in L$ есть подмножество $\mathbf{a} = a + M \subset L$. Множество L/M всех таких классов эквивалентности есть линейное пространство с линейными операциями, индуцированными из L. Это линейное пространство называется *фактор-пространством* пространства L по подпространству M. Имеется естественный морфизм $\pi : L \to L/M$, $a \mapsto \mathbf{a}$ для всех $a \in L$.

Множество морфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(L, M)$, $L, M \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$, есть линейное пространство с линейной операцией $(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda f(a) + \mu g(a)$ для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(L, M)$, $a \in L$.

Пусть линейное отображение $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(L, M)$, $L, M \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$, тогда *ядро* $\ker f = \{a \in L : f(a) = 0\}$ – линейное подпространство в L, а *образ* $\mathrm{im}\, f = \{b = f(a) \in M; a \in L\}$ – линейное подпространство в M, причем определена точная последовательность линейных пространств

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\pi} M/\,\mathrm{im}\, f \longrightarrow 0,$$

иногда фактор-пространство $M/\,\mathrm{im}\, f$ называют *коядром* морфизма f и обозначают через $\mathrm{coker}\, f$. Морфизм $f : L \to M$ является мономорфизмом, если $\ker f = 0$, и эпиморфизмом, если $\mathrm{im}\, f = M$. В категории $\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$ морфизм является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он мономорфизм и эпиморфизм одновременно.

В математической физике главным образом используются топологические линейные пространства и непрерывные линейные отображения, которые образуют категорию *топологических линейных пространств* $\mathcal{TLS}_{\mathbb{F}}$. В этой категории всякий изоморфизм является одновременно и мономорфизмом и эпиморфизмом, обратное в общем случае неверно, поскольку обратное отображение, хотя оно определено и линейно, не обязано быть непрерывным.

1.4.2 Прямые произведения и прямые суммы

В категории линейных пространств прямое произведение и прямая сумма произвольного семейства всегда определены, причем теми же правилами, что и в категории абелевых групп. Именно, пусть дано семейство $\{L_i; i \in I\} \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$. Прямое произведение $\times L_i = \times_{i \in I} L_i$ есть множество всевозможных семейств $a = (a_i) = (a_i \in L_i; i \in I)$ с покомпонентными линейными операциями, проекции $\pi_k : \times L_i \to L_k$, $k \in I$, действуют по правилу $a = (a_i) \mapsto a_k$. Для данного семейства $\{M \xrightarrow{f_i} L_i\}$ морфизм $M \xrightarrow{f} \times L_i$ действует по правилу $f(x) = (a_i = f_i(x))$ для всех $x \in M$. Аналогичным образом, прямая сумма $\oplus L_i = \oplus_{i \in I} L_i$ есть множество всех семейств $a = (a_i \in L_i; i \in I)$, у которых лишь конечное число компонент $a_i \neq 0$, с покомпонентными линейными операциями, инъекции $\iota_k : L_k \to \oplus L_i$, $k \in I$, действуют по правилу $a_k \mapsto (\delta_i^k a_k; i \in I)$. Для данного семейства $\{L_i \xrightarrow{f_i} M\}$ морфизм $\oplus L_i \xrightarrow{f} M$ действует по правилу $f((a_i)) = \sum_{i \in I} f_i(a_i)$ для всех $(a_i) \in \oplus L_i$. Инъекции ι_k суть канонические вложения $L_k \subset \oplus L_i$, $k \in I$, так что $\oplus L_i$ есть прямая сумма своих подпространств L_i. Опять, $\oplus L_i$ есть подпространство в $\times L_i$, причем $\oplus L_i = \times L_i$, если семейство $\{L_i; i \in I\}$ конечное.

В категории $\mathcal{TLS}_{\mathbb{F}}$ прямое произведение $\times L_i$ наделяется слабейшей топологией, в которой все проекции π_i непрерывные, а прямая сумма $\oplus L_i$ наделяется сильнейшей топологией, в которой все инъекции ι_i непрерывные. Вложение $\oplus L_i \subset \times L_i$ всегда непрерывное, а если семейство $\{L_i; i \in I\}$ конечное, то $\oplus L_i = \times L_i$ как топологические пространства.

1.4.3 Базисы

Пусть S – множество, $L \in \operatorname{Ob} \mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$. Множество L^S всех отображений из S в L есть линейное пространство с обычными поточечными линейными операциями. Для всякого $\phi \in L^S$ множество $\operatorname{supp} \phi = \{s \in S : \phi(s) \neq 0\}$ называется носителем отображения ϕ, отображение называется конечным, если его носитель – конечное множество. Множество L^S_{fin} всех конечных отображений из S в L есть линейное подпространство в L^S.

Пусть S – множество. Определена категория $\mathcal{LS}^S_{\mathbb{F}}$, объекты которой суть отображения $\phi \in L^S$, $L \in \operatorname{Ob} \mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$, а морфизмы из объекта $\phi \in L^S$ в объект $\psi \in M^S$ суть морфизмы $h \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(L, M)$ такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ L \arrow[rr, "h"'] & & M \end{tikzcd}$$

Положим $\mathbb{F}\langle S \rangle = \mathbb{F}^S_{fin}$ и каждому $s \in S$ поставим в соответствие отображение $\delta_s \in \mathbb{Z}\langle S \rangle \subset \mathbb{F}\langle S \rangle$, введенное выше в категории абелевых групп. Для всякого отображения $\zeta \in \mathbb{F}\langle S \rangle$ будем иметь однозначное представление $\zeta = \sum_s \zeta^s \delta_s$, где лишь конечное число коэффициентов $\zeta^s = \zeta(s) \in \mathbb{F}$ ненулевые. Отображение $\delta = \delta(S) : S \to \mathbb{F}\langle S \rangle$ зададим правилом $s \mapsto \delta_s$, тогда для всякого $\phi \in L^S$, $L \in \operatorname{Ob} \mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$, правило $\zeta = \sum_s \zeta^s \delta_s \mapsto \phi_*(\zeta) =$

$\sum_s \zeta^s \phi(s)$ определяет единственный морфизм $\phi_* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}\langle S\rangle, L)$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& S \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\
\mathbb{F}\langle S\rangle \arrow[rr, "\phi_*"'] & & L
\end{tikzcd}$$

Итак, отображение $\delta(S) : S \to \mathbb{F}\langle S\rangle$ есть универсальный отталкивающий объект категории $\mathcal{LS}^S_{\mathbb{F}}$. Отождествляя элементы $s \in S$ и отображения $\delta_s \in \mathbb{F}\langle S\rangle$ получим каноническое вложение $S \subset \mathbb{F}\langle S\rangle$, множество S будет базисом линейного пространства $\mathbb{F}\langle S\rangle$, поскольку каждый вектор $\zeta \in \mathbb{F}\langle S\rangle$ имеет единственное представление $\zeta = \sum_s \zeta^s s$, где лишь конечное число коэффициентов $\zeta^s \in \mathbb{F}$ ненулевые. Как и в категории абелевых групп правила $S \mapsto \delta(S)$, $\mu \mapsto \delta(\mu)$, где $\mu : S \to T$, $\delta(\mu) = (\delta(T) \circ \mu)_* : \mathbb{F}\langle S\rangle \to \mathbb{F}\langle T\rangle$, определяют ковариантный функтор из категории множеств в категорию линейных пространств.

Если для данного $L \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$ существует изоморфизм $f : \mathbb{F}\langle S\rangle \simeq L$, то множество S (точнее, его образ $f(S)$) называется *базисом линейного пространства* L. Очевидно, что если два множества S и T являются базисами одного и того же линейного пространства, то они изоморфны в категории множеств. Хотя конструкция базиса в категории линейных пространств дословно повторяет соответствующие рассуждения в категории абелевых групп, замена множества целых чисел на числовое поле приводит к кардинальному отличию в проблеме существования базиса. Именно, *каждое ненулевое линейное пространство имеет базис* (см., например, [10]). Правда, доказательство этого утверждения опирается на лемму Цорна, и значит, неконструктивное.

В категории топологических линейных пространств $\mathcal{TLS}_{\mathbb{F}}$ ситуация с базисом существенно сложнее. Всегда существующий алгебраический базис не обладает универсальностью, поскольку он никак не связан с топологией. Топологический же базис существует далеко не всегда, что побуждает использовать альтернативные подходы к базису и развивать теории, не использующие понятия базиса (см., например,[16], [5]). Топологических проблем не возникает, если линейное пространство *конечномерное*, т.е. если его алгебраический базис конечный, поскольку в этом случае единственная разумная топология – евклидова, а все линейные отображения из одного конечномерного пространства в другое конечномерное пространство – непрерывные. Более того, как известно из курса линейной алгебры, все линейные пространства одинаковой размерности $n \in \mathbb{N}$ изоморфны друг другу и каноническому арифметическому пространству $\mathbb{F}^n$, состоящему из столбцов высотой n с элементами из числового поля $\mathbb{F}$. В свою очередь, линейные отображения из $\mathbb{F}^n$ в $\mathbb{F}^m$ суть прямоугольные матрицы размером $m \times n$ с элементами из $\mathbb{F}$.

1.4.4 Тензорные произведения

Пусть дано семейство $\{L_i; i \in I\} \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$ и пусть $\times L_i = \times_{i\in I} L_i$ – его прямое произведение в категории $\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$.

Для каждого $k \in I$ определены его дополнение $I \setminus k = \{i \neq k\} \subset I$ и прямое произведение $\times_{i\neq k} L_i$. Как и в категории абелевых групп для любых $a^k = (a_i; i \neq k) \in \times_{i\neq k} L_i$ и $b \in L_k$ положим

$$a^k + b = (c_i; i \in I) \in \times L_i, \quad c_i = (a^k + b)_i = \begin{cases} a_i, & i \neq k, \\ b, & i = k. \end{cases}$$

Пусть $f : \times L_i \to M$ – отображение прямого произведения $\times L_i$ в линейное пространство $M \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$. Для каждого элемента $a^k \in \times_{i\neq k} L_i$ определено отображение $f_{a^k} : L_k \to M$ правилом $f_{a^k}(b) = f(a^k + b)$ для всех $b \in L_k$ (другими словами, f_{a^k} – функция переменной a_k, полученная из f фиксированием остальных переменных). Отображение f называется линейным по k-й переменной, если отображение f_{a^k} линейное для всех $a^k \in \times_{i\neq k} L_i$, и *полилинейным*, если оно линейное по каждой переменной. Таким образом, отображение $f : \times L_i \to M$ полилинейное, если

$$f(a^k + (\lambda' b' + \lambda'' b'')) = \lambda' f(a^k + b') + \lambda'' f(a^k + b'')$$

для всех $k \in I$, $a^k \in \times_{i\neq k} L_i$, $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{F}$, $b', b'' \in L_k$.

Рассмотрим категорию, объекты которой суть полилинейные отображения $f : \times L_i \to M$, $M \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$, а морфизмы из объекта $\times L_i \xrightarrow{f} M$ в объект $\times L_i \xrightarrow{g} N$ суть морфизмы $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(M, N)$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \times L_i \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ M \arrow[rr, "h"'] & & N \end{tikzcd}$$

В этой категории существует универсальный отталкивающий объект, называемый тензорным произведением семейства $\{L_i; i \in I\}$. Действительно, пусть $\mathbb{F}\langle \times L_i \rangle$ линейное пространство с базисом $\times L_i$. Обозначим через K подпространство пространства $\mathbb{F}\langle \times L_i \rangle$, порожденное всеми векторами вида

$$(a^k + (\lambda' b' + \lambda'' b'')) - \lambda'(a^k + b') - \lambda''(a^k + b'')$$

с произвольными $k \in I$, $a^k \in \times_{i \neq k} L_i$, $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{F}$, $b', b'' \in L_k$, и рассмотрим фактор-пространство $\otimes L_i = \mathbb{F}\langle \times L_i \rangle / K$. Имеется последовательность отображений

$$0 \longrightarrow \times L_i \xrightarrow{\delta} \mathbb{F}\langle \times L_i \rangle \xrightarrow{\pi} \otimes L_i \longrightarrow 0,$$

так что определено полилинейное отображение $\varkappa = \pi \circ \delta : \times L_i \to \otimes L_i$. Как и в абелевой категории, легко проверяется, что для любого полилинейного отображения $f : \times L_i \to N$, $N \in \operatorname{Ob} \mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$, определена коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& \times L_i \arrow[dl, "\varkappa"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\otimes L_i \arrow[rr, "\mathbf{f}"'] & & N
\end{tikzcd}$$

где фактор-отображение $\mathbf{f} : \otimes L_i \to N$ действует по правилу $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f_*(x)$ для всякого $\mathbf{x} = x + K \in \otimes L_i$, морфизм $f_* \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}\langle \times L_i \rangle, N)$ был определен выше при доказательстве универсальности базиса, подчеркнем, что $f_*(x) = 0$ для любого $x \in K$, в силу полилинейности отображения f. Таким образом, $\otimes L_i$ – тензорное произведение семейства $\{L_i; i \in I\}$, а $\varkappa$ – каноническое полилинейное отображение из $\times L_i$ в $\otimes L_i$. Обычно полагают $\varkappa(a) = \otimes_{i \in I} a_i = \otimes a_i$ для любого $a = (a_i; i \in I) \in \times L_i$, при этом полилинейность отображения $\varkappa$ сводится к равенствам

$$\otimes(a^k + (\lambda' b' + \lambda'' b''))_i = \lambda' \cdot (\otimes(a^k + b')_i) + \lambda'' \cdot (\otimes(a^k + b'')_i)$$

для всех $k \in I$, $a^k \in \times_{i \neq k} L_i$, $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{F}$, $b', b'' \in L_k$.

Замечание. Как и в категории абелевых групп, каждый морфизм $h \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\otimes L_i, N)$ порождается единственным полилинейным отображением $f : \times L_i \to N$, именно, $h = \mathbf{f}$ для $f = h \circ \varkappa$. Таким образом, линейные отображения из $\otimes L_i$ в какое-либо линейное пространство отождествляются с полилинейными отображениями из $\times L_i$ в это пространство.

Предложение 1.4.1. *Для любых линейных пространств* L_1, L_2, L_3 *существуют единственные изоморфизмы*

$$L_1 \otimes (L_2 \otimes L_3) \simeq L_1 \otimes L_2 \otimes L_3, \quad (L_1 \otimes L_2) \otimes L_3 \simeq L_1 \otimes L_2 \otimes L_3,$$

такие что $a_1 \otimes (a_2 \otimes a_3) \mapsto a_1 \otimes a_2 \otimes a_3$, $(a_1 \otimes a_2) \otimes a_3 \mapsto a_1 \otimes a_2 \otimes a_3$ *для всех* $a_1 \in L_1$, $a_2 \in L_2$, $a_3 \in L_3$.

Предложение 1.4.2. *Пусть* $\{L_1, \ldots, L_n\} \subset \operatorname{Ob} \mathcal{LS}$ *и* σ – *подстановка индексов,* $\{1, \ldots, n\} \mapsto \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$. *Тогда существует единственный изоморфизм*

$$L_1 \otimes \cdots \otimes L_n \simeq L_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes L_{\sigma(n)},$$

такой что $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(n)}$ *для всех* $a_1 \in L_1, \ldots, a_n \in L_n$.

Доказательства этих предложений почти дословно повторяют доказательства аналогичных утверждений для абелевых групп. Опять, учитывая что тензорное произведения определено с точностью до изоморфизма, можно произвести соответствующие отождествления.

Пусть дано семейство $\{L_i \xrightarrow{f_i} M_i\} = \{f_i \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(L_i, M_i); i \in I\}$. Правило $(a_i) \mapsto (f_i(a_i))$ для всех векторов $(a_i) \in \times L_i$, определяет морфизм $\times f_i \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\times L_i, \times M_i)$, называемый *прямым произведением семейства линейных отображений* $\{L_i \xrightarrow{f_i} M_i\}$. композиция этого морфизма с каноническим отображением $\varkappa : \times M_i \to \otimes M_i$ есть полилинейное отображение $g = \varkappa \circ (\times f_i) : \times L_i \to \otimes M_i$, оно порождает линейное отображение $\otimes f_i = \mathbf{g} \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\otimes L_i, \otimes M_i)$, называемое *тензорным произведением семейства линейных отображений* $\{L_i \xrightarrow{f_i} M_i\}$. Прямое и тензорное произведение опять обладают функториальными свойствами, причем функторы $\times$ и $\otimes$ задаются теми же правилами, что и в категории абелевых групп.

В категории топологических линейных пространств $\mathcal{TLS}_{\mathbb{F}}$ ситуация ситуация более сложная и многоплановая. Подробнее, пусть дано семейство $\{L_i; i \in I\} \subset \operatorname{Ob} \mathcal{TLS}_{\mathbb{F}}$, и пусть $\times L_i$ – его прямое произведение в категории $\mathcal{TLS}_{\mathbb{F}}$ (со слабейшей топологией, в которой все проекции непрерывные). При построении категории, характеризующей тензорное произведение возникает вопрос о непрерывности полилинейных отображений $f : \times L_i \to M$, $M \in \operatorname{Ob} \mathcal{TLS}_{\mathbb{F}}$. Имеются две основные возможности: (a) полилинейное отображение f непрерывно в категории топологических пространств $\mathcal{T}$ (f непрерывно по совокупности переменных), в этом случае каждое из линейных отображений $f_{a^k} : L_k \to M$, $a^k \in \times_{i \neq k} L_i$, непрерывно. (б) для всякого $a^k \in \times_{i \neq k} L_i$ линейное отображение $f_{a^k} : L_k \to M$ непрерывно (f непрерывно по каждой переменной в отдельности), в этом случае полилинейное отображение f не обязано быть непрерывным по совокупности переменных (хотя есть широкий класс топологических линейных пространств, так называемых *ядерных пространств*, где это имеет место, см., например, [15]), [19]. Имеются и другие возможности, см., например, [16], [1], [19]. Пусть выбрано конкретное определение полилинейной непрерывности. Топологическое тензорное произведение (как универсальный объект соответствующей топологической категории) получают из алгебраического $\{\otimes L_i, \varkappa\}$, наделяя линейное пространство $\otimes L_i$ сильнейшей топологией, при которой полилинейное отображение $\varkappa$ непрерывно (в выбранном смысле). Полученное таким образом топологическое линейное пространство $\otimes L_i$ (сохраняется старое обозначение), как правило, неполное, что неудобно в приложениях, и его еще приходится пополнять. Пополненное пространство обычно обозначается через $\widehat{\otimes} L_i$. Ситуация существенно упрощается, если алгебраическое тензорное произведение удается вложить в подходящее топологическое линейное пространство и затем в качестве топологического тензорного произведения использовать замыкание алгебраического тензорного произведения в топологии объемлющего пространства.

Пример 1.4.1. Пусть $\mathcal{C}(T)$ – банахово линейное пространство всех непрерывных функций на отрезке $T = [0, 1]$ с нормой

$$\|\phi\| = \max_{t \in T} |\phi(t)|, \quad \phi \in \mathcal{C}(T).$$

Алгебраический тензорный квадрат $\otimes^2 \mathcal{C}(T) = \mathcal{C}(T) \otimes \mathcal{C}(T)$ состоит из всех функций на квадрате $T^2 = T \times T$ вида

$$f(s,t) = \sum_{\alpha=0}^{n} \phi_\alpha(s) \psi_\alpha(t), \quad \phi_\alpha, \psi_\alpha \in \mathcal{C}(T), \quad s, t \in T, \quad n = n(f).$$

Очевидно, $\otimes^2 \mathcal{C}(T)$ плотно вкладывается в банахово пространство $\mathcal{C}(T^2)$ всех непрерывных функций двух переменных на квадрате T^2. Его замыкание $\widehat{\otimes}^2 \mathcal{C}(T) = \mathcal{C}(T^2)$ можно рассматривать как топологический квадрат банахова пространства $\mathcal{C}(T)$. В качестве упражнения предлагается подумать об универсальности такого тензорного произведения.

Топологических трудностей не возникает при построении тензорных произведений конечномерных линейных пространств.

Пример 1.4.2. Пусть M и N – два конечномерных линейных пространства с базисами $\{a_1, \ldots, a_m\} \subset M$ и $\{b_1, \ldots, b_n\} \subset N$, соответственно. Тогда их тензорное произведение (алгебраическое и топологическое) есть линейное пространство $M \otimes N$ с базисом $\{a_i \otimes b_k; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n\}$. В частности, $\dim(M \otimes N) = \dim M \cdot \dim N = mn$.

1.4.5 Градуировка

Говорят, что линейное пространство L *градуировано абелевой группой* Γ (иначе, Γ-*градуировано*), если $L = \oplus L_\gamma = \oplus_{\gamma \in \Gamma} L_\gamma$ для некоторого семейства линейных пространств $\{L_\gamma; \gamma \in \Gamma\} \subset \operatorname{Ob} \mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$. В этом случае, слагаемые L_γ называются *однородными* (подробнее, γ-*однородными*) компонентами пространства L. Пусть $L = \oplus_{\gamma \in \Gamma} L_\gamma$, $M = \oplus_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma$ – два Γ-градуированных линейных пространства, морфизм $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(L, M)$ называется γ-*однородным*, $\gamma \in \Gamma$, если $f(a) \in M_{\alpha+\gamma}$ для всех $a \in L_\alpha \subset L$, $\alpha \in \Gamma$. Каждый морфизм $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(L, M)$ разлагается на однородные компоненты (другими словами, Γ-градуируется). Именно, для всякой пары $\alpha, \beta \in \Gamma$ положим $f_{\alpha\beta} = \pi_\beta \circ f \circ \iota_\alpha : L_\alpha \to M_\beta$, тогда, в силу универсальности прямой суммы, для любого $\gamma \in \Gamma$ существует единственный морфизм $f_\gamma : L \to M$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "f_\gamma"] & & M \\ & L_\alpha \arrow[ul, "\iota_\alpha"] \arrow[ur, "g_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

для всех $\alpha \in \Gamma$, где $g_\alpha = \iota_{\alpha+\gamma} \circ f_{\alpha,\alpha+\gamma} = \iota_{\alpha+\gamma} \circ \pi_{\alpha+\gamma} \circ f \circ \iota_\alpha$. Легко проверяется, что морфизмы f_γ суть γ-однородные, корректно определена сумма $\sum_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma$, и $\sum_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma = f$ (заметим, что в случае конечной градуирующей группы Γ проблем с определением $\sum_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma$ вообще нет, поскольку $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(L, M)$ есть линейное пространство).

Таким образом, для каждой абелевой группы Γ определена категория $\mathcal{LS}_{\mathbb{F},\Gamma}$, объекты которой суть Γ-градуированные линейные пространства, а морфизмы суть Γ-градуированные линейные отображения, причем $\mathcal{LS}_{\mathbb{F},\Gamma}$ есть полная подкатегория категории $\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$.

Линейное подпространство M данного Γ-градуированного пространства $L = \oplus_{\gamma\in\Gamma} L_\gamma$ называется Γ-*градуированным*, если $M = \oplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$, где $M_\gamma = M \cap L_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$.

Пусть дано семейство $\{L_i; i \in I\}$ Γ-градуированных линейных пространств, $L_i = \oplus_{\gamma_i\in\Gamma} L_{i,\gamma_i}$. Его тензорное произведение обладает естественной Γ-градуировкой. Именно,

$$\otimes L_i = \otimes_{i\in I} \left(\oplus_{\gamma_i\in\Gamma} L_{i,\gamma_i}\right) = \oplus_{\gamma\in\Gamma}(\otimes L_i)_\gamma, \quad (\otimes L_i)_\gamma = \oplus_{\sum_{i\in I}\gamma_i=\gamma}(\otimes L_{i,\gamma_i}).$$

Например, для семейства из двух пространств $L = \oplus_{\alpha\in\Gamma} L_\alpha$, $M = \oplus_{\beta\in\Gamma} M_\beta$, получим

$$L \otimes M = \oplus_{\gamma\in\Gamma}(L \otimes M)_\gamma, \quad (L \otimes M)_\gamma = \oplus_{\alpha+\beta=\gamma}(L_\alpha \otimes M_\beta)$$

1.4.6 Дуальность

Для всякого линейного пространства $L \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$ его *сопряженное* (иначе, *дуальное*) пространство определяется как $L^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(L, \mathbb{F}) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$ – линейное пространство всех линейных отображений из L в числовое поле $\mathbb{F}$, рассматриваемое как одномерное линейное пространство. Итак, каждое $\phi \in L^*$ есть *линейная форма* (иначе, *линейный функционал*), причем обычно пишут $\phi(a) = \langle \phi, a\rangle$ для всех $a \in L$. Для всякого линейного отображения $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(L, M)$ определено *сопряженное* (иначе, *дуальное*) отображение $f^* \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(M^*, L^*)$ правилом $f^*(\phi) = \phi \circ f$ для всех $\phi \in M^*$ (т. е., $\langle f^*(\phi), a\rangle = \langle \phi, f(a)\rangle$ для всех $\phi \in M^*$ и $a \in L$). Операция сопряжения обладает функториальными свойствами. Действительно, правила $L \mapsto L^*$, $L \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$, $f \mapsto f^*$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(L, M)$, определяют контравариантный функтор $*$ на категории $\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$, $* : \mathcal{LS}_{\mathbb{F}} \to \mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$ (проверить это!).

В категории топологических линейных пространств $\mathcal{TLS}_{\mathbb{F}}$ сопряжение определяется теми же правилами, причем сопряженные пространства наделяются различными топологиями, например *слабой* (топология поточечной сходимости) или *сильной* (топологией сходимости на ограниченных множествах), подробнее см., например, [16].

Операция сопряжения позволяет дать альтернативную конструкцию тензорного произведения линейных пространств. Действительно, пусть дано семейство $\{L_i; i \in I\} \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$, и пусть $\times L_i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$ – его прямое произведение. Обозначим через $P(\times L_i) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$ – линейное пространство всех полилинейных форм на $\times L_i$ (т. е., всех полилинейных отображений $\phi : \times L_i \to \mathbb{F}$), и пусть $P(\times L_i)^* \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$ – его сопряженное. Имеется естественное отображение $\varkappa : \times L_i \to P(\times L_i)^*$, даваемое правилом $\varkappa((a_i))(\phi) = \phi((a_i))$ для всех $(a_i) \in \times L_i$ и $\phi \in P(\times L_i)$. Его образ $\mathrm{im}\,\varkappa = \varkappa(\times L_i) \subset P(\times L_i)^*$ не является линейным подпространством пространства $P(\times L_i)^*$, и мы обозначим через $\otimes L_i$ линейное пространство, порожденное множеством $\mathrm{im}\,\varkappa$ (иначе, линейную оболочку множества $\mathrm{im}\,\varkappa$, еще иначе, наименьшее линейное подпространство пространства $P(\times L_i)^*$, содержащее $\mathrm{im}\,\varkappa$). Можно проверить, что $\times L_i \xrightarrow{\varkappa} \otimes L_i$ есть универсальный отталкивающий элемент категории, характеризующей тензорное произведение линейных пространств. Таким образом, построено другое тензорное произведение семейства $\{L_i; i \in I\} \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$, конечно, изоморфное старому. Преимущество альтернативной конструкции в том, что в ней не требуется переходить к фактор-пространству, хотя старая конструкция нагляднее. В категории топологических линейных пространств, только что построенное алгебраическое тензорное произведение наделяют сильнейшей топологией, при которой отображение $\varkappa$ непрерывно и при необходимости пополняют его. Подробнее см., например, [16].

Для более глубокого изучения затронутых в этом разделе вопросов рекомендую [10], [1], [19], [12], [16], [15].

1.5 Алгебры

1.5.1 Категория алгебр

Пусть $\mathbb{F}$ – фиксированное числовое поле. Линейное пространство A над полем $\mathbb{F}$ называется *алгеброй над полем* $\mathbb{F}$, если в нем определена билинейная операция (*умножение*)

$$A \times A \to A, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b \quad \text{для всех} \quad a, b \in A,$$

так что

- $a \cdot (\lambda b + \mu c) = \lambda \cdot (a \cdot b) + \mu \cdot (a \cdot c)$;
- $(\lambda a + \mu b) \cdot c = \lambda \cdot (a \cdot c) + \mu \cdot (b \cdot c)$;

для всех $a, b, c \in A$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Ниже, как правило, вместо $a \cdot b$ будем писать ab. Определена категория *алгебр* $\mathcal{AL} = \mathcal{AL}_{\mathbb{F}}$, объекты которой суть алгебры (над $\mathbb{F}$), а морфизмы из алгебры A в алгебру B суть линейные отображения $f : A \to B$ такие, что $f(ab) = f(a)f(b)$ для всех $a, b \in A$. Множество морфизмов из алгебры A в алгебру B обозначаем через $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AL}}(A, B)$.

По определению, умножение $\cdot$ есть билинейная операция в линейном пространстве $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$, поэтому, согласно универсальному свойству тензорного произведения, существует единственное линейное отображение $\mu = \mu_A : A \otimes A \to A$ такое, что $a \cdot b = \mu(a \otimes b)$ для всех $a, b \in A$. Преимущество такого определения в том, что мы остаемся в категории линейных пространств и можем использовать все ее возможности. Так линейное отображение $f : A \to B$, где A и B – алгебры, является морфизмом алгебр, если $f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f)$, т. е., если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "f \otimes f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \otimes B \arrow[r, "\mu_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Алгебра A называется *унитальной*, если в ней есть элемент *единица* $e = e_A \in A$ такой, что $ae = ea = a$ для всех $a \in A$. Другими словами, существует линейное отображение $\varepsilon = \varepsilon_A : \mathbb{F} \to A$ такое, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F} \otimes A \arrow[d, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}"'] & = & A \arrow[d, equal] & = & A \otimes \mathbb{F} \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"] \\ A \otimes A \arrow[rr, "\mu"'] & & A & & A \otimes A \arrow[ll, "\mu"] \end{tikzcd}$$

Конечно, $\varepsilon(1) = e$ для единицы $1 \in \mathbb{F}$ (поясним, что $\mathrm{id} = \mathrm{id}_A$ – тождественное отображение в A, и обратим внимание, что $\mathbb{F} \otimes L = L = L \otimes \mathbb{F}$ для любого линейного пространства L над $\mathbb{F}$). Морфизм f из унитальной алгебры A в унитальную алгебру B называется *унитальным*, если $f(e_A) = f(e_B)$, т. е., если коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F} \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{F} \arrow[r, "\varepsilon_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Требование унитальности алгебры A во многих ситуациях несущественно. Действительно, пусть алгебра A не имеет единицы. Обозначим через $\widehat{A} = \mathbb{F} \oplus_{\mathbb{F}} A$ прямую сумму двух линейных пространств над $\mathbb{F}$ с элементами $(\lambda, a) = \lambda e + a$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $a \in A$, где $e = (1, 0) \in \widehat{A}$, $a = (0, a) \in \widehat{A}$, и покомпонентными линейными операциями

$$\alpha(\lambda e + a) + \beta(\mu e + b) = (\alpha\lambda + \beta\mu)e + (\alpha a + \beta b)$$

для всех $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a, b \in A$. Введем в линейном пространстве $\widehat{A}$ умножение таким образом, чтобы элемент e стал единицей, а алгебра A стала подалгеброй алгебры $\widehat{A}$. Именно, положим

$$(\lambda e + a) \cdot (\mu e + b) = (\lambda\mu)e + (\mu a + \lambda b + ab) \quad \text{для всех} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{F},\ a, b \in A.$$

Легко проверяется, что при таком определении все аксиомы умножения и наши пожелания выполнены. Таким образом, $\widehat{A}$ есть унитальное расширение алгебры A. Далее, для любого левого A-модуля M правило

$$(\lambda e + a) \cdot x = \lambda x + ax, \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \mathbb{F},\ a \in A,\ x \in M,$$

определяет на M структуру левого $\widehat{A}$-модуля. Другими словами, всякий левый A-модуль одновременно является и левым $\widehat{A}$-модулем. Наконец, пусть f – левое A-линейное отображение левого A-модуля M в левый A-модуль N. Тогда

$$f((\lambda e + a)x) = f(\lambda x + ax) = f(\lambda x) + f(ax) = \lambda f(x) + af(x) = (\lambda e + a)f(x)$$

для всех $\lambda \in \mathbb{F}$, $a \in A$, $x \in M$. Следовательно, всякое левое A-линейное отображение одновременно является и левым $\widehat{A}$-линейным отображением. Таким образом, в категорных рассуждениях алгебру A, без ограничения общности, можно считать унитальной.

Алгебра A называется *коммутативной*, если

$$ab = ba \quad \text{для всех} \quad a, b \in A.$$

На языке диаграмм это означает, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\mu"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "\mu"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

где перестановка σ задается правилом $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$ для всех $a, b \in A$ (заметим, что семейство $\{A, A\} \subset \operatorname{Ob} \mathcal{AL}_{\mathbb{F}}$ считается упорядоченным). Алгебра A называется *ассоциативной*, если

$$(ab)c = a(bc) \quad \text{для всех} \quad a, b, c \in A.$$

На языке диаграмм это означает, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dr, "\mu"] & \\ A \otimes A \otimes A \arrow[ur, "\mu \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes \mu"'] & & A \\ & A \otimes A \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

Алгебра A называется *алгеброй Ли*, если справедливы равенства

- $ab + ba = 0 \quad$ для всех $\quad a, b \in A \quad$ (антикоммутативность),
- $a(bc) + b(ca) + c(ab) = 0 \quad$ для всех $\quad a, b, c \in A \quad$ (тождество Якоби).

В алгебрах Ли вместо ab обычно пишут $[a, b]$, и операцию умножения называют *скобкой Ли.*

Линейное подпространство $B \subset A$ называется *подалгеброй* алгебры A, если оно замкнуто относительно умножения, т. е.

$$ab \in B \quad \text{для всех} \quad a, b \in B.$$

Линейное подпространство $J \subset A$ называется *левым* (*правым*) *идеалом* алгебры A, если

$$ab \in J \quad (ba \in J) \quad \text{для всех} \quad a \in A,\ b \in J.$$

Линейное подпространство J называется *идеалом* (подробнее, *двусторонним идеалом*) алгебры A, если J есть левый и правый идеал одновременно. Подмножество

$$\operatorname{cen} A = \{a \in A : ab = ba \quad \text{для всех} \quad b \in A\}$$

называется *центром* алгебры A, а подмножество

$$\operatorname{ann} A = \{a \in A : ab = ba = 0 \quad \text{для всех} \quad b \in A\} \subset \operatorname{cen} A$$

называется *аннулятором* алгебры A. Ясно, что $\operatorname{cen} A$ – подалгебра алгебры A, а $\operatorname{ann} A$ – ее идеал. Если A – алгебра Ли, то $\operatorname{cen} A = \operatorname{ann} A$.

Пусть B – линейное подпространство алгебры A, так что определено линейное фактор-пространство A/B. Если B – идеал алгебры A, то A/B – алгебра, умножение индуцировано из A, $\mathbf{ab} = ab + B \in A/B$ для всех $\mathbf{a} = a + B, \mathbf{b} = b + B \in A/B$.

Для всякого $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{AL}}(A, B)$ ядро $\ker f = \{a \in A : f(a) = 0\}$ есть идеал алгебры A, а образ $\operatorname{im} f = \{b = f(a) \in B; a \in A\}$ есть подалгебра алгебры B.

Алгебра A называется *топологической*, если A – топологическое линейное пространство и умножение непрерывно, причем имеется две основных возможности: (а) умножение раздельно непрерывно (т. е. непрерывно по каждому сомножителю при фиксированном другом), (б) умножение непрерывно по двум переменным (т. е. непрерывно как отображение топологического пространства $A \times A$ в топологическое пространство A). Обычно предполагается, что умножение раздельно непрерывно. Морфизм топологической алгебры A в топологическую алгебру B называется *непрерывным*, если он непрерывен как отображение топологического пространства A в топологическое пространство B. Таким образом, определена категория *топологических алгебр* $\mathcal{TAL} = \mathcal{TAL}_{\mathbb{F}}$ (см., например, [14]).

Пример 1.5.1. Числовое поле $\mathbb{F}$ есть простейшая нетривиальная алгебра, причем унитальная ассоциативная и коммутативная.

Пример 1.5.2. Множество $\mathbf{M}(D, \mathbb{F})$ всех квадратных матриц порядка D с элементами из $\mathbb{F}$ есть унитальная ассоциативная алгебра с обычными алгебраическими операциями.

Пример 1.5.3. Множество $\mathfrak{sl}(D, \mathbb{F}) = \{a \in \mathbf{M}(D, \mathbb{F}) : \operatorname{tr}(a) = 0\}$ всех матриц из $\mathbf{M}(D, \mathbb{F})$ с нулевым следом ($\operatorname{tr}(a)$ – след матрицы a) есть алгебра Ли над $\mathbb{F}$ с коммутатором $[a, b] = ab - ba$ для $a, b \in \mathfrak{sl}(D, \mathbb{F})$, в качестве скобки.

Пример 1.5.4. Множество $\mathfrak{u}(D, \mathbb{C}) = \{a \in \mathbf{M}(D, \mathbb{C}) : a^+ = -a\}$ всех косоэрмитовых матриц из $\mathbf{M}(D, \mathbb{F})$ ($a^+ = \bar{a}'$ – эрмитово сопряжение, где черта $^-$ – комплексное сопряжение, штрих $'$ – транспонирование) есть алгебра Ли над $\mathbb{R}$ с коммутатором в качестве скобки.

Пример 1.5.5. Пусть S – множество, A – алгебра, тогда множество A^S всех отображений из S в A есть алгебра с поточечными алгебраическими операциями

$$(\lambda\phi + \mu\psi)(s) = \lambda\phi(s) + \mu\psi(s), \quad (\phi\psi)(s) = \phi(s)\psi(s),$$

для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $\phi, \psi \in A^S$, $s \in S$. Алгебра A^S наследует свойства алгебры A такие как унитальность, ассоциативность, коммутативность, Ли (скобка Ли переходит в скобку Ли).

1.5.2 Стандартные конструкции

Прямые произведения и прямые суммы

При переходе из категории линейных пространств в категорию алгебр многие конструкции сохраняются, с заменой линейных отображений (т. е. морфизмов категории линейных пространств) на морфизмы категории алгебр (к сожалению, не имеющие собственного имени). Так, прямое произведение $\times A_i = \times_{i\in I} A_i$ семейства алгебр $\{A_i; i \in I\}$ есть его прямое произведение как семейства линейных пространств, с покомпонентным умножением, $(a_i)(b_i) = (a_i b_i)$ для всех $(a_i), (b_i) \in \times A_i$, а для данного семейства морфизмов алгебр $\{B \xrightarrow{f_i} A_i\}$ морфизм $B \xrightarrow{f} \times A_i$ действует по правилу $f(x) = (a_i = f_i(x))$ для всех $x \in B$. Аналогичным образом, прямая сумма $\oplus A_i = \oplus_{i\in I} A_i$ семейства $\{A_i; i \in I\} \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{AL}_{\mathbb{F}}$ есть его прямая сумма как семейства линейных пространств, с покомпонентным умножением, $(a_i)(b_i) = (a_i b_i)$ для всех $(a_i), (b_i) \in \oplus A_i$. Для данного семейства морфизмов алгебр $\{A_i \xrightarrow{f_i} B\}$ морфизм $\oplus A_i \xrightarrow{f} B$ действует по правилу $f((a_i)) = \sum_{i\in I} f_i(a_i)$ для всех $(a_i) \in \oplus A_i$. Заметим, что прямая сумма $\oplus_{i\in I} A_i$ есть идеал прямого произведения $\times_{i\in I} A_i$, причем собственный, если семейство $\{A_i; i \in I\}$ бесконечное. Соответствующие результаты справедливы и для семейств топологических алгебр.

Тензорные произведения

Тензорное произведение семейства алгебр $\{A_i; i \in I\} \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{AL}_{\mathbb{F}}$ с умножениями $\mu_i : A_i \otimes A_i \to A_i$, $i \in I$, определяется как тензорное произведение $\otimes A_i = \otimes_{i\in I} A_i$ соответствующих линейных пространств, снабженное умножением $\mu_\otimes : (\otimes A_i) \otimes (\otimes A_i) \to \otimes A_i$ таким, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(\otimes A_i) \otimes (\otimes A_i) \arrow[rr, "\mu_\otimes"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & \otimes A_i \\
& \otimes(A_i \otimes A_i) \arrow[ur, "\otimes\mu_i"'] &
\end{tikzcd}$$

т. е., $\mu_\otimes = (\otimes\mu_i) \circ \sigma$, где перестановка σ – линейное отображение задаваемое правилом $\sigma((\otimes a_i) \otimes (\otimes b_i)) = \otimes(a_i \otimes b_i)$ для всех $(a_i), (b_i) \in \times A_i$. Можно проверить, что умножение в $\otimes A_i$ задается правилом

$$(\otimes a_i) \cdot (\otimes b_i) = \otimes(a_i \cdot b_i) \quad \text{для всех} \quad (a_i), (b_i) \in \times A_i.$$

В категории алгебр тензорное произведение сохраняет те же свойства, что и в категории линейных пространств, разумеется, с естественными модификациями. Предлагается рассмотреть их в качестве упражнения. В категории топологических алгебр справедливы те же дополнительные соображения, что и в категории топологических линейных пространств.

Присоединенная алгебра Ли

Пусть A – алгебра. Для каждой пары элементов $a, b \in A$ определен *коммутатор* $[a, b] = ab - ba \in A$. Условие антикоммутативности скобки Ли, очевидно, выполняется. Тождество Якоби также будет выполняться, если алгебра A ассоциативная. Таким образом, для каждой ассоциативной алгебры A определена *присоединенная алгебра Ли* $\mathrm{as}A$, которая совпадает с A как линейное пространство, а в качестве скобки Ли берется коммутатор.

Пример 1.5.6. Пусть L – линейное пространство, и $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(L)$ – линейное пространство всех его эндоморфизмов (т. е., линейных отображений из L в L). Взяв в качестве умножения композицию эндоморфизмов ($\mu(f \otimes g) = f \circ g$ для всех $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(L)$), превратим $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(L)$ в унитальную ассоциативную алгебру с тождественным отображением в качестве единицы. Ее присоединенная $\mathfrak{gl}(L) = \mathrm{as}\,\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(L)$ – есть алгебра Ли всех эндоморфизмов (иногда говорят *линейных преобразований*) линейного пространства L.

1.5.3 Градуировка

Пусть Γ – абелева группа. Говорят, что алгебра A *градуирована абелевой группой* Γ (другими словами, Γ-*градуирована*), если она Γ-градуирована как линейное пространство, $A = \oplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, $\{A_\gamma; \gamma \in \Gamma\} \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$, и произведение $ab \in A_{\alpha+\beta}$ для любых $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$ (т. е., $A_\alpha \cdot A_\beta \subset A_{\alpha+\beta}$), $\alpha, \beta \in \Gamma$. Пусть $A = \oplus A_\gamma$, $B = \oplus B_\gamma$ – две Γ-градуированные алгебры, и пусть $f = \oplus f_\gamma$ – морфизм из алгебры A в алгебру B. легко проверяется, что γ-однородная компонента f_γ, $\gamma \in \Gamma$, может быть ненулевым морфизмом алгебр лишь при $\gamma = 0$. Учитывая этот факт, морфизм f называется *морфизмом* Γ-*градуированных алгебр*, если он *однородный* (точнее, 0-однородный). Таким образом, определена категория Γ-градуированных алгебр $\mathcal{AL}_{\mathbb{F},\Gamma}$, объекты которой суть Γ-градуированные алгебры, а морфизмы – морфизмы Γ-градуированных алгебр. Благодаря наличию градуировки в категории $\mathcal{AL}_{\mathbb{F},\Gamma}$ появляются новые возможности.

Назовем *градуирующим множителем*, ассоциированным с градуировкой Γ, всякое отображение $\chi = \chi_\Gamma : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{F}$ такое, что

- $\chi(\alpha, \beta)\chi(\beta, \alpha) = 1 \quad$ для всех $\quad \alpha, \beta \in \Gamma$,
- $\chi(\alpha + \beta, \gamma) = \chi(\alpha, \gamma)\chi(\beta, \gamma) \quad$ для всех $\quad \alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$

(проверить, что в этом случае и $\chi(\alpha, \beta + \gamma) = \chi(\alpha, \beta)\chi(\alpha, \gamma)$).

Пример 1.5.7. Для тривиальной градуировки $\Gamma = 0$ есть только одна возможность $\chi(0, 0) = 1$.

Пример 1.5.8. Для популярной градуировки $\Gamma = \mathbb{Z}$ есть две возможности

$$\chi(m, n) = 1 \quad \text{для всех} \quad m, n \in \mathbb{Z},$$
$$\chi(m, n) = (-1)^{mn} \quad \text{для всех} \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 1.5.9. Для градуировки $\Gamma = \mathbb{Z}^D$, $D \in \mathbb{N}$, градуирующие множители имеют вид

$$\chi(m, n) = \prod_{1\le\alpha,\beta\le D} (q_{\alpha\beta})^{\mu_\alpha\nu_\beta} \quad \text{для всех} \quad m, n \in \mathbb{Z}^D,$$

где $D \times D$-матрица $q = \|q_{\alpha\beta}\|$, $q_{\alpha\beta} \in \mathbb{F}$, такая что $q_{\alpha\beta}q_{\beta\alpha} = 1$, $1 \le \alpha, \beta \le D$ (поясним, что $m = (\mu_1, \ldots, \mu_D), n = (\nu_1, \ldots, \nu_D)$).

Пример 1.5.10. Для градуировки $\Gamma = \mathbf{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ опять есть две возможности

$$\chi(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 1 \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Z}_2,$$
$$\chi(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (-1)^{\boldsymbol{\alpha\beta}} \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{Z}_2,$$

поясним что $\boldsymbol{\alpha} = \alpha + 2\mathbb{Z}$, $\boldsymbol{\beta} = \beta + 2\mathbb{Z}$, $\alpha, \beta = 0, 1$, так что $\boldsymbol{\alpha\beta} = \alpha\beta + 2\mathbb{Z}$ и выражение $(-1)^{\boldsymbol{\alpha\beta}}$ корректно определено.

Пусть Γ – абелева группа и χ – градуирующий множитель. Для Γ-градуированной алгебры $A = \oplus A_\gamma$ *градуированный коммутатор* определяется правилом

$$[a, b]_\chi = ab - \chi(\alpha, \beta)ba \quad \text{для всех} \quad a \in A_\alpha,\ b \in A_\beta,\ \alpha, \beta \in \Gamma,$$

очевидно, в этом случае $[a, b]_\chi \in A_{\alpha+\beta}$. Легко проверяются следующие свойства градуированного коммутатора.

- $[a, b]_\chi + \chi(\alpha, \beta)[b, a]_\chi = 0,$
- $\chi(\gamma, \alpha)[a, [b, c]_\chi]_\chi + \chi(\alpha, \beta)[b, [c, a]_\chi]_\chi + \chi(\beta, \gamma)[c, [a, b]_\chi]_\chi = 0,$

для всех $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, $c \in A_\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$. Первое свойство называется *градуированной антикоммутативностью*, а второе – *градуированным тождеством Якоби*. Алгебра A называется *градуированной коммутативной алгеброй*, если $[a, b]_\chi = 0$ для всех $a, b \in A$. Аналогичным образом, градуированным центром градуированной алгебры A называется множество

$$\operatorname{cen}_\chi A = \{a \in A : [a, b]_\chi = 0 \quad \text{для всех} \quad b \in A\}$$

В соответствии с определением градуированного коммутатора, градуированная алгебра A называется *градуированной алгеброй Ли*, если умножение в ней, называемое *градуированной скобкой Ли* и обозначаемое через $[\cdot, \cdot]_\chi$, удовлетворяет приведенным выше равенствам

- $[a, b]_\chi + \chi(\alpha, \beta)[b, a]_\chi = 0,$
- $\chi(\gamma, \alpha)[a, [b, c]_\chi]_\chi + \chi(\alpha, \beta)[b, [c, a]_\chi]_\chi + \chi(\beta, \gamma)[c, [a, b]_\chi]_\chi = 0,$

для всех $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, $c \in A_\gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$.

1.5.4 Тензорная алгебра линейного пространства

Пусть L – линейное пространство над $\mathbb{F}$, $T^n(L) = \otimes^n L = \underbrace{L \otimes \cdots \otimes L}_{n \text{ сомножителей}}$ – его n-я тензорная степень, $n \in \mathbb{N}$, и $T^0(L) = \mathbb{F}$. Прямая сумма линейных пространств $T(L) = \oplus_{n \in \mathbb{Z}_+} T^n(L)$ превращается в алгебру, если умножение в ней определить правилом

$$
\begin{aligned}
(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p) \cdot (b_1 \otimes \cdots \otimes b_q) &= (a_1 \otimes \cdots \otimes a_p) \otimes (b_1 \otimes \cdots \otimes b_q) \\
&= a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_q
\end{aligned}
$$

для $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q \in L$, $p, q \in \mathbb{N}$, и учесть, что $\mathbb{F} \otimes L = L = L \otimes \mathbb{F}$. Эта алгебра называется *тензорной алгеброй линейного пространства* L. Алгебра $T(L)$ – унитальная (единица – число $1 \in \mathbb{F} = T^0(L)$) и ассоциативная. Она превращается в $\mathbb{Z}$-градуированную алгебру $T(L) = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} T^n(L)$, если положить $T^n(L) = 0$ для $n = -1, -2, \ldots$. Другими словами, тензорная алгебра линейного пространства $\mathbb{Z}_+$-градуирована.

Пусть дано линейное отображение $f : L \to M$, $M, L \in \operatorname{Ob} \mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$, тогда правило

$$
\begin{aligned}
&1 \mapsto 1, \quad 1 \in \mathbb{F}, \\
&a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto f(a_1) \otimes \cdots \otimes f(a_n), \quad a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in \otimes^n L,
\end{aligned}
$$

определяет $\mathbb{Z}_+$-градуированный морфизм $T(f) : T(L) \to T(M)$, причем композиция $f \circ g$ переходит в композицию $T(f) \circ T(g)$. Другими словами, определен ковариантный функтор T из категории линейных пространств $\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$ в категорию алгебр $\mathcal{AL}_{\mathbb{F}}$ (точнее, в ее подкатегорию, состоящую из $\mathbb{Z}_+$-градуированных алгебр и их морфизмов).

Замечание. В дифференциальной геометрии алгебра $T(L)$ обозначается через $C(L)$ и называется контравариантной тензорной алгеброй линейного пространства L, см., например, [8] и [17]. В книге [17] обращается внимание на тот факт, что функтор T *ковариантный*, а алгебра $C(L)$ названа *контравариантной*, и объясняется это несоответствие “несчастной исторической случайностью”.

Пусть L – линейное пространство, и $T(L)$ – его $\mathbb{Z}_+$-градуированная тензорная алгебра. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определена *симметрическая группа* $\mathfrak{S}_n$, т. е. группа всех подстановок σ, $\{1, \ldots, n\} \mapsto \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$, а для каждой подстановки $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ определен ее знак $\operatorname{sign} \sigma \in \{-1, +1\}$.

Действие симметрической группы $\mathfrak{S}_n$, $n \in \mathbb{N}$, на линейном пространстве $T^n(L)$, $x \mapsto \sigma(x)$, $\sigma \in \mathfrak{S}$, $x \in T^n(L)$, задается правилом

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(n)} \quad \text{для всех} \quad a_1, \ldots, a_n \in L.$$

На $T^0(L) = \mathbb{F}$ группа $\mathfrak{S}_0 = \{\,\mathrm{id}\}$ действует тривиально. Таким образом, для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ определено линейное отображение

$$\pi_+^n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma : T^n(L) \to T^n(L).$$

Его образ

$$S^n(L) = \operatorname{im} \pi_+^n = \{x \in T^n(L) : \sigma(x) = x \quad \text{для всех} \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n\}.$$

В частности, $\pi_+^n \circ \pi_+^n = \pi_+^n$, т. е. π_+^n – проектор. Определена точная последовательность линейных пространств

$$0 \longrightarrow \ker \pi_+^n \longrightarrow T^n(L) \xrightarrow{\pi_+^n} S^n(L) \longrightarrow 0,$$

так что $S^n(L) = T^n(L)/\ker \pi_+^n$. Положим $S(L) = \oplus_{n \in \mathbb{Z}_+} S^n(L)$ и превратим $S(L)$ в $\mathbb{Z}_+$-градуированную унитальную ассоциативную коммутативную алгебру, задав умножение $\odot : S(L) \times S(L) \to S(L)$ правилом

$$(x, y) \mapsto x \odot y = \pi_+^{m+n}(x \otimes y) \quad \text{для всех} \quad x \in S^m(L),\ y \in S^n(L).$$

Далее, положим $\pi_+ = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \pi_+^n : T(L) \to S(L)$ (так что, $\pi_+|_{T^n(L)} = \pi_+^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$), тогда π_+ – морфизм алгебр, его ядро $\ker \pi_+ = \oplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \ker \pi_+^n$ – идеал алгебры $T(L)$, и алгебра $S(L) = T(L)/\ker \pi_+$. Алгебра $S(L)$ называется *симметрической алгеброй линейного пространства* L. Заметим, что $S(L)$ – градуированная коммутативная алгебра с градуирующим множителем $\chi = 1$.

Аналогичным образом, для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ определено линейное отображение

$$\pi_-^n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign} \sigma \cdot \sigma : T^n(L) \to T^n(L).$$

Его образ

$$\Lambda^n(L) = \operatorname{im} \pi_-^n = \{x \in T^n(L) : \sigma(x) = \operatorname{sign} \sigma \cdot x \quad \text{для всех} \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n\}.$$

В частности, $\pi_-^n \circ \pi_-^n = \pi_-^n$, т. е. π_-^n – проектор. Определена точная последовательность линейных пространств

$$0 \longrightarrow \ker \pi_-^n \longrightarrow T^n(L) \xrightarrow{\pi_-^n} \Lambda^n(L) \longrightarrow 0,$$

так что $\Lambda^n(L) = T^n(L)/\ker \pi_-^n$. Положим $\Lambda(L) = \oplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \Lambda^n(L)$ и превратим $\Lambda(L)$ в $\mathbb{Z}_+$-градуированную унитальную ассоциативную алгебру, задав умножение $\wedge : \Lambda(L) \times \Lambda(L) \to \Lambda(L)$ правилом

$$(x, y) \mapsto x \wedge y = \pi_-^{m+n}(x \otimes y) \quad \text{для всех} \quad x \in \Lambda^m(L),\ y \in \Lambda^n(L).$$

Далее, положим $\pi_- = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \pi_-^n : T(L) \to \Lambda(L)$ (так что, $\pi_-|_{T^n(L)} = \pi_-^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$), тогда π_- – морфизм алгебр, его ядро $\ker \pi_- = \oplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \ker \pi_-^n$ – идеал алгебры $T(L)$, и алгебра $\Lambda(L) = T(L)/\ker \pi_-$. Алгебра $\Lambda(L)$ называется *внешней алгеброй линейного пространства* L. Заметим, что

$$y \wedge x = (-1)^{nm} x \wedge y \quad \text{для всех} \quad y \in \Lambda^n(L),\ x \in \Lambda^m(L),$$

так что $\Lambda(L)$ – градуированная коммутативная алгебра с градуирующим множителем $\chi(m, n) = (-1)^{mn}$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

В качестве упражнения, полезно поразмышлять об универсальных свойствах введенных алгебр.

1.5.5 Градуированное тензорное произведение градуированных алгебр

Пусть $A = \oplus_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$, $B = \oplus_{\beta \in \Gamma} B_\beta$ – две Γ-градуированные ассоциативные алгебры и $A \otimes B = \oplus_{\gamma \in \Gamma} (A \otimes B)_\gamma$ – их Γ-градуированное произведение как Γ-градуированных пространств. Пусть χ – градуирующий множитель, тогда на $A \otimes B$ определена структура градуированной алгебры, с умножением, задаваемым правилом

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = \chi(\beta_1, \alpha_2)((a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2))$$

для всех $a_i \in A_{\alpha_i}$, $b_i \in B_{\beta_i}$, $\alpha_i, \beta_i \in \Gamma$, $i = 1, 2$. Благодаря свойствам градуирующего множителя, алгебра $A \otimes B$ ассоциативная.

Подробнее с вопросами этого раздела можно ознакомиться по книгам [10], [11], [17], [8].

1.6 Модули

1.6.1 Категории модулей

Пусть $\mathbb{F}$ – числовое поле, и A – ассоциативная алгебра над $\mathbb{F}$. Линейное пространство $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$ называется *левым A-модулем* над алгеброй A, если определена билинейная операция – умножение слева на элементы из A,

$$A \times X \to X, \quad (a, x) \mapsto ax \quad \text{для всех} \quad a \in A,\ x \in X,$$

причем выполняются аксиомы:

- $(ab)x = a(bx) \quad \text{для всех} \quad a, b \in A,\ x \in X;$
- $(\lambda a + \mu b)x = \lambda(ax) + \mu(bx) \quad \text{для всех} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{F},\ a, b \in A,\ x \in X;$
- $a(\lambda x + \mu y) = \lambda(ax) + \mu(ay) \quad \text{для всех} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{F},\ a \in A,\ x, y \in X.$

Если алгебра A унитальная, т. е. имеет единицу $e \in A$, то дополнительно накладывают условие

- $ex = x \quad \text{для всех} \quad x \in X.$

Пусть X, Y – левые A-модули. Линейное отображение $f : X \to Y$ называется левым A-линейным отображением, если $f(ax) = af(x)$ для всех $a \in A$ и $x \in X$. Таким образом, определена категория $\mathcal{LM}_A$ левых A-модулей, объекты которой – левые A-модули, а морфизмы – левые A-линейные отображения.

Аналогичным образом, линейное пространство $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$ называется *правым A-модулем* над алгеброй A, если определена билинейная операция – умножение справа на элементы из A,

$$X \times A \to X, \quad (x, a) \mapsto xa \quad \text{для всех} \quad x \in X,\ a \in A,$$

причем выполняются аксиомы:

- $x(ab) = (xa)b \quad \text{для всех} \quad x \in X,\ a, b \in A;$
- $x(\lambda a + \mu b) = \lambda(xa) + \mu(xb) \quad \text{для всех} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{F},\ x \in X,\ a, b \in A;$
- $(\lambda x + \mu y)a = \lambda(xa) + \mu(ya) \quad \text{для всех} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{F},\ x, y \in X,\ a \in A.$

Если алгебра A унитальная, т. е. имеет единицу $e \in A$, то дополнительно накладывают условие

- $xe = x \quad$ для всех $\quad x \in X$.

Пусть X, Y – правые A-модули. Линейное отображение $f : X \to Y$ называется правым A-линейным отображением, если $f(xa) = f(x)a$ для всех $x \in X$ и $a \in A$. Таким образом, определена категория $\mathcal{RM}_A$ правых A-модулей, объекты которой – правые A-модули, а морфизмы – правые A-линейные отображения.

Если алгебра A коммутативная, то обе категории по существу совпадают. В этом случае определена категория A-модулей $\mathcal{M}_A$ и можно использовать обе формы записи. В общем случае, все утверждения категории левых модулей имеют естественные аналоги в категории правых модулей. Ниже, если не оговорено противное, будем рассматривать только левые модули, предоставляя читателям правые формулировки в качестве упражнения.

В топологической ситуации, когда A – топологическая алгебра, а X – топологическое линейное пространство, добавляются естественные условия непрерывности билинейных операций, причем как правило используется раздельная непрерывность.

Пример 1.6.1. Алгебра A сама есть левый A-модуль с левым присоединенным действием

$$A \times A \to A, \quad (a, x) \mapsto ax \quad \text{для всех} \quad a, x \in A,$$

и правый A-модуль с правым присоединенным действием

$$A \times A \to A, \quad (x, a) \mapsto xa \quad \text{для всех} \quad x, a \in A.$$

Пример 1.6.2. Пусть M – левый A-модуль, X – линейное пространство. Тогда $M \otimes_{\mathbb{F}} X$ – левый A-модуль с билинейной операцией

$$(a, m \otimes x) \mapsto a(m \otimes x) = (am) \otimes x \quad \text{для всех} \quad a \in A,\ m \in M,\ x \in X,$$

индекс $_{\mathbb{F}}$ поясняет, что тензорное произведение берется в категории линейных пространств над $\mathbb{F}$.

1.6.2 Стандартные конструкции

Пусть $\mathbb{F}$ – числовое поле, и A – ассоциативная алгебра над $\mathbb{F}$.

Подмодули и фактор-модули

Пусть M левый A-модуль. Линейное подпространство $S \subset M$ называется *подмодулем* модуля M, если оно замкнуто относительно умножения на элементы из A, т. е. если $ax \in S$ для всех $a \in A$, $x \in S$ (иначе, $AS \subset S$). В этом случае S – левый A-модуль, определен *фактор-модуль* M/S – тоже левый A-модуль с умножением $A \times (M/S) \to (M/S)$,

$$(a, \mathbf{x}) \mapsto a\mathbf{x} = ax + S \quad \text{для всех} \quad a \in A,\ \mathbf{x} = x + S \in M/S,$$

и естественное левое A-линейное отображение $\pi : M \to M/S$, действующее по правилу $x \mapsto \mathbf{x} = x + S$ для всех $x \in M$.

Для каждого левого A-линейного отображения $f : M \to N$ определены ядро $\ker f = \{x \in M : f(x) = 0\}$ – подмодуль левого A-модуля M, и образ $\operatorname{im} f = \{y = f(x) \in N; x \in M\}$ – подмодуль левого A-модуля N, причем имеется точная последовательность левых A-линейных отображений

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} N/\operatorname{im} f \longrightarrow 0.$$

Прямые произведения и прямые суммы

Прямые произведения и прямые суммы в категории модулей существуют и строятся по тем же правилам, что и в категории линейных пространств, с заменой линейных пространств на модули, а линейных отображений – на морфизмы модулей.

Именно, пусть дано семейство $\{M_i; i \in I\}$ левых A-модулей.

Прямое произведение $\times M_i$ есть множество всевозможных семейств $x = (x_i \in M_i; i \in I)$ с покомпонентными модульными операциями:

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_i + \mu y_i), \quad ax = (ax_i),$$

для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in A$, $x = (x_i), y = (y_i) \in \times M_i$. Канонические проекции $\pi_k : \times M_i \to M_k$, $k \in I$, действуют по правилу $x = (x_i) \mapsto \pi_k(x) = x_k$ для всех $x = (x_i) \in \times M_i$ и являются левыми A-линейными отображениями. Для данного семейства $\{M \xrightarrow{f_i} M_i\}$ левых A-линейных отображений левое A-линейное отображение $M \xrightarrow{f} \times M_i$ задается правилом $y \mapsto f(y) = (x_i = f_i(y))$ для всех $y \in M$.

Пусть I – множество индексов. Определена категория $\mathcal{LM}_A^I$. Объекты этой категории суть семейства $\{M_i\} = \{M_i; i \in I\}$ левых A-модулей, а морфизмы из объекта $\{M_i\}$ в объект $\{N_i\}$ суть семейства левых A-линейных отображений $\{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} = \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i; i \in I\}$. Для семейств $\{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\}$ и $\{N_i \xrightarrow{g_i} P_i\}$ композиция определена покомпонентно

$$\{N_i \xrightarrow{g_i} P_i\} \circ \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} = \{M_i \xrightarrow{g_i \circ f_i} P_i\},$$

тождественный морфизм есть семейство тождественных отображений $\{M_i \xrightarrow{\mathrm{id}_{M_i}} M_i\}$. Как показано выше, для каждого семейства $\{M_i\}$ определено его прямое произведение $\times M_i$. Далее, для всякого семейства левых A-линейных отображений $\{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\}$ определено *прямое произведение* $\times f_i : \times M_i \to \times N_i$ – левое A-линейное отображение с покомпонентным действием

$$x = (x_i) \mapsto (\times f_i)(x) = (y_i), \quad y_i = f_i(x_i) \quad \text{для всех} \quad i \in I, \ x_i \in M_i.$$

Очевидно, прямое произведение семейства тождественных отображений $\{M_i \xrightarrow{\mathrm{id}_{M_i}} M_i\}$ есть $\times \, \mathrm{id}_{M_i} = \mathrm{id}_{\times M_i}$ – тождественное отображение на прямом произведении $\times M_i$, композиция

$$\{N_i \xrightarrow{g_i} P_i\} \circ \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} = \{M_i \xrightarrow{g_i \circ f_i} P_i\} \mapsto (\times g_i) \circ (\times f_i) = \times (g_i \circ f_i).$$

Таким образом, определен ковариантный функтор $\times$ из категории $\mathcal{LM}_A^I$ в категорию $\mathcal{LM}_A$.

Аналогичным образом, прямая сумма $\oplus M_i$ есть множество всех семейств $x = (x_i \in M_i; i \in I) = \sum_{i \in I} x_i$, у которых лишь конечное число компонент ненулевые, модульные операции – покомпонентные, канонические инъекции $\iota_k : M_k \to \oplus M_i$, $k \in I$, действуют по правилу $x_k \mapsto (\delta_i^k x_k; i \in I) = x_k$ для всех $x_k \in M_k \subset \oplus M_i$ и являются левыми A-линейными отображениями. Для данного семейства $\{M_i \xrightarrow{f_i} M\}$ левых A-линейных отображений левое A-линейное отображение $\oplus M_i \xrightarrow{f} M$ задается правилом $x = \sum_{i \in I} x_i \mapsto f(x) = \sum_{i \in I} f_i(x_i)$ для всех $x \in \oplus M_i$.

Опять, $\oplus M_i$ есть подпространство в $\times M_i$, причем $\oplus M_i = \times M_i$, если семейство $\{M_i; i \in I\}$ конечное.

Пусть I – множество индексов, и $\mathcal{LM}_A^I$ – введенная выше категория. Для каждого семейства $\{M_i\}$ определена его прямая сумма $\oplus M_i$. Также, для всякого семейства левых A-линейных отображений $\{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\}$

определена его *прямая сумма* $\oplus f_i : \oplus M_i \to \oplus N_i$ – левое A-линейное отображение, задаваемое правилом

$$x \mapsto (\oplus f_i)(x) = \sum y_i, \quad y_i = f_i(x_i) \quad \text{для всех} \quad i \in I,\ x = \sum x_i \in \oplus M_i.$$

Прямая сумма семейства тождественных отображений $\{M_i \xrightarrow{\mathrm{id}_{M_i}} M_i\}$ есть $\oplus\, \mathrm{id}_{M_i} = \mathrm{id}_{\oplus M_i}$ – тождественное отображение на прямой сумме $\oplus M_i$, композиция

$$\{N_i \xrightarrow{g_i} P_i\} \circ \{M_i \xrightarrow{f_i} N_i\} = \{M_i \xrightarrow{g_i \circ f_i} P_i\} \mapsto (\oplus g_i) \circ (\oplus f_i) = \oplus (g_i \circ f_i).$$

Таким образом, определен ковариантный функтор $\oplus$ из категории $\mathcal{LM}_A^I$ в категорию $\mathcal{LM}_A$.

В топологической категории прямое произведение $\times M_i$ наделяется слабейшей топологией, в которой все проекции непрерывные, а прямая сумма $\oplus M_i$ наделяется сильнейшей топологией, в которой все инъекции непрерывные. Вложение $\oplus M_i \subset \times M_i$ всегда непрерывное, и $\oplus M_i = \times M_i$ как топологические пространства, если семейство $\{M_i; i \in I\}$ конечное.

Свободные модули

Пусть A – унитальная ассоциативная алгебра, и S – некоторое множество. Каждому левому A-модулю M поставим в соответствие левый A-модуль M^S всех отображений из S в M с поточечными операциями

$$(\lambda\phi + \mu\psi)(s) = \lambda\phi(s) + \mu\psi(s), \quad (a\phi)(s) = a\phi(s),$$

Для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, $a \in A$, $\phi, \psi \in M^S$, $s \in S$. Множество M^S_{fin} всех конечных отображений из S в M есть подмодуль модуля M^S (напомним, что отображение мы называем конечным, если его носитель – конечное множество).

Рассмотрим категорию, объекты которой суть отображения $\phi \in M^S$, M – левый A-модуль, а морфизмы из объекта $\phi \in M^S$ в объект $\psi \in N^S$ суть левые A-линейные отображения $f : M \to N$ из левого A-модуля M в левый A-модуль N такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ M \arrow[rr, "f"'] & & N \end{tikzcd}$$

Построим универсальный отталкивающий объект этой категории. Пусть $A\langle S\rangle = A^S_{fin}$ – левый A-модуль всех конечных отображений из S в левый A-модуль A с левым присоединенным действием. Каноническое отображение $\delta = \delta(S) : S \to A\langle S\rangle$ зададим правилом $s \mapsto \delta_s$ для всех $s \in S$, где

$$\delta_s(t) = \begin{cases} e, & t = s, \\ 0, & t \neq s, \end{cases} \quad t \in S,$$

поясним, что e – единица алгебры A. Отметим, что отображение δ инъективное, оно осуществляет вложение множества S в множество $A\langle S\rangle$, позволяя отождествлять $s \in S$ и $\delta_s \in A\langle S\rangle$. Каждому $\phi \in M^S$ ставим в соответствие левое A-линейное отображение $\phi_* : A\langle S\rangle \to M$, действующее по правилу $\zeta \mapsto \phi_*(\zeta) = \sum_{s\in S} \zeta(s)\phi(s)$ для всех $\zeta \in A\langle S\rangle$, поясним что $\zeta(s) \in A$ – значение отображения ζ в точке s, а $\phi(s) \in M$ – значение отображения ϕ в точке s. По построению, диаграмма

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ A\langle S\rangle \arrow[rr, "\phi_*"'] & & M \end{tikzcd}$$

коммутативна, так что $S \xrightarrow{\delta} (A\langle S\rangle$ – искомый универсальный элемент, обычно называемый *свободным левым A-модулем, порожденным множеством S*.

Пусть $\mu : S \to T$ – отображение множества S в множество T. Положим $\delta(\mu) = (\delta(T) \circ \mu)_* : A\langle S\rangle \to A\langle T\rangle$, тогда получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\delta(S)"] \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, "\delta(T)\circ\mu"] & A\langle S\rangle \arrow[d, "\delta(\mu)"] \\ T \arrow[r, "\delta(T)"'] & A\langle T\rangle \end{tikzcd}$$

Легко проверить, что правила $S \mapsto \delta(S)$, $\mu \mapsto \delta(\mu)$, определяют ковариантный функтор δ из категории множеств в категорию левых A-модулей.

Левый A-модуль M называется свободным левым A-модулем с базисом $S \subset M$, если он изоморфен модулю $A\langle S\rangle$. Универсальность базиса $S \subset M$ в том, что для того чтобы определить левое A-линейное отображение левого A-модуля M в какой-либо левый A-модуль N достаточно задать его на базисе S и дальше продолжить на весь M по A-линейности, причем такое продолжение всегда существует и единственное.

Не все все левые A-модули свободные, однако имеет место

Предложение 1.6.1. *Каждый левый A-модуль есть фактор-модуль свободного левого A-модуля.*

Доказательство. Пусть M – левый A-модуль. Возьмем M в качестве базисного множества, и пусть $(A\langle M\rangle, \delta)$ – соответствующий универсальный объект. Тождественному отображению $\mathrm{id} : M \to M$ отвечает следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & & & M \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & & \\ 0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r] & A\langle M\rangle \arrow[rr, "f"'] & & M \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

где $f = (\mathrm{id})_*$ есть левое A-линейное отображение, порожденное тождественным отображением id. По построению, отображение f есть эпиморфизм, так что $M = A\langle M\rangle / \ker f$. $\square$

Замечание. Для данного модуля следует различать его $\mathbb{F}$-линейный базис (т. е. его базис как линейного пространства над $\mathbb{F}$) и его A-линейный базис (т. е. его базис как левого A-модуля).

Пример 1.6.3. Пусть X – линейное пространство над $\mathbb{F}$, и $\dim_{\mathbb{F}} X$ – его размерность (число элементов базиса). Определен (см. пример выше) левый A-модуль $M = A \otimes_{\mathbb{F}} X$, его размерность как левого A-модуля есть $\dim_A M = \dim_{\mathbb{F}} X$, а его размерность как линейного пространства над $\mathbb{F}$ есть $\dim_{\mathbb{F}} M = \dim_{\mathbb{F}} A \cdot \dim_{\mathbb{F}} X$.

Тензорные произведения

Пусть A – унитальная ассоциативная алгебра. Пусть $\{M_i; i \in I\}$ – семейство левых A-модулей, и $\times M_i$ – его прямое произведение.

Для каждого $k \in I$ определены его дополнение $I \setminus k = \{i \neq k\} \subset I$ и прямое произведение $\times_{i\neq k} M_i$. Как и в категориях абелевых групп и линейных пространств для любых $x^k = (x_i; i \neq k) \in \times_{i\neq k} M_i$, $y \in M_k$ положим

$$x^k + y = (z_i; i \in I) \in \times M_i, \quad z_i = (x^k + y)_i = \begin{cases} x_i, & i \neq k, \\ y, & i = k. \end{cases}$$

Пусть $f : \times M_i \to N$ – отображение прямого произведения $\times M_i$ в левый A-модуль N. Как и в категориях абелевых групп и линейных пространств, для каждого $x^k \in \times_{i\neq k} M_i$ отображение $f_{x^k} : M_k \to N$ определим правилом $f_{x^k}(y) = f(x^k + y)$ для всех $y \in M_k$. Отображение f называется левым A-линейным по k-й переменной, если отображение f_{x^k} левое A-линейное для всех $x^k \in \times_{i\neq k}$, и левым A-полилинейным, если оно левое A-линейное по каждой переменной. Иначе говоря, отображение $f : \times M_i \to N$ левое A-полилинейное, если

$$f(x^k + (a'y' + a''y'')) = a'f(x^k + y') + a''f(x^k + y'')$$

для всех $k \in I$, $x^k = (x_i; i \neq k) \in \times_{i\neq k} M_i$, $a', a'' \in A$, $y', y'' \in M_k$.

В категории, объекты которой суть левые A-полилинейные отображения из $\times M_i$ в левые A-модули, а морфизмы из объекта $\times M_i \xrightarrow{f} N$ в объект $\times M_i \xrightarrow{g} P$ суть левые A-линейные отображения $N \xrightarrow{\phi} P$ из левого A-модуля N в левый A-модуль P, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \times M_i \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ N \arrow[rr, "\phi"'] & & P \end{tikzcd}$$

существует универсальный отталкивающий объект, называемый тензорным произведением семейства $\{M_i; i \in I\}$. Действительно, пусть $A\langle \times M_i \rangle$ – свободный левый A-модуль, порожденный множеством $\times M_i$. Обозначим через J подмодуль модуля $A\langle \times M_i \rangle$, порожденный всеми элементами вида

$$(x^k + (a'y' + a''y'')) - a'(x^k + y') - a''(x^k + y'')$$

с произвольными $k \in I$, $x^k \in \times_{i\neq k} M_i$, $a', a'' \in A$, $y', y'' \in M_k$, и рассмотрим фактор-модуль $\otimes M_i = A\langle \times M_i\rangle / J$. Последовательность отображений

$$0 \longrightarrow \times M_i \xrightarrow{\delta} A\langle \times M_i\rangle \xrightarrow{\pi} \otimes M_i \longrightarrow 0,$$

определяет левое A-полилинейное отображение $\varkappa = \pi \circ \delta : \times M_i \to \otimes M_i$, поскольку

$$\begin{aligned}
&\varkappa(x^k + (a'y' + a''y'')) = (x^k + (a'y' + a''y'')) + J \\
&= a'(x^k + y') + a''(x^k + y'') \\
&\qquad + [(x^k + (a'y' + a''y'')) - a'(x^k + y') - a''(x^k + y'')] + J \\
&= (a'(x^k + y') + J) + (a''(x^k + y'') + J) \\
&= a'((x^k + y') + J) + a''(x^k + y'') + J) \\
&= a'\varkappa(x^k + y') + a''\varkappa(x^k + y'')
\end{aligned}$$

для всех $k \in I$, $x^k = (x_i; i \neq k) \in \times_{i\neq k} M_i$, $a', a'' \in A$, $y', y'' \in M_k$. Для данного левого A-полилинейного отображения $f : \times M_i \to N$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J \arrow[r] & A\langle \times M_i\rangle \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f_*"] & \otimes M_i \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{f}"] & 0 \\
& & \times M_i \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "f"'] & N &
\end{tikzcd}$$

где левое A-линейное фактор-отображение $\mathbf{f}$ действует по правилу $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f_*(x)$ для всякого $\mathbf{x} = x + J \in \otimes M_i$, левое A-линейное отображение f_* определено в силу универсальности левого A-модуля $A\langle \times M_i\rangle$, причем $f_*(x) = 0$ для любого $x \in J$, в силу левой A-полилинейности исходного отображения f. Действительно,

$$\begin{aligned}
&f_*((x^k + (a'y' + a''y'')) - a'(x^k + y') - a''(x^k + y'')) \\
&= f(x^k + (a'y' + a''y'')) - a'f(x^k + y') - a''f(x^k + y'') = 0
\end{aligned}$$

для всех $k \in I$, $x^k = (x_i; i \neq k) \in \times_{i\neq k} M_i$, $a', a'' \in A$, $y', y'' \in M_k$, так что $f_* = 0$ на J, поскольку такие элементы порождают подмодуль J.

Таким образом, объект $\times M_i \xrightarrow{\varkappa} \otimes M_i$ обладает необходимой универсальностью и является тензорным произведением семейства $\{M_i; i \in I\}$.

Обычно полагают $\varkappa((x_i)) = \otimes x_i$ для всякого $(x_i) \in \times M_i$, причем полилинейность отображения $\varkappa$ сводится к равенствам

$$\otimes(x^k + (a'y' + a''y''))_i = a' \cdot (\otimes(x^k + y')_i) + a'' \cdot (\otimes(x^k + y'')_i)$$

для всех $k \in I$, $x^k = (x_i; i \neq k) \in \times_{i \neq k} M_i$, $a', a'' \in A$, $y', y'' \in M_k$.

Пример 1.6.4. Для тензорного произведения $M \otimes N$ пары левых A-модулей имеем

$$(a'x' + a''x'') \otimes y = a'(x' \otimes y) + a''(x'' \otimes y)$$
$$x \otimes (a'y' + a''y'') = a'(x \otimes y') + a''(x \otimes y'')$$

для всех $a', a'' \in A$, $x, x', x'' \in M$, $y, y', y'' \in N$.

Как и в категориях абелевых групп и линейных пространств, каждое левое A-линейное отображение $h : \otimes M_i \to N$ порождается единственным левым A-полилинейным отображением $f : \times M_i \to N$, именно $h = \mathbf{f}$ для $f = h \circ \varkappa$, так что левые A-линейные отображения из $\otimes M_i$ в данный левый A-модуль отождествляются с левыми A-полилинейными отображениями из $\times M_i$ в этот модуль.

В категории левых A-модулей сохраняются свойства тензорного произведения, установленные в категориях абелевых групп и линейных пространств (ассоциативность, перестановки, прямые и тензорные произведения семейств левых A-линейных отображений, их функториальность). Предлагается сформулировать и доказать соответствующие утверждения в качестве упражнения.

В топологической ситуации возникающие проблемы наследуются из категорий топологических линейных пространств и топологических алгебр, их изучение выходит за рамки данных лекций.

Замечание. Поскольку каждый левый A-модуль одновременно является линейным пространством над $\mathbb{F}$, для данного семейства $\{M_i; \in I\}$ левых A-модулей следует различать его тензорное произведение в категории линейных пространств, обозначим его через $\otimes_{\mathbb{F}} M_i$, и его тензорное произведение в категории левых A-модулей, обозначим его через $\otimes_A M_i$.

Пример 1.6.5. Пусть $A = \mathbb{F}[t]$ – алгебра всех многочленов от одной переменной t с коэффициентами из $\mathbb{F}$. Тогда его тензорный квадрат в категории линейных пространств есть $A \otimes_{\mathbb{F}} A = \mathbb{F}[s, t]$ – линейное пространство (конечно и алгебра) всех многочленов от двух переменных s, t с коэффициентами из $\mathbb{F}$. Далее, пусть $M = A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^m$ – левый A-модуль всех столбцов высотой $m \in \mathbb{N}$ с элементами из A, а $N = A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^n$ – аналогичный левый A-модуль всех столбцов высотой $n \in \mathbb{N}$ с элементами из A. Тензорное произведение этих модулей в категории линейных пространств есть

$$M \otimes_{\mathbb{F}} N = (A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^m) \otimes_{\mathbb{F}} (A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^n) = (A \otimes_{\mathbb{F}} A) \otimes_{\mathbb{F}} (\mathbb{F}^m \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^n)$$

линейное пространство всех $(m \times n)$-матриц с элементами из $A \otimes_{\mathbb{F}} A$, тогда как его тензорное произведение в категории левых A-модулей есть

$$M \otimes_A N = (A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^m) \otimes_A (A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^n) = A \otimes_{\mathbb{F}} (\mathbb{F}^m \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^n)$$

есть левый A-модуль всех $(m \times n)$-матриц с элементами из A, поскольку тензорный квадрат левого A-модуля A в категории левых A-модулей есть $A \otimes_A A = A$.

1.6.3 Градуировка

Пусть Γ – абелева группа, $A = \oplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ – Γ-градуированная ассоциативная алгебра. Говорят, что левый A-модуль M *градуирован абелевой группой* Γ (другими словами, Γ-*градуирован*), если он Γ-градуирован как линейное пространство, $M = \oplus_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma$, $\{M_\gamma; \gamma \in \Gamma\} \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{LS}_{\mathbb{F}}$, и произведение $ax \in M_{\alpha+\beta}$ для всех $a \in A_\alpha$, $x \in M_\beta$, $\alpha, \beta \in \Gamma$. Путь, $M = \oplus M_\gamma$, $N = \oplus N_\gamma$ – два Γ-градуированных левых A-модуля, левое A-линейное отображение $f : M \to N$ называется γ-*однородным*, $\gamma \in \Gamma$, если $f(x) \in M_{\alpha+\gamma}$ для всех $x \in M_\alpha \subset M$, $\alpha \in \Gamma$. Всякое левое A-линейное отображение $f : M \to N$ разлагается на однородные компоненты (другими словами, Γ-*градуируется*). Именно, для каждой пары $\alpha, \beta \in \Gamma$ определим линейное отображение $f_{\alpha\beta} = \pi_\beta \circ f \circ \iota_\alpha : M_\alpha \to N_\beta$, тогда, в силу универсальности прямой суммы линейных пространств, существует единственное линейное отображение $f_\gamma : M \to N$ такое, что для всех $\alpha \in \Gamma$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f_\gamma"] & & N \\
& M_\alpha \arrow[ul, "\iota_\alpha"] \arrow[ur, "g_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

где $g_\alpha = \iota_{\alpha+\gamma} \circ f_{\alpha,\alpha+\gamma} = \iota_{\alpha+\gamma} \circ \pi_{\alpha+\gamma} \circ f \circ \iota_\alpha$. Очевидно, $f_\gamma = \iota_{\alpha+\gamma} \circ \pi_{\alpha+\gamma} \circ f$, так что для всех $a \in A_\alpha$, $x \in M_\beta$ имеем (заметим, что $ax \in M_{\alpha+\beta}$)

$$\begin{aligned} f_\gamma(ax) &= \iota_{\alpha+\beta+\gamma}(\pi_{\alpha+\beta+\gamma}(f(ax))) = \iota_{\alpha+\beta+\gamma}(\pi_{\alpha+\beta+\gamma}(af(x))) \\ &= a\, \iota_{\beta+\gamma}(\pi_{\beta+\gamma}(f(x))) = af_\gamma(x), \end{aligned}$$

и значит, f_γ – левое A-линейное отображение. По построению, имеем $\sum_{\gamma\in\Gamma} \iota_\gamma \circ \pi_\gamma = \mathrm{id}$, откуда $f = \sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma$, что и требовалось. Таким образом, определена категория Γ-градуированных левых A-модулей, объекты которой суть Γ-градуированные левые A-модули, а морфизмы суть Γ-градуированные левые A-линейные отображения, причем эта категория есть полная подкатегория категории левых A-модулей.

Подмодуль $N \subset M$, где $M = \oplus_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$ есть Γ-градуированный левый A-модуль, называется Γ-*градуированным*, если $N = \oplus_{\gamma\in\Gamma} N_\gamma$, причем $N_\gamma = N \cap M_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$.

Тензорное произведение $\otimes M_i$ всякого семейства $\{M_i; i \in I\}$ Γ-градуированных левых A-модулей, $M_i = \oplus_{\gamma_i\in\Gamma} M_{i,\gamma_i}$, обладает естественной Γ-градуировкой. Именно,

$$\otimes M_i = \otimes_{i\in I}(\oplus_{\gamma_i\in\Gamma} M_{i,\gamma_i}) = \oplus_{\gamma\in\Gamma}(\otimes M_i)_\gamma, \quad (\otimes M_i)_\gamma = \oplus_{\sum_{i\in I}\gamma_i=\gamma}(\otimes M_{i,\gamma_i}).$$

Пример 1.6.6. Для пары модулей $M = \oplus_{\alpha\in\Gamma} M_\alpha$, $N = \oplus_{\beta\in\Gamma} N_\beta$ имеем

$$M \otimes N = \oplus_{\gamma\in\Gamma}(M \otimes N)_\gamma, \quad (M \otimes N)_\gamma = \oplus_{\alpha+\beta=\gamma}(M_\alpha \otimes N_\beta).$$

1.6.4 Тензорная алгебра модуля

Пусть $\mathbb{F}$ – числовое поле, A – унитальная ассоциативная алгебра над $\mathbb{F}$, M – левый A-модуль. Положим

$$T^n(M) = \otimes^n M = \begin{cases} M \otimes \cdots \otimes M \ (n - \text{сомножителей}), & n \in \mathbb{N}; \\ A, \quad n = 0. \end{cases}$$

(Здесь и ниже тензорное произведение берется в категории левых A-модулей.) Прямая сумма $T(M) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}_+} T^n(M)$ левых A-модулей $T^n(M)$ по определению есть левый A-модуль. Она имеет дополнительную структуру унитальной ассоциативной $\mathbb{Z}_+$-градуированной алгебры с умножением, задаваемым правилами

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \cdot (y_1 \otimes \cdots \otimes y_q) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_q = x_1 \otimes \cdots \otimes y_q$$

для всех $p, q \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, y_q \in M$ (поясним, что $A \otimes M = M = M \otimes A$). Эта алгебра называется *тензорной алгеброй левого A-модуля M*.

Пусть дано левое A-линейное отображение $f : M \to N$ левого A-модуля M в левый A-модуль N, тогда правило

$$\begin{aligned} &e \mapsto e, \quad e \in A, \\ &x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mapsto f(x_1) \otimes \cdots \otimes f(x_n), \quad x_1, \ldots, x_n \in M, \end{aligned}$$

задает $\mathbb{Z}_+$-градуированный морфизм $T(f) : T(M) \to T(N)$, причем композиция $f \circ g$ переходит в композицию $T(f) \circ T(g)$. Другими словами, определен ковариантный функтор из категории левых A-модулей в категорию $\mathbb{Z}_+$-градуированных алгебр.

Пусть M – левый A-модуль, и $T()$ – его $\mathbb{Z}_+$-градуированная тензорная алгебра. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определена *симметрическая группа* $\mathfrak{S}_n$, т. е. группа всех подстановок σ, $\{1, \ldots, n\} \mapsto \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$, а для каждой подстановки $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ определен ее знак $\operatorname{sign} \sigma \in \{-1, +1\}$. Действие симметрической группы $\mathfrak{S}_n$, $n \in \mathbb{N}$, на левом A-модуле $T^n(M)$, $x \mapsto \sigma(x)$, $\sigma \in \mathfrak{S}$, $x \in T^n(M)$, задается правилом

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mapsto x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)} \quad \text{для всех} \quad x_1, \ldots, x_n \in L.$$

На $T^0(M) = A$ группа $\mathfrak{S}_0 = \{\mathrm{id}\}$ действует тривиально. Таким образом, для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ определено левое A-линейное отображение

$$\pi_+^n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma : T^n(M) \to T^n(M).$$

Его образ

$$S^n(M) = \operatorname{im} \pi_+^n = \{x \in T^n(M) : \sigma(x) = x \quad \text{для всех} \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n\}.$$

В частности, $\pi_+^n \circ \pi_+^n = \pi_+^n$, т. е. π_+^n – проектор. Определена точная последовательность левых A-модулей

$$0 \longrightarrow \ker \pi_+^n \longrightarrow T^n(M) \xrightarrow{\pi_+^n} S^n(M) \longrightarrow 0,$$

так что $S^n(M) = T^n(M)/\ker \pi_+^n$. Положим $S(M) = \oplus_{n \in \mathbb{Z}_+} S^n(M)$ и превратим $S(M)$ в $\mathbb{Z}_+$-градуированную унитальную ассоциативную коммутативную алгебру, задав умножение $\odot : S(M) \times S(M) \to S(M)$ правилом

$$(x, y) \mapsto x \odot y = \pi_+^{m+n}(x \otimes y) \quad \text{для всех} \quad x \in S^m(M),\ y \in S^n(M).$$

Далее, положим $\pi_+ = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \pi_+^n : T(M) \to S(M)$ (так что, $\pi_+|_{T^n(M)} = \pi_+^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$), тогда π_+ – морфизм алгебр, его ядро $\ker \pi_+ = \oplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \ker \pi_+^n$ – идеал алгебры $T(M)$, и алгебра $S(M) = T(M)/\ker \pi_+$. Алгебра $S(M)$ называется *симметрической алгеброй левого A-модуля M*. Заметим, что $S(M)$ – градуированная коммутативная алгебра с градуирующим множителем $\chi = 1$.

Аналогичным образом, для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ определено левое A-линейное отображение

$$\pi_-^n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}\sigma \cdot \sigma : T^n(M) \to T^n(M).$$

Его образ

$$\Lambda^n(M) = \operatorname{im} \pi_-^n = \{x \in T^n(M) : \sigma(x) = \operatorname{sign}\sigma \cdot x \quad \text{для всех} \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n\}.$$

В частности, $\pi_-^n \circ \pi_-^n = \pi_-^n$, т. е. π_-^n – проектор. Определена точная последовательность левых A-модулей

$$0 \longrightarrow \ker \pi_-^n \longrightarrow T^n(M) \xrightarrow{\pi_-^n} \Lambda^n(M) \longrightarrow 0,$$

так что $\Lambda^n(M) = T^n(M)/\ker \pi_-^n$. Положим $\Lambda(M) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\Lambda^n(M)$ и превратим $\Lambda(M)$ в $\mathbb{Z}_+$-градуированную унитальную ассоциативную алгебру, задав умножение $\wedge : \Lambda(M) \times \Lambda(M) \to \Lambda(M)$ правилом

$$(x, y) \mapsto x \wedge y = \pi_-^{m+n}(x \otimes y) \quad \text{для всех} \quad x \in \Lambda^m(M),\ y \in \Lambda^n(M).$$

Далее, положим $\pi_- = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \pi_-^n : T(M) \to \Lambda(M)$ (так что, $\pi_-|_{T^n(M)} = \pi_-^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$), тогда π_- – морфизм алгебр, его ядро $\ker \pi_- = \oplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \ker \pi_-^n$ – идеал алгебры $T(M)$, и алгебра $\Lambda(M) = T(M)/\ker \pi_-$. Алгебра $\Lambda(M)$ называется *внешней алгеброй левого A-модуля M*. Заметим, что

$$y \wedge x = (-1)^{nm} x \wedge y \quad \text{для всех} \quad y \in \Lambda^n(M),\ x \in \Lambda^m(M),$$

так что $\Lambda(M)$ – градуированная коммутативная алгебра с градуирующим множителем $\chi(m, n) = (-1)^{mn}$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

В качестве упражнения, полезно поразмышлять об универсальных свойствах введенных алгебр.

1.6.5 Дуальность

Пусть $\mathbb{F}$ – числовое поле, A – ассоциативная алгебра.

Пусть M и N – левые A-модули, и $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ – множество всех левых A-линейных отображений из M в N,

$$f(ax) = af(x) \quad \text{для всех} \quad f \in \mathrm{Hom}_A(M,N),\ a \in A,\ x \in M.$$

Очевидно, $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ есть линейное пространство над $\mathbb{F}$ с поточечными операциями

$$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{F},\ f, g \in \mathrm{Hom}_A(M,N),\ x \in M,$$

однако естественной структурой левого или правого A-модуля в общем случае $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ не обладает.

Аналогичным образом, пусть M и N – правые A-модули, и $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ – множество всех правых A-линейных отображений из M в N,

$$f(xa) = f(x)a \quad \text{для всех} \quad f \in \mathrm{Hom}_A(M,N),\ a \in A,\ x \in M.$$

(Обозначение $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ корректно, поскольку для левых (правых) A-модулей определены только левые (правые) A-линейные отображения.) Опять, $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ есть линейное пространство над $\mathbb{F}$ с поточечными операциями.

Пусть теперь M – левый, а N – правый A-модули, и $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ – множество всех A-линейных отображений из M в N,

$$f(ax) = f(x)a \quad \text{для всех} \quad f \in \mathrm{Hom}_A(M,N),\ a \in A,\ x \in M.$$

Снова $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ – линейное пространство над $\mathbb{F}$ с поточечными операциями, но теперь оно обладает естественной структурой правого A-модуля. Действительно, пусть $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ и $a \in A$, определим линейное отображение $fa : M \to N$ поточечно,

$$(fa)(x) = f(ax) = f(x)a \quad \text{для всех} \quad x \in M,$$

тогда

$$(fa)(bx) = f(abx) = f(x)ab = f(ax)b = (fa)(x)b \quad \text{для всех} \quad b \in A,\ x \in M,$$

так что $fa \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$.

Аналогичным образом, пусть M – правый, а N – левый A-модули, и $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ – множество всех A-линейных отображений из M в N,

$$f(xa) = af(x) \quad \text{для всех} \quad f \in \mathrm{Hom}_A(M,N),\ a \in A,\ x \in M.$$

Здесь линейное пространство $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ обладает естественной структурой левого A-модуля с поточечным умножением

$$(af)(x) = f(xa) = af(x) \quad \text{для всех} \quad f \in \mathrm{Hom}_A(M,N),\ a \in A,\ x \in M.$$

Наиболее полезны два частных случая.

Пусть A – ассоциативная коммутативная алгебра. Левые и правые модули отличаются только формой записи, так что для любых A-модулей M и N множество $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ всех A-линейных отображений из M в N есть A-модуль с поточечным умножением

$$(af)(x) = f(ax) = af(x) \quad \text{для всех} \quad f \in \mathrm{Hom}_A(M,N),\ a \in A,\ x \in M$$

(используется левая запись).

Пусть A – ассоциативная алгебра (возможно некоммутативная). Пусть M – левый A-модуль, рассматривая A как правый A-модуль с присоединенным действием, наделяем линейное пространство $M^* = \mathrm{Hom}_A(M,A)$ структурой правого A-модуля с поточечным умножением

$$(\phi a)(x) = \phi(ax) = \phi(x)a \quad \text{для всех} \quad \phi \in M^*,\ a \in A,\ x \in M.$$

Правый A-модуль M^* называется *дуальным* (иначе, *сопряженным*) *модулем* к левому A-модулю M. Заметим, что иногда для $\phi \in M^*$ и $x \in M$ вместо $\phi(x)$ пишут $\langle \phi, x \rangle$. Для каждого левого A-линейного отображения $f : M \to N$, где M, N – левые A-модули, *дуальное* (иначе, *сопряженное*) правое A-линейное отображение $f^* : N^* \to M^*$ определено правилом $f^*(\phi) = \phi \circ f$ для всех $\phi \in N^*$. Очевидно, композиция $g \circ f : M \to P$, где $f : M \to N$, $g : N \to P$, переходит в композицию $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : P^* \to M^*$, а тождественное отображение $\mathrm{id}_M : M \to M$ переходит в тождественное отображение $\mathrm{id}_{M^*} : M^* \to M^*$,

$$(\mathrm{id}_M)^*(\phi) = \phi \circ \mathrm{id}_M = \phi \quad \text{для всех} \quad \phi \in M^*.$$

Таким образом, правило $M \mapsto M^*$, где M – левый A-модуль, $f \mapsto f^*$, где $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$, определяет контравариантный функтор дуальности, отображающий категорию левых A-модулей в категорию правых A-модулей.

В топологической ситуации все модули предполагаются наделенными топологиями, а все A-линейные отображения непрерывными, причем дуальные модули можно наделять различными топологиям.

Подробнее о модулях и их свойствах можно узнать в книгах [6], [4], [10], [11].

1.7 Гомологии

1.7.1 Дифференциальные модули

Пусть $\mathbb{F}$ – числовое поле, A – унитальная ассоциативная алгебра над $\mathbb{F}$, и C – левый A-модуль. Эндоморфизм $\partial : C \to C$ (т. е. левое A-линейное отображение из C в C) называется *граничным оператором* (иначе *дифференциалом*), если композиция $\partial \circ \partial = 0$ (т. е., $\operatorname{im} \partial \subset \ker \partial$). В этом случае пара $\{C, \partial\}$ называется *дифференциальным левым A-модулем*, элементы модуля C называются *цепями*, элементы ядра $\ker \partial = \{x \in C : \partial(x) = 0\}$ называются *циклами*, элементы образа $\operatorname{im} \partial = \{y = \partial(x); x \in C\}$ называются *границами*. Левый A-модуль *гомологий* дифференциального модуля $\{C, \partial\}$ определяется как фактор-модуль

$$H(C) = H(C; \partial) = \ker \partial / \operatorname{im} \partial = \{x \in C : \partial(x) = 0\}/\{y = \partial(x); x \in C\},$$

его элементы суть *гомологии*, т. е. классы эквивалентности $\mathbf{x} = x + \operatorname{im} \partial$, $x \in C$.

Пусть $\{C, \partial_C\}$, $\{K, \partial_K\}$ – дифференциальные левые A-модули. Левое A-линейное отображение $f : C \to K$ называется *морфизмом дифференциальных модулей*, если $\partial_K \circ f = f \circ \partial_C$, т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\partial_C"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "f"] \\ K \arrow[r, "\partial_K"'] & K \end{tikzcd}$$

Таким образом, определена категория $\mathcal{LDM}_A$ левых дифференциальных A-модулей, объекты которой суть левые дифференциальные A-модули, а морфизмы – морфизмы дифференциальных модулей.

Аналогичным образом определяется категория правых дифференциальных A-модулей и категория дифференциальных A-модулей для коммутативной алгебры A. В топологической ситуации дифференциалы предполагаются непрерывными.

Предложение 1.7.1. *Пусть $f : C \to K$ – морфизм дифференциальных модулей. Тогда*

$$f(\ker \partial_C) \subset \ker \partial_K, \quad f(\operatorname{im} \partial_C) \subset \operatorname{im} \partial_K.$$

В частности, определено фактор-отображение $\mathbf{f} : H(C) \to H(K)$, действующее по правилу

$$\mathbf{x} = x + \operatorname{im} \partial_C \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(x) + \operatorname{im} \partial_K \quad \textit{для всех} \quad x \in \ker \partial_C.$$

Доказательство. Проводится прямыми вычислениями, опираясь на определяющее равенство $\partial_K \circ f = f \circ \partial_C$. □

Левое A-линейное отображение $s : C \to K$ называется *гомотопией, связывающий морфизмы дифференциальных модулей* $f, g : C \to K$, если справедлива *гомотопическая формула*

$$\partial_K \circ s + s \circ \partial_C = f - g.$$

Предложение 1.7.2. *Пусть $f, g : C \to K$ – морфизмы дифференциальных модулей, и $s : C \to K$ – связывающая их гомотопия. Тогда фактор-отображения $\mathbf{f}, \mathbf{g} : H(C) \to H(K)$ совпадают.*

Доказательство. Действительно, пусть $\mathbf{x} = x + \operatorname{im} \partial_C \in H(C)$, $x \in \ker \partial_C$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(x) + \operatorname{im} \partial_K$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = g(x) + \operatorname{im} \partial_K$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= f(x) - g(x) + \operatorname{im} \partial_K = (f - g)(x) + \operatorname{im} \partial_K \\ &= (\partial_K \circ s + s \circ \partial_C)(x) + \operatorname{im} \partial_K = \partial_K(s(x)) + s(\partial_C(x)) + \operatorname{im} \partial_K \\ &= \operatorname{im} \partial_K = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

поскольку $\partial_K(s(x)) \in \operatorname{im} \partial_K$, а $s(\partial_C(x)) = 0$. □

1.7.2 Комплексы

Пусть левый A-модуль C $\mathbb{Z}$-градуирован, а дифференциал ∂ – однородный степени -1 (алгебру A можно считать тривиально градуированной, $A_0 = A$, $A_n = 0$ при $n \neq 0$). Иначе говоря, $C = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n$, $\partial = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} \partial_n$, где левые A-линейные отображения $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$, причем $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, т. е. $\ker \partial_n \supset \operatorname{im} \partial_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$. В этом случае говорят, что задан *комплекс* $\{C_n, \partial_n\} = \{C_n, \partial_n; n \in \mathbb{Z}\}$ левых A-модулей, и записывают его в виде последовательности

$$\ldots \xleftarrow{\partial_{n-1}} C_{-1} \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} C_{n+1} \xleftarrow{\partial_{n+2}} \ldots,$$

в которой композиция любых двух последовательных стрелок равна нулю. В этом случае гомологии также $\mathbb{Z}$-градуируются,

$$H(C) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n(C), \quad H_n(C) = \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

причем, элементы модулей C_n называются *n-мерными цепями*, элементы ядер $\ker \partial_n = \{x_n \in C_n : \partial_n(x_n) = 0\}$ называются *n-мерными циклами*, элементы образов $\operatorname{im} \partial_{n+1} = \{y_n = \partial_{n+1}(x_{n+1}); x_{n+1} \in C_{n+1}\}$ называются *n-мерными границами*, а элементы фактор-модулей $H_n(C)$ называются *n-мерными гомологиями*.

Пусть $\{C_n, (\partial_C)_n\}$, $\{K_n, (\partial_K)_n\}$ – комплексы левых A-модулей. Левое A-линейное отображение

$$f = \oplus f_n : C = \oplus C_n \to K = \oplus K_n, \quad f_n : C_n \to K_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

называется *морфизмом комплексов левых A-модулей*, если справедливы равенства $(\partial_K)_n \circ f_n = f_{n-1} \circ (\partial_C)_n$, $n \in \mathbb{Z}$, т. е. следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd}
\ldots & C_{n-1} \arrow[l, "(\partial_C)_{n-1}"'] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & C_n \arrow[l, "(\partial_C)_n"'] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n+1} \arrow[l, "(\partial_C)_{n+1}"'] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & \ldots \arrow[l, "(\partial_C)_{n+2}"'] \\
\ldots & K_{n-1} \arrow[l, "(\partial_K)_{n-1}"'] & K_n \arrow[l, "(\partial_K)_n"'] & K_{n+1} \arrow[l, "(\partial_K)_{n+1}"'] & \ldots \arrow[l, "(\partial_K)_{n+2}"']
\end{tikzcd}$$

Итак, определена категория $\mathcal{LCM}_A$ комплексов левых A-модулей, объекты которой суть комплексы левых A-модулей, а морфизмы – морфизмы комплексов левых A-модулей.

Предложение 1.7.3. *Пусть $f = \oplus f_n : C = \oplus C_n \to K = \oplus K_n$ – морфизм комплексов левых A-модулей. Тогда*

$$f_n(\ker(\partial_C)_n) \subset \ker(\partial_K)_n, \quad f_n(\operatorname{im}(\partial_C)_{n+1}) \subset \operatorname{im}(\partial_K)_{n+1}.$$

В частности, определено фактор-отображение

$$\mathbf{f} = \oplus \mathbf{f}_n : H(C) = \oplus H_n(C) \to H(K) = \oplus H_n(K),$$

действующее по правилу

$$\mathbf{x}_n = x_n + \mathrm{im}(\partial_C)_{n+1} \mapsto \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n) = f_n(x_n) + \mathrm{im}(\partial_K)_{n+1}, \quad x_n \in \ker(\partial_C)_n.$$

Пусть $f = \oplus f_n, g = \oplus g_n : C = \oplus C_n \to K = \oplus K_n$ – морфизмы комплексов левых A-модулей. Левое A-линейное отображение

$$s = \oplus s_n : C = \oplus C_n \to K = \oplus K_n, \quad s_n : C_n \to K_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

называется *гомотопией, связывающей морфизмы f и g*, если справедливы равенства

$$(\partial_K)_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ (\partial_C)_n = f_n - g_n \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Предложение 1.7.4. *Пусть*

$$f = \oplus f_n, g = \oplus g_n : C = \oplus C_n \to K = \oplus K_n$$

– морфизмы комплексов левых A-модулей, и

$$s = \oplus s_n : C = \oplus C_n \to K = \oplus K_n$$

связывающая их гомотопия. Тогда фактор-отображения

$$\mathbf{f} = \oplus \mathbf{f}_n, \mathbf{g} = \oplus \mathbf{g}_n : H(C) = \oplus H_n C) \to H(K) = \oplus H_n(K)$$

совпадают.

Аналогичным образом определяется категория комплексов правых A-модулей и категория комплексов A-модулей для коммутативной алгебры A. В топологической ситуации дифференциалы предполагаются непрерывными.

Часто встречаются ситуации, когда модули $C_n = 0$ при $n = -1, -2, \dots,$ так что $C = \oplus_{n \in \mathbb{Z}_+} C_n$, $\partial = \oplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \partial_n$, и комплекс имеет вид

$$0 \xleftarrow{\partial_0} C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \xleftarrow{\partial_2} C_2 \xleftarrow{\partial_3} \dots$$

Обычно в этом случае говорят, что комплекс $\{C_n, \partial_n\} = \{C_n, \partial_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ *неотрицателен.*

1.7.3 Когомологии

Пусть $\{C, \partial\}$ – дифференциальный левый A-модуль, и M – правый A-модуль. В этом случае правый A-модуль $C(M) = \mathrm{Hom}_A(C, M)$ имеет естественную структуру дифференциального модуля с дифференциалом $d = \partial^* : C(M) \to C(M)$, где $d(\phi) = \phi \circ \partial : C \to M$ для всех $\phi : C \to M$. Легко проверяется, что d – правое A-линейное отображение и композиция $d \circ d = 0$. Таким образом, определен дифференциальный правый A-модуль $\{C(M), d\}$. причем, дифференциал d называется *кограничным оператором*, элементы модуля $C(M)$ называются *коцепями* (со значениями в M), элементы ядра $\ker d = \{\phi \in C(M) : d(\phi) = 0\}$ называются *коциклами*, элементы образа $\mathrm{im}\, d = \{\phi = d(\psi); \psi \in C(M)\}$ называются *кограницами*, а элементы фактор-модуля $H(C(M)) = \ker d / \mathrm{im}\, d$ называются *когомологиями*.

Пусть $\{C(M), d_C\}$, $\{K(N), d_K\}$ – дифференциальные правые A-модули. Морфизм из $\{C(M), d_C\}$ в $\{K(N), d_K\}$ есть правое A-линейное отображение $F : C(M) \to K(N)$ такое, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} C(M) \arrow[r, "d_C"] \arrow[d, "F"'] & C(M) \arrow[d, "F"] \\ K(N) \arrow[r, "d_K"'] & K(N) \end{tikzcd} \qquad \text{т. е.} \quad F \circ d_C = d_K \circ F.$$

Выделим морфизмы специального вида. Именно, пусть $f \in \mathrm{Hom}_A(K, C)$, $g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$. Определим отображение $F \in \mathrm{Hom}_A(C(M), K(N))$ правилом $\phi \mapsto F(\phi) = g \circ \phi \circ f$ для всех $\phi \in C(M)$. Легко проверяется, что F будет морфизмом из $\{C(M), d_C\}$ в $\{K(N), d_K\}$, если f есть морфизм из $\{K, \partial_K\}$ в $\{C, \partial_C\}$.

Пусть $\{C_n, \partial_n; n \in \mathbb{Z}\}$ – комплекс левых A-модулей и M – правый A-модуль. Положим здесь $C^n(M) = \mathrm{Hom}_A(C_n, M)$, $C(M) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} C^n(M)$, $d^n = (\partial_{n+1})^* \in \mathrm{Hom}_A(C^n(M), C^{n+1}(M))$, где $d^n(\phi^n) = \phi^n \circ \partial_{n+1}$ для всех $\phi^n \in C^n(M)$, $d = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} d^n$. Легко проверяется, что $d^{n+1} \circ d^n = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, так что определен комплекс $\{C^n(M), d^n; n \in \mathbb{Z}\}$ правых A-модулей, который наглядно записывается как последовательность

$$\dots \xrightarrow{d^{n-2}} C^{n-1}(M) \xrightarrow{d^{n-1}} C^n(M) \xrightarrow{d^n} C^{n+1}(M) \xrightarrow{d^{n+1}} \dots$$

В этом случае когомологии

$$H(C(M)) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} H^n(C(M)), \quad H^n(C(M)) = \ker d^n / \operatorname{im} d^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

причем элементы из $C^n(M)$ называются *n-мерными коцепями*, элементы из $\ker d^n = \{\phi^n \in C^n(M) : d^n(\phi^n) = 0\}$ называются *n-мерными коциклами*, элементы из $\operatorname{im} d^{n-1} = \{\phi^n = d^{n-1}(\psi^{n-1}); \psi^{n-1} \in C^{n-1}(M)\}$ называются *n-мерными кограницами*, а элементы фактор-модулей $H^n(C(M))$ называются *n-мерными когомологиями.*

Пусть $\{C^n(M), d_C^n\}$ и $\{K^n(N), d_K^n\}$ – комплексы правых A-модулей. Морфизм из $\{C^n(M), d_C^n\}$ в $\{K^n(N), d_K^n\}$ есть правое A-линейное отображение

$$F = \oplus F^n : C(M) \to K(N), \quad F^n : C^n(M) \to K^n(N), \quad n \in \mathbb{Z},$$

такое что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "d_C^{n-2}"] & C^{n-1}(M) \arrow[r, "d_C^{n-1}"] \arrow[d, "F^{n-1}"'] & C^n(M) \arrow[r, "d_C^n"] \arrow[d, "F^n"'] & C^{n+1}(M) \arrow[r, "d_C^{n+1}"] \arrow[d, "F^{n+1}"'] & \dots \\
\dots \arrow[r, "d_K^{n-2}"] & K^{n-1}(N) \arrow[r, "d_K^{n-1}"] & K^n(N) \arrow[r, "d_K^n"] & K^{n+1}(N) \arrow[r, "d_K^{n+1}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

иначе, $d_K^n \circ F^n = F^{n+1} \circ d_C^n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Выделим морфизмы специального вида. Именно, пусть $f_n \in \operatorname{Hom}_A(K_n, C_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $g \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$. Отображение $F = \oplus F^n \in \operatorname{Hom}_A(C(M), K(N))$, действующее по правилу

$$\phi^n \mapsto F^n(\phi^n) = g \circ \phi^n \circ f_n \quad \text{для всех} \quad \phi^n \in C^n(M),\ n \in \mathbb{Z},$$

будет морфизмом из $\{C^n(M), d_C^n\}$ в $\{K^n(N), d_K^n\}$, если для каждого $n \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $(\partial_K)_n \circ f_n = f_{n-1} \circ (\partial_C)_n$, т. е. если $f = \oplus f_n$ есть морфизм из $\{K_n, (\partial_K)_n\}$ в $\{C_n, (\partial_C)_n\}$.

Пусть $F = \oplus F^n$, $G = \oplus G^n$ – морфизмы из $\{C^n(M), d_C^n\}$ в $\{K^n(N), d_K^n\}$. Отображение $S = \oplus S^n \in \operatorname{Hom}_A(C(M), K(N))$, $S^n : C^n(M) \to K^{n-1}(N)$, $n \in \mathbb{Z}$, называется гомотопией, связывающей морфизмы F и G, если справедлива гомотопическая формула

$$d_K^{n-1} \circ S^n + S^{n+1} \circ d_C^n = F^n - G^n \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

С такими определениями, для комплексов $\{C^n(M), d^n\}$ справедливы все результаты, доказанные выше для комплексов $\{C_n, \partial_n\}$, с очевидными модификациями.

Часто встречаются ситуации, когда модули $C_n = 0$ при $n = -1, -2, \dots,$ так что $C(M) \oplus_{n\in\mathbb{Z}_+} C^n(M)$, $d = \oplus_{n\in\mathbb{Z}_+} d^n$ и комплекс имеет вид

$$0 \longrightarrow C^0(M) \xrightarrow{d^0} C^1(M) \xrightarrow{d^1} C^2(M) \xrightarrow{d^2} \dots$$

Обычно в этом случае говорят, что комплекс $\{C^n(M), d^n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ неотрицателен.

Подробное изложение см., например, в [6], [11], [4].

Глава 2

Формальная дифференциальная геометрия

2.1 Алгебра как основной объект

2.1.1 Определения

Пусть $\mathbb{F}$ – числовое поле. Линейное пространство $\mathcal{A}$ над $\mathbb{F}$ называется алгеброй, если в нем определена билинейная операция (умножение)

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b.$$

Алгебра $\mathcal{A}$ называется

- унитальной, если она содержит единицу $e \in \mathcal{A}$, где $e \cdot a = a = a \cdot e$ для всех $a \in \mathcal{A}$,

- коммутативной, если $a \cdot b = b \cdot a$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$,

- ассоциативной, если $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ для всех $a, b, c \in \mathcal{A}$ (в этом случае обычно пишут ab вместо $a \cdot b$.

- алгеброй Ли, если

  $$a \cdot b + b \cdot a = 0 \text{ для всех } a, b \in \mathcal{A},$$
  $$(a \cdot b) \cdot c + (b \cdot c) \cdot a + (c \cdot a) \cdot b = 0 \text{ для всех } a, b, c \in \mathcal{A}.$$

  (в этом случае обычно пишут $[a, b]$ вместо $a \cdot b$).

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Линейное подпространство $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ называется

- подалгеброй алгебры $\mathcal{A}$, если $a \cdot b \in \mathcal{B}$ для всех $a, b \in \mathcal{B}$,
- левым, правым, двусторонним идеалом алгебры $\mathcal{A}$, если $a \cdot b \in \mathcal{B}$, $b \cdot a \in \mathcal{B}$, $a \cdot b, b \cdot a \in \mathcal{B}$ для всех $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$.

Подмножество

- $\operatorname{cen} \mathcal{A} = \{c \in \mathcal{A} : ac = ca$ для всех $a \in \mathcal{A}\}$ называется центром алгебры $\mathcal{A}$,
- $\operatorname{ann} \mathcal{A} = \{z \in \mathcal{A} : az = za = 0$ для всех $a \in \mathcal{A}\}$ называется аннулятором алгебры $\mathcal{A}$.

Для каждой алгебры $\mathcal{A}$ определена присоединенная билинейная операция $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$, превращающую линейное пространство $\mathcal{A}$ в другую алгебру $\mathcal{A}_{[\cdot,\cdot]}$. Ясно, что $\mathcal{A}_{[\cdot,\cdot]} \simeq \mathcal{A}$, если исходная алгебра $\mathcal{A}$ – алгебра Ли, тогда как $\mathcal{A}_{[\cdot,\cdot]}$ – алгебра Ли, если алгебра $\mathcal{A}$ ассоциативная.

2.1.2 Примеры

Пример 2.1.1. *Гладкие функции на многообразии.* Пусть M – гладкое многообразие конечной размерности $n = \dim M \in \mathbb{N}$ (см., например, [8], [17], [18]). Множество $\mathcal{C}^\infty(M)$ всех гладких $\mathbb{F}$-значных функций на M обладает естественной структурой унитальной ассоциативной коммутативной алгебры с поточечными операциями.

В анализе важен случай $M = \mathbb{R}^n$. Алгебра $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ обладает естественной топологией равномерной сходимости на компактах вместе с частными производными всех порядков (см., например, [16]), она имеет подалгебры $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Алгебра $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех гладких функций на $\mathbb{R}^n$, убывающих на бесконечности вместе с частными производными всех порядков быстрее любой обратной степени модуля независимой переменной $x \in \mathbb{R}^n$, а алгебра $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех гладких *финитных* функций (т. е. функций с компактным носителем). Обе алгебры обладают естественными топологиями (см., например, [16]), обе они не унитальные, однако их аннуляторы тривиальные. Концепция формальной дифференциальной геометрии позволяет использовать геометрические методы и конструкции для вывода новых характеристик этих и других подобных алгебр. Например, алгебра $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ является идеалом алгебр $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Возникающие, таким образом фактор-алгебры

$$\mathcal{E}(S^{n-1}_\infty) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \text{и} \quad \mathcal{S}(S^{n-1}_\infty) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

где S^{n-1}_∞ – $(n-1)$-мерная сфера бесконечно большого радиуса, совершенно не изучены, поскольку не укладываются в рамки традиционного анализа.

Пример 2.1.2. **Линейные отображения.** Пусть $\mathcal{L}$ – линейное пространство над $\mathbb{F}$. На линейном пространстве $\mathrm{End}_\mathbb{F}(\mathcal{L})$ всех эндоморфизмов пространства $\mathcal{L}$ имеется естественная билинейная операция – композиция отображений

$$(M, N) \mapsto M \circ N \quad \text{для всех} \quad M, N \in \mathrm{End}_\mathbb{F}(\mathcal{L},)$$

превращающая $\mathrm{End}_\mathbb{F}(\mathcal{L})$ в унитальную ассоциативную алгебру. В свою очередь, присоединенная операция – коммутатор

$$(M, N) \mapsto [M, N] = M \circ N - N \circ M \quad \text{для всех} \quad M, N \in \mathrm{End}_\mathbb{F}(\mathcal{L},)$$

превращает $\mathrm{End}_\mathbb{F}(\mathcal{L})$ в алгебру Ли, которую обычно обозначают $\mathfrak{gl}(\mathcal{L})$.

Выделим простейший нетривиальный частный случай (см., например, [2]). Пусть $\mathcal{L} = \mathbb{F}^n$ – линейное пространство всех столбцов высотой $n \in \mathbb{N}$ с элементами из поля $\mathbb{F}$. Здесь, $\mathrm{End}_\mathbb{F}(\mathbb{F}^n) = \mathrm{Mat}(\mathbb{F}; n)$ – алгебра всех квадратных матриц порядка n с элементами из поля $\mathbb{F}$.

Пример 2.1.3. **Гладкие функции на множестве.** Пусть M – гладкое многообразие и S – его произвольное подмножество. Множество

$$\mathcal{J}(S) = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(M) : \phi|_S = 0\}$$

всех гладких функций, равных 0 на S, есть идеал алгебры $\mathcal{C}^\infty(M)$, так что определена фактор-алгебра $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)/\mathcal{J}(S)$. Если S есть достаточно хорошее подмногообразие многообразия M, то $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S)$ совпадает с алгеброй $\mathcal{C}^\infty(S)$ всех гладких функций на многообразии S. В противном случае, алгебра $\mathcal{C}^\infty_{ext}(S)$ есть достаточно приличная база для изучения геометрии множества S.

2.1.3 Морфизмы алгебр

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – алгебры. Линейное отображение $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ называется морфизмом алгебр, если $F(x \cdot y) = F(x) \cdot F(y)$ для всех $x, y \in \mathcal{A}$. Здесь ядро $\ker F = \{a \in \mathcal{A} : F(a) = 0\}$ – двусторонний идеал алгебры $\mathcal{A}$, а образ $\mathrm{im}\, F = \{b = F(a) \in \mathcal{B}; a \in \mathcal{A}\}$ – подалгебра алгебры $\mathcal{B}$.

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. *Левое присоединенное действие* $\mathrm{ad} : \mathcal{A} \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ определим правилом

$$a \mapsto \mathrm{ad}(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad x \mapsto (\mathrm{ad}(a))(x) = a \cdot x \quad \text{для всех} \quad a, x \in \mathcal{A}.$$

Тогда

- $\mathrm{ad} : \mathcal{A} \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ – морфизм ассоциативных алгебр, если $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра,

- $\mathrm{ad} : \mathcal{A} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{A})$ – морфизм алгебр Ли, если $\mathcal{A}$ – алгебра Ли.

В частности, пусть $\mathcal{L}$ – линейное пространство. Тогда

- $\mathrm{ad} : \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L}))$ – морфизм ассоциативных алгебр, где $(\mathrm{ad}(F))(X) = F \circ X$ для всех $F, X \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L})$,

- $\mathrm{ad} : \mathfrak{gl}(\mathcal{L}) \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(\mathcal{L}))$ – морфизм алгебр Ли, где $(\mathrm{ad}(F))(X) = [F, X]$ для всех $F, X \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L})$.

Имеется также правое присоединенное действие $\mathrm{ad}_r : \mathcal{A} \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$, действующее по правилу

$$a \mapsto \mathrm{ad}_r(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad x \mapsto (\mathrm{ad}_r(a))(x) = x \cdot a \quad \text{для всех} \quad a, x \in \mathcal{A}.$$

В ситуациях, когда используются одновременно оба действия вместо ad обычно пишут ad_l. Конечно, $\mathrm{ad}_l = \mathrm{ad}_r = \mathrm{ad}$, если алгебра $\mathcal{A}$ коммутативная. В некоммутативном случае полезно *ассоциированное действие* $\mathrm{as} = \mathrm{ad}_l - \mathrm{ad}_r$,

$$a \mapsto \mathrm{as}(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad x \mapsto (\mathrm{as}(a))(x) = [a, x] = a \cdot x - x \cdot a, \quad a, x \in \mathcal{A}.$$

2.2 Мультипликаторы и дифференцирования

2.2.1 Мультипликаторы

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Линейное отображение $M \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ называется *левым, правым, двусторонним мультипликатором*, если

$$M(a \cdot b) = M(a) \cdot b, \quad M(a \cdot b) = a \cdot M(b), \quad M(a \cdot b) = M(a) \cdot b = a \cdot M(b),$$

для всех $a, b \in \mathcal{A}$. Обозначим через $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ множество всех мультипликаторов (т. е. двусторонних мультипликаторов) алгебры $\mathcal{A}$.

Предложение 2.2.1. *Эндоморфизм* $M \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ *есть левый (правый) мультипликатор алгебры* $\mathcal{A}$, *тогда и только тогда, когда приведенная ниже левая (правая) диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\mathrm{ad}_l"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "\mathrm{ad}_l"] \\ \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathrm{ad}_l(M)"'] & \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\mathrm{ad}_r"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "\mathrm{ad}_r"] \\ \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathrm{ad}_l(M)"'] & \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}) \end{tikzcd}$$

Доказательство. Действительно, пусть $a, b \in \mathcal{A}$. Пройдя левую диаграмму по пути *направо-вниз*, получим

$$\mathrm{ad}_l(M(a))(b) = M(a) \cdot b,$$

а пройдя эту же диаграмму по пути *вниз-направо*, получим

$$\mathrm{ad}_l(M)(\mathrm{ad}_l(a))(b) = (M \circ \mathrm{ad}_l(a))(b) = M(a \cdot b).$$

Таким образом, левая диаграмма коммутативна тогда и только тогда, когда M – левый мультипликатор.

Аналогичным образом, разбирается и правая диаграмма. □

Замечание. Пусть $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathcal{K}, \mathcal{L})$, где $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ – линейные пространства над $\mathbb{F}$. Эндоморфизмы $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{K})$ и $h \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{L})$ называются

f-согласованными, если следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{K} \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{L} \arrow[r, "h"'] & \mathcal{L} \end{tikzcd}$$

В этом смысле, линейное отображение $M : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ есть левый (правый) мультипликатор, если M и $\mathrm{ad}_l(M)$ ad_l-согласованы (ad_r-согласованы).

Предложение 2.2.2. *Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра и $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ – множество всех ее мультипликаторов. Тогда*

- $\ker M = \{a \in \mathcal{A} : M(a) = 0\}$ *и* $\operatorname{im} M = \{a = M(x); x \in \mathcal{A}\}$ – *двусторонние идеалы алгебры $\mathcal{A}$ для любого $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$,*
- $M : \operatorname{cen}\mathcal{A} \to \operatorname{cen}\mathcal{A}$ *и* $M : \operatorname{ann}\mathcal{A} \to \operatorname{ann}\mathcal{A}$ *для любого $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$,*
- $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ – *унитальная подалгебра ассоциативной алгебры* $\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$,
- $[M, N] \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}, \operatorname{ann}\mathcal{A})$ *для всех $M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, где*

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}, \operatorname{ann}\mathcal{A}) = \{X \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}) : X(a) \in \operatorname{ann}\mathcal{A} \text{ для всех } a \in \mathcal{A}\}.$$

В частности, алгебра $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ – коммутативная, если $\operatorname{ann}\mathcal{A} = 0$ (например, если $\mathcal{A}$ унитальная).

Доказательство. Действительно, пусть $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $a \in \ker M$, т. е. $M(a) = 0$, тогда

$$M(a \cdot b) = M(a) \cdot b = 0 \quad \text{и} \quad M(b \cdot a) = b \cdot M(a) = 0$$

для всех $b \in \mathcal{A}$. Аналогично, пусть $a \in \operatorname{im} M$, т.е. $a = M(x)$ для некоторого $x \in \mathcal{A}$, тогда

$$a \cdot b = M(x) \cdot b = M(x \cdot b) \quad \text{и} \quad b \cdot a = b \cdot M(x) = M(b \cdot x)$$

для всех $b \in \mathcal{A}$.

Пусть $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $a \in \operatorname{cen}\mathcal{A}$, тогда

$$M(a) \cdot b = M(a \cdot b) = M(b \cdot a) = b \cdot M(a) \quad \text{для всех} \quad b \in \mathcal{A}.$$

Если же $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $a \in \operatorname{ann}\mathcal{A}$, то

$$M(a) \cdot b = M(a \cdot b) = M(0) = 0 \quad \text{и} \quad b \cdot M(a) = M(b \cdot a) = M(0) = 0$$

для всех $b \in \mathcal{A}$.

Пусть $M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, тогда

$$(M \circ N)(a \cdot b) = M(N(a \cdot b)) = M(N(a) \cdot b) = M(N(a)) \cdot b = (M \circ N)(a) \cdot b$$

для всех $a, b \in \mathcal{A}$. Аналогично,

$$(M \circ N)(a \cdot b) = M(N(a \cdot b)) = M(a \cdot N(b)) = a \cdot M(N(b)) = a \cdot (M \circ N)(b)$$

для всех $a, b \in \mathcal{A}$.

Наконец, пусть $M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $a \in \mathcal{A}$, тогда

$$\begin{aligned}
[M, N](a) \cdot b &= M(N(a)) \cdot b - N(M(a)) \cdot b = N(a) \cdot M(b) - N(M(a) \cdot b) \\
&= N(a \cdot M(b)) - N(a \cdot M(b)) = 0, \\
b \cdot [M, N](a) &= b \cdot M(N(a)) - b \cdot N(M(a)) = M(b \cdot N(a)) - N(b) \cdot M(a) \\
&= M(N(b) \cdot a) - M(N(b) \cdot a) = 0,
\end{aligned}$$

для любого $b \in \mathcal{A}$. □

Предложение 2.2.3. *Пусть $\mathcal{A}$ – унитальная алгебра, $e \in \mathcal{A}$ – ее единица. Определим отображение $e^* : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ правилом $M \mapsto e^*(M) = M(e)$ для всех $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Тогда $\operatorname{im} e^* = \operatorname{cen}\mathcal{A}$, и $e^* : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \operatorname{cen}\mathcal{A}$ есть инъективный морфизм алгебр.*

Доказательство. Действительно, пусть $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $a \in \mathcal{A}$, тогда с одной стороны, $e^*(M) \cdot a = M(e) \cdot a = M(e \cdot a) = M(a)$, а с другой стороны и $a \cdot e^*(M) = a \cdot M(e) = M(a \cdot e) = M(a)$. Таким образом, $\operatorname{im} e^* \subset \operatorname{cen}\mathcal{A}$.

Далее, пусть $M \in \ker e^*$, тогда $M(a) = M(e \cdot a) = M(e) \cdot a = 0 \cdot a = 0$ для всех $a \in \mathcal{A}$, так что $\ker e^* = 0$.

Наконец, пусть $M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, тогда

$$\begin{aligned}
e^*(M \circ N) &= (M \circ N)(e) = M(N(e)) = M(e \cdot N(e)) \\
&= M(e) \cdot N(e) = e^*(M) \cdot e^*(N),
\end{aligned}$$

т. е. линейное отображение e^* есть морфизм алгебр. □

Предложение 2.2.4. *Пусть $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра. Тогда*

- *левое присоединенное действие определяет морфизм алгебр* $\operatorname{ad}\mathcal{A} \to \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$, *причем* $\operatorname{ad} : \operatorname{cen}\mathcal{A} \to \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, *где* $\ker\operatorname{ad} = \operatorname{ann}\mathcal{A}$,
- *если алгебра $\mathcal{A}$ еще и унитальная, то* $\operatorname{ad} : \operatorname{cen}\mathcal{A} \simeq \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *есть изоморфизм, причем* $\operatorname{ad}^{-1} = e^*$.

Доказательство. Действительно, пусть $a \in \operatorname{cen}\mathcal{A}$, тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{ad}(a)(x\cdot y) &= a\cdot(x\cdot y) = (a\cdot x)\cdot y = \operatorname{ad}(a)(x)\cdot y\\ &= x\cdot(a\cdot y) = x\cdot\operatorname{ad}(a)(y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Далее, пусть $a \in \ker\operatorname{ad}$, т. е. $\operatorname{ad}(a)(b) = a\cdot b = 0 = b\cdot a$ для всех $b \in \mathcal{A}$, откуда $a \in \operatorname{ann}\mathcal{A}$.

Если алгебра $\mathcal{A}$ ассоциативная и унитальная, то во-первых $\operatorname{ann}\mathcal{A} = 0$, а во-вторых для всех $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и $a \in \mathcal{A}$ имеем

$$(\operatorname{ad}\circ e^*)(M)(a) = \operatorname{ad}(M(e))(a) = M(e)\cdot a = M(e\cdot a) = M(a),$$

так что $\operatorname{ad}\circ e^* = \operatorname{id}_{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}$. □

2.2.2 Дифференцирования

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра. Линейное отображение $D \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ называется *дифференцированием*, если выполняется *правило Лейбница*

$$D(a\cdot b) = D(a)\cdot b + a\cdot D(b) \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{A}.$$

Множество всех дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$.

Предложение 2.2.5. *Эндоморфизм $D \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$ есть дифференцирование алгебры $\mathcal{A}$, тогда и только тогда, когда приведенная ниже диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\operatorname{ad}"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "\operatorname{ad}"] \\ \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\operatorname{as}(D)"'] & \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}) \end{tikzcd}$$

где $\operatorname{as}(D)(f) = [D, f]$ *для всякого* $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Действительно, пусть $a, b \in \mathcal{A}$. Пройдя диаграмму по пути *направо-вниз*, получим

$$a \mapsto D(a) \mapsto \operatorname{ad}(D(a)), \quad \operatorname{ad}(D(a))(b) = D(a) \cdot b,$$

а пройдя по пути *вниз-направо*, получим

$$a \mapsto \operatorname{ad}(a) \mapsto \operatorname{as}(D)(\operatorname{ad}(a)) = [D, \operatorname{ad}(a)], \quad [D, \operatorname{ad}(a)](b) = D(a) \cdot b - a \cdot D(b).$$

Итак, диаграмма коммутативна тогда и только тогда, когда D удовлетворяет правилу Лейбница. □

Предложение 2.2.6. *Пусть $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, тогда*

- $\ker D = \{a \in \mathcal{A} : D(a) = 0\}$ *– подалгебра алгебры $\mathcal{A}$,*
- $\operatorname{im} D = \{a = D(x); x \in \mathcal{A}\}$ *– линейное подпространство линейного пространства $\mathcal{A}$,*
- $D : \operatorname{cen} \mathcal{A} \to \operatorname{cen} \mathcal{A}$ *и* $D : \operatorname{ann} \mathcal{A} \to \operatorname{ann} \mathcal{A}$.

Доказательство. Действительно, пусть $a, b \in \ker D$, тогда

$$D(a \cdot b) = D(a) \cdot b + a \cdot D(a) = 0 \cdot b + a \cdot 0 = 0.$$

Второе утверждение очевидно, его смысл в том что образ $\operatorname{im} D$ не является ни идеалом ни подалгеброй алгебры $\mathcal{A}$.

Далее, пусть $a \in \operatorname{cen} \mathcal{A}$ и $b \in \mathcal{A}$, тогда

$$D(a) \cdot b = D(a \cdot b) - a \cdot D(b) = D(b \cdot a) - D(b) \cdot a = b \cdot D(a).$$

Наконец, пусть $a \in \operatorname{ann} \mathcal{A}$ и $b \in \mathcal{A}$, тогда

$$\begin{aligned} D(a) \cdot b &= D(a \cdot b) - a \cdot D(b) = D(0) - 0 = 0, \\ b \cdot D(a) &= D(b \cdot a) - D(b) \cdot a = D(0) - 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Предложение 2.2.7. *Множество $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ всех дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ есть подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Действительно, пусть $X, Y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, тогда

$$\begin{aligned} [X, Y](a \cdot b) &= X(Y(a \cdot b)) - Y(X(a \cdot b)) \\ &= X(Y(a) \cdot b + a \cdot Y(b)) - Y(X(a) \cdot b + a \cdot X(b)) \\ &= (X(Y(a)) - Y(X(a))) \cdot b + a \cdot (X(Y(b)) - Y(X(b))) \\ &= [X, Y](a) \cdot b + a \cdot [X, Y](b) \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

□

2.2.3 Взаимные действия

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра, $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ – унитальная ассоциативная алгебра всех ее мультипликаторов, $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ – алгебра Ли всех ее дифференцирований. По построению, $\mathfrak{M}(\mathcal{A}), \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$, это позволяет определить взаимные действия мультипликаторов и дифференцирований, используя композиции и коммутаторы.

Предложение 2.2.8. *Левое присоединенное действие определяет морфизм алгебр* $\mathrm{ad} : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$, *причем* $\mathrm{ad} : \mathrm{cen}\,\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \simeq \mathfrak{M}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$.

Доказательство. Действительно, первое утверждение следует из Предложений 2.2.2 и 2.2.4, а второе из Предложения 2.2.4. □

Предложение 2.2.9. *Левое присоединенное действие определяет морфизм алгебр* $\mathrm{ad} : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}))$, *так что линейное пространство* $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ *имеет структуру левого* $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$*-модуля.*

Доказательство. Действительно, левое присоединенное действие задает линейное отображение $\mathrm{ad} : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}), \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}))$, причем

$$\begin{aligned}(M \circ D)(a \cdot b) &= M(D(a \cdot b)) = M(D(a) \cdot b + a \cdot D(b))\\ &= M(D(a)) \cdot b + a \cdot M(D(b)) = (M \circ D)(a) \cdot b + a \cdot (M \circ D)(b)\end{aligned}$$

для всех $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ и $a, b \in \mathcal{A}$. Другими словами, образ $\mathrm{ad}(M) : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ для любого $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, т. е. определено линейное отображение $\mathrm{ad} : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}))$. Это отображение есть морфизм алгебр, поскольку алгебра эндоморфизмов любого линейного пространства ассоциативна. □

Предложение 2.2.10. *Ассоциированное действие определяет морфизм алгебр Ли* $\mathrm{as} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$ *(задавая в линейном пространстве* $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *структуру* $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$*-модуля Ли), причем образ* $\mathrm{im}\,\mathrm{as} \subset \mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$.

Доказательство. Действительно, ассоциированное действие задает линейное отображение $\mathrm{as} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}), \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}))$, причем

$$\begin{aligned}
[D, M](a \cdot b) &= D(M(a \cdot b)) - M(D(a \cdot b)) \\
&= D(M(a) \cdot b) - M(D(a) \cdot b + a \cdot D(b)) \\
&= (D \circ M)(a) \cdot b + M(a) \cdot D(b) - (M \circ D)(a) \cdot b - M(a) \cdot D(b) \\
&= [D, M](a) \cdot b, \\
[D, M](a \cdot b) &= D(M(a \cdot b)) - M(D(a \cdot b)) \\
&= D(a \cdot M(b)) - M(D(a) \cdot b + a \cdot D(b)) \\
&= D(a) \cdot M(b) + a \cdot (D \circ M)(b) - D(a) \cdot M(b) - a \cdot (M \circ D)(b) \\
&= a \cdot [D, M](b)
\end{aligned}$$

для всех $M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ и $a, b \in \mathcal{A}$. Другими словами, образ $\mathrm{as}(D) : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ для любого $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, т. е. определено линейное отображение $\mathrm{as} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$. Это отображение есть морфизм алгебр Ли $\mathrm{as} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$, поскольку в силу тождества Якоби для коммутаторов

$$\begin{aligned}
\mathrm{as}([X, Y])(M) - [\mathrm{as}(X), \mathrm{as}(Y)](M) &= [[X, Y], M] - [X, [Y, M]] + [Y, [X, M]] \\
&= [[X, Y], M] + [[Y, M], X] + [[M, X], Y] \\
&= 0 \quad X, Y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}),\ M \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}).
\end{aligned}$$

Завершая доказательство покажем, что $\mathrm{im}\,\mathrm{as} \subset \mathfrak{D}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$. Действительно, пусть $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, $M, N \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, тогда

$$\begin{aligned}
\mathrm{as}(D)(M \circ N) &= [D, M \circ N] = D \circ M \circ N - M \circ N \circ D \\
&= (D \circ M - M \circ D) \circ N + M \circ (D \circ N + N \circ D) \\
&= \mathrm{as}(D)(M) \circ N + M \circ \mathrm{as}(D)(N).
\end{aligned}$$

□

Предложение 2.2.11. *Ассоциированное действие определяет морфизм алгебр Ли* $\mathrm{as} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}))$.

Доказательство. Действительно, ассоциированное действие задает линейное отображение $\mathrm{as} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}), \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}))$, причем, в силу тождества Якоби для коммутаторов, $\mathrm{as}([X, Y])(D) = [\mathrm{as}(X), \mathrm{as}(Y)](D)$ для всех $X, Y, D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$. Для завершения доказательства осталось проверить, что образ $\mathrm{as}(D) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}))$ для любого $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, т. е. что

$$\mathrm{as}(D)([X, Y]) = [\mathrm{as}(D)(X), Y] + [X, \mathrm{as}(D)(Y)], \quad D, X, Y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}),$$

а это так в силу все того же тождества Якоби. $\square$

Литература

[1] J. L. Taylor, Homology and cohomology for topological algebras, Advances in Mathematics, Vol. 9, pp. 137-182, 1972.

[2] Madore J., An Introduction to noncommutative differential geometry and its physical applications. Cambridge, University Press, 1995.

[3] Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры. Москва, ИЛ, 1961.

[4] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии. Москва, Мир, 1976.

[5] Дрожжинов Ю.Н. и Завьялов Б.И., Введение в теорию обобщенных функций. Лекционные курсы НОЦ. Выпуск 5. Москва, МИРАН, 2006.

[6] Картан А. и Эйленберг С., Гомологическая алгебра. Москва, ИЛ, 1960.

[7] Кириллов А.А., Элементы теории представлений. Москва, Наука, 1978.

[8] Кобаяси Ш. и Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии. Том I. Москва, Наука, 1981.

[9] Кобаяси Ш. и Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии. Том II. Москва, Наука, 1981.

[10] Ленг С., Алгебра. Москва, Мир, 1968.

[11] Маклейн С., Гомология. Москва, Мир, 1966.

[12] Маклейн С., Категории для работающего математика. Москва, Физматлит, 2004.

[13] Манин Ю.И., Лекции по алгебраической геометрии. Часть I. Аффинные схемы. Москва, МГУ, 1970.

[14] Наймарк М.А., Нормированные кольца. Москва, Наука, 1968.

[15] Пич А., Ядерные локально выпуклые пространства. Москва, Мир, 1967.

[16] Робертсон А. и Робертсон В., Топологические векторные пространства. Москва, Мир, 1967.

[17] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии. Москва, Мир, 1970.

[18] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства. Москва, Факториал Пресс, 2005.

[19] Хелемский А.Я., Банаховы и полинормированные алгебры. Общая теория, представления, гомологии. Москва, Наука, 1989.

Предметный указатель